Pubblicazione bimensile. *Roma 21 gennaio 1914.* N. 1.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 1°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nel movimento a due parametri che assume una superficie S_0 quando si fa *rotolare* (¹) sopra una superficie applicabile S, un punto O, rigidamente connesso alla superficie rotolante S_0, descrive una superficie Σ; e similmente un piano π, trascinato rigidamente da S_0, inviluppa una superficie Σ (non sviluppabile). Per abbreviare, chiameremo Σ *superficie* od *inviluppo di rotolamento*; S si dirà la superficie *d'appoggio*, S_0 la *rotolante*, mentre il punto O, od il piano π, che accompagnano S_0 nel rotolamento, prenderanno il nome di punto o piano *satellite*.

Una prima e fondamentale questione che si presenta in questa teoria del rotolamento di superficie applicabili, è la seguente: La superficie, o l'inviluppo, Σ di rotolamento, possono darsi ad arbitrio? E come si trovano, data Σ, le corrispondenti coppie di superficie applicabili (S, S_0)?

Separando i due casi, enunciamo i due problemi, in certo modo duali l'uno dell'altro, in questi termini più precisi:

1°. Problema A). — *Data una qualunque superficie* Σ, *trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che, rotolando* S_0

(¹) Pel senso preciso del termine *rotolamento,* vedi Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* IV^ème Partie Chap. VI; od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale,* vol. II, pag. 34.

sopra S, *un conveniente punto* O, *satellite di* S_0, *descriva la superficie* Σ.

2°. Problema B). — *Data una superficie* Σ *non sviluppabile, trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che, rotolando* S_0 *sopra* S, *un conveniente piano* π, *satellite di* S_0, *inviluppi la superficie* Σ.

Ciascuno dei due problemi ammette sempre, come si vedrà, una infinità di soluzioni con *due funzioni arbitrarie*, e la ricerca delle infinite coppie (S, S_0) corrispondenti di superficie applicabili dipende dalla integrazione di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, lineare nelle derivate seconde e quadratica nelle derivate prime. Le coppie (S, S_0) corrispondono *biunivocamente* alle soluzioni di questa equazione del 2° ordine.

2. Fra i punti μ della superficie Σ (o inviluppo) di rotolamento ed i punti M della superficie S d'appoggio viene stabilita, per la generazione geometrica stessa, una corrispondenza, essendo M il punto generico di contatto della S colla rotolante S_0, e μ la posizione occupata sopra Σ dal punto satellite (ovvero il punto di contatto col piano satellite). *Il punto* μ *è il piede della perpendicolare abbassata da* M *sopra* Σ.

Ora supponiamo che la superficie S, flessibile ed inestendibile, si deformi, seco trasportando, invariabilmente legati, i segmenti rettilinei $M\mu$, ed assuma la configurazione S_0 della superficie rotolante. Nel caso del problema A), i termini μ di questi segmenti dovranno raccogliersi in un unico punto O (nel punto satellite), ed invece, pel problema *B*), si distribuiranno sul piano satellite π, normale ai segmenti $M\mu$ nella loro nuova posizione. Viceversa, se esiste una configurazione S_0 della S, per la quale gli estremi μ dei segmenti $M\mu$ si raccolgono in un punto O, ovvero si distribuiscono sopra un piano π, la coppia (S, S_0) di superficie applicabili darà, nel primo caso, una soluzione del problema A) con O punto satellite, nel secondo una soluzione del problema *B*) con π piano satellite.

In seguito a ciò, diventa di fondamentale importanza, pei nostri problemi di rotolamento, il risolvere la questione seguente, che si collega al noto teorema di Beltrami sulla deformazione delle congruenze normali [1]: Una superficie S flessibile ed inestendibile si deforma, seco trasportando i segmenti rettilinei $M\mu$, uscenti dai punti M di S e terminati negli estremi μ ad una superficie Σ normale ai segmenti stessi.

Quando è che esiste una configurazione S_0 della S, per la quale la superficie Σ si contrae in un punto? ovvero una configurazione S_0 per la quale Σ diventa un piano?

Se chiamiamo R il valore (algebrico) del segmento $M\mu$, sarà R una funzione delle coordinate curvilinee u, v del punto M mobile su S. Nel

[1] Vedi le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 311.

primo caso, R dovrà rappresentare la distanza del punto M_0 corrispondente, sulla supposta superficie applicabile S_0, dal punto fisso O; nel secondo, sarà R la distanza di M_0 dal piano fisso π.

Inversamente, supponiamo che esista una superficie S_0, applicabile sopra S, e tale che $R = M\mu$ rappresenti la distanza di M_0 (corrispondente ad M) da un punto fisso O nello spazio, ovvero la distanza da un piano fisso π. Dico, allora, che: *Quando la* S, *deformandosi, assume la configurazione* S_0, *i termini* μ *dei segmenti* $M\mu$ *si raccolgono, nel primo caso, nel punto* O, *e nel secondo si distribuiscono sul piano* π.

La dimostrazione risulta da una nota proprietà che compete agli inviluppi di una doppia infinità di sfere, comunque si deformi la superficie luogo dei centri, e cioè che: *sopra ciascuna sfera i due punti di contatto coll'inviluppo serbano una posizione invariabile* (1).

3. Le considerazioni geometriche sopra esposte hanno trasformato i problemi A) e B) nella questione seguente:

Le normali alla superficie data Σ si intercettino con una superficie S, e si indichi con R il segmento (variabile) di normale compreso fra Σ ed S. Come deve prendersi R affinchè esista una superficie S_0 applicabile sopra S, per la quale R rappresenti la distanza di un punto variabile sopra S_0 da un punto fisso nel caso A), ovvero da un piano fisso nel caso B)?

Si riferisca, per maggior semplicità, la superficie Σ di rotolamento alle sue linee di curvatura (u, v), e siano E, G i coefficienti del quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

ed $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ le sue curvature principali, talchè:

$$E\,,\,G\,;\ \frac{1}{r_1}\,,\ \frac{1}{r_2}$$

saranno funzioni note di u, v. Se riportiamo sopra la normale a Σ un segmento variabile

$$R = R(u, v),$$

la superficie S, luogo degli estremi di questi segmenti, avrà un elemento lineare ds_1 che si calcola subito colla formola:

$$ds_1^2 = E\left(1 + \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2 + dR^2. \tag{1}$$

a) Ora suppongasi dapprima che esista una superficie S_0 applicabile sopra S, per la quale R rappresenti la distanza del punto (u, v) di S_0 da

(1) *Lezioni*, vol. II, pag. 88.

un punto O fisso nello spazio. Se riferiamo la S_0 ad un sistema di coordinate polari (R, θ, φ) col centro in O, delle quali R sia il raggio vettore e θ, φ gli angoli polari, per l'elemento lineare ds_0 della superficie S_0 avremo:

$$ds_0^2 = R^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2) + dR^2. \tag{2}$$

Per esprimere che S, S_0 sono isometriche, dobbiamo eguagliare le due forme differenziali (1), (2), onde segue

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2. \tag{2*}$$

A destra abbiamo il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria: e, per ciò, R dovrà essere una tale funzione di u, v da rendere la forma differenziale a sinistra di curvatura $K = +1$. Viceversa, se questo accade, avremo una soluzione del problema A), e la superficie rotolante S_0 si avrà integrando l'equazione differenziale di Riccati che occorre per ridurre la forma (2*) a sinistra al tipo normale $d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2$. Conchiudiamo adunque:

Per risolvere il problema A), *si riporti sopra ogni normale della superficie data* Σ *un segmento* $R = R(u, v)$, *tale da rendere la forma quadratica differenziale*

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2 \ (^1). \tag{3}$$

di curvatura $= +1$. *Il luogo dei termini di questi segmenti dà una superficie* S *d'appoggio, e la superficie* S_0 *rotolante* (*insieme col punto satellite*) *viene individuata dalla* (2) o (2*), *mediante l'integrazione di un'equazione di Riccati.*

Dopo ciò, noi formiamo subito, nel modo più semplice, l'equazione a derivate parziali del 2° ordine da cui dipende il problema A), procedendo come segue. Pongasi

$$\frac{1}{R} = T$$

$$H_1 = \sqrt{E}\,.\,T + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\ , \quad H_2 = \sqrt{G}\,.\,T + \frac{\sqrt{G}}{r_1},$$

(1) Si trasforma subito questo risultato in coordinate curvilinee qualunque. Se con

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\ , \quad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

si indicano le due forme quadratiche fondamentali di Σ, con H la curvatura media, con K la totale, è da determinarsi R in guisa che la forma differenziale

$$\left(\frac{1}{R^2} - K\right)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - \left(\frac{2}{R} + H\right)(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2)$$

abbia la curvatura $= +1$.

e si esprima che la curvatura della (3) è $= +1$, scrivendo la relazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+H_1 H_2=0.$$

Tenendo conto delle note formole

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{1}{r_1 r_2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\},$$

la precedente si trasforma subito nell'altra:

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{H_1}\frac{\partial T}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{H_2}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\sqrt{EG}\left\{T^2+T\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right\}=0.$$

Questa è, pel problema A), l'equazione annunciata al n. 1, lineare in $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$, e di 2° grado in $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$.

b) Passando al caso del problema B), dovrà qui R rappresentare la distanza del punto (u, v) della superficie S_0 dal piano fisso π e se assumiamo questo per piano xy, dovremo quindi avere

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2+dR^2=dx^2+dy^2+dR^2.$$

In questo caso, adunque, la condizione *necessaria* e *sufficiente* è che $R=R(u,v)$ renda *nulla* la curvatura della forma differenziale quadratica

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2 \ (^1).$$

Soddisfatta questa condizione, la riduzione di questa alla forma normale dx^2+dy^2 richiede solo *quadrature.*

Volendo ora calcolare l'equazione a derivate parziali per l'attuale problema B), pongasi

$$h_1=\sqrt{E}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}.\ R\,,\ h_2=\sqrt{G}+\frac{\sqrt{G}}{r_1}.\ R.$$

(1) In coordinate curvilinee qualunque (u, v), è la forma

$$(1-R^2K)(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)-(2R+R^2H)(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2)$$

che deve avere la curvatura nulla.

e si scriva l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v}\right)=0$$

che, calcolata, diviene:

$$\text{(II)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cdot\frac{1}{h_1}\frac{\partial R}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cdot\frac{1}{h_2}\frac{\partial R}{\partial v}\right)=\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}.$$

Ogni soluzione R *di questa equazione determina una superficie* S *d'appoggio per una soluzione del problema* B); *e la superficie* S_0 *rotolante, unica e determinata, si trova con quadrature.*

Così si è in effetto dimostrato che tanto il problema A), quanto il problema B), ammettono infinite soluzioni. La loro ricerca equivale a porre l'elemento lineare della sfera, ovvero quello del piano, rispettivamente sotto le forme determinate:

$$E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2,$$

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2+G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2,$$

risultato questo, che presenta una stretta analogia col teorema di Weingarten relativo alle superficie W.

4. Si può facilmente trovare l'integrale generale della prima (I) nel caso che la assegnata superficie Σ di rotolamento sia un piano, ovvero una sfera.

1° caso: Σ *un piano.* Si può fare, in questo caso,

$$E=G=1\ ,\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_2}=0,$$

ed il problema consiste nel ridurre l'elemento lineare della sfera alla forma

$$\frac{du^2+dv^2}{R^2},$$

che è quanto dire alla forma isoterma.

Basta dunque considerare una qualunque rappresentazione conforme della sfera sul piano Σ, ed elevare in ogni punto di questo piano un segmento rettilineo normale uguale al *modulo* della dilatazione lineare nella detta rappresentazione conforme. Il luogo degli estremi di questi segmenti

è una superficie S d'appoggio, e la superficie rotolante si trova, in questo caso, *in termini finiti*.

2° caso: *Σ una sfera*. Sia a il raggio di questa sfera, di cui prendiamo l'elemento lineare ds sotto forma isoterma:

$$\lambda\,(du^2+dv^2)\,.$$

Il problema consiste qui nel determinare R in guisa che l'elemento lineare

$$ds_1^2=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a}\right)^2\cdot\lambda\,(du^2+dv^2)$$

appartenga alla sfera unitaria. Si consideri adunque una qualunque rappresentazione conforme della sfera Σ sulla sfera unitaria; e sulle normali a Σ si riportino i segmenti R dati da

$$R=\frac{a\mu}{a-\mu}\,,$$

indicando con μ il modulo della dilatazione lineare. Il luogo degli estremi di questi segmenti R dà una superficie S d'appoggio, e la rotolante S_0 si ottiene ancora in termini finiti.

Del resto, la risoluzione del problema A) in questi due casi è già nota implicitamente fin dal 1900 per le ricerche del prof. Calò ([1]), il quale ha dato formule eleganti che forniscono insieme la superficie S d'appoggio e quella S_0 rotolante.

Un caso analogo ai precedenti si ha pel problema B) quando l'inviluppo Σ di rotolamento debba essere una sfera; ma questo non differisce in sostanza dal primo dei casi sopra considerati, se non per lo scambio fra la superficie d'appoggio e la superficie rotolante.

5. Se nei casi considerati al n. precedente (ed in nuovi, di cui trattiamo fra breve) l'integrazione della (I) e della (II) riesce completamente, in altri potremo conoscerne delle soluzioni particolari.

Così, p. es., suppongasi che la superficie di rotolamento Σ (o l'inviluppo) sia una superficie elicoidale, o, più in particolare, una superficie di rotazione. In tal caso potremo assumere, nelle nostre formole, E, G, r_1, r_2 funzioni di una combinazione lineare

$$\tau=au+bv$$

delle variabili, a coefficienti a, b costanti. Allora le equazioni (I) o (II)

([1]) *Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità*, in Annali di matematica, serie 3ª, tom. IV.

ammettono una doppia infinità di soluzioni particolari T o R funzioni dell'argomento stesso τ, poichè esse si cangiano, in questa ipotesi, in una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. E siccome R è allora costante lungo le eliche $au + bv =$ cost. (o i paralleli), si vede che la superficie S d'appoggio sarà pure elicoidale, e lo stesso si riscontra aver luogo per la superficie S_0 rotolante. Dunque: *Se la superficie* Σ *di rotolamento* (*o l'inviluppo*) *è elicoidale, esiste una doppia infinità di coppie* (S, S_0) *di elicoidi applicabili, che risolvono il problema* A), *o il problema* B).

Si consideri ancora il caso che la superficie Σ di rotolamento sia un cilindro circolare retto, di raggio $= \frac{1}{a}$. Possiamo fare

$$E = G = 1 \,, \quad \frac{1}{r_1} = 0 \,, \quad \frac{1}{r_2} = a \,;$$

e il problema si trasforma, pel n. 3, nell'altro di ridurre l'elemento lineare sferico alla forma (di Weingarten)

$$(T + a)^2 \, du^2 + T^2 \, dv^2 \,.$$

Esso equivale quindi alla ricerca di tutte le deformate di una certa superficie di rotazione, che si può facilmente assegnare.

6. Nelle ricerche che abbiamo fin qui indicato, si è tacitamente escluso il caso che il rotolamento di S_0 sopra S dia luogo ad un movimento *con un solo parametro*, anzichè ad un movimento a due parametri. Questa circostanza si presenta *allora, ed allora soltanto*, che la coppia (S, S_0) consti di due rigate applicabili (R, R_0), sicchè, corrispondendosi nell'applicabilità le generatrici (pel teorema di Bonnet), la rigata rotolante R_0 tocca in ogni sua posizione la rigata R d'appoggio *lungo tutta una generatrice* e, rotolando, acquista solo una semplice infinità di posizioni. In tal caso un punto O satellite di R_0 descrive non più una superficie, *ma una curva* C, ed un piano π satellite di R_0 inviluppa una *sviluppabile*; e i problemi fondamentali A) e B) si semplificano nei due seguenti:

Problema A'). — *Data una curva qualunque* C *come curva di rotolamento* (« *roulette* »), *trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *un punto* O, *satellite di* R_0, *descriva la curva* C.

Problema B'). — *Data una qualunque sviluppabile* Σ, *trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili, tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *un piano* π, *satellite di* R_0, *inviluppi* Σ.

Questi due problemi sono retti ancora dalle medesime equazioni a derivate parziali (I) (II), convenientemente interpretate; ed in questi casi, come in quelli considerati al n. 4, l'integrazione riesce completamente. In ciò che segue, diamo le relative costruzioni geometriche, le quali si possono rendere

intuitive mediante considerazioni infinitesimali affatto analoghe a quelle usate dal Beltrami nella sua Memoria sulla flessione delle superficie rigate [1].

7. Per risolvere il problema A′), si scelga sopra ogni piano normale alla curva C di rotolamento una retta r ad arbitrio (con legge continua). Il luogo di queste ∞^1 rette ci dà una rigata R d'appoggio, che determina, in modo unico, la rigata R_0 rotolante. Possiamo esprimere il risultato anche così: *Il problema* A′) *ammette infinite soluzioni* (*con due funzioni arbitrarie*), *che si ottengono scegliendo ad arbitrio la rigata* R *d'appoggio entro il complesso delle tangenti alla sviluppabile polare della curva* C *di rotolamento.*

È poi manifesto che fra queste infinite coppie (R, R_0) di rigate applicabili vi sono ancora infinite coppie di sviluppabili. Come spigolo di regresso Γ della sviluppabile R d'appoggio si può prendere una *qualunque curva* tracciata sulla sviluppabile polare di C; lo spigolo di regresso Γ_0 della sviluppabile rotolante ne resta allora determinato (mediante le sue equazioni intrinseche). In tal caso, invece che del rotolamento delle due sviluppabili, si può parlare del rotolamento della curva Γ_0 sulla curva Γ; il che deve intendersi nel senso seguente: Le due curve Γ, Γ_0 si corrispondono per eguaglianza d'archi e di flessione nei punti corrispondenti, ed il rotolamento di di Γ_0 su Γ avviene in guisa che in ogni sua posizione Γ_0 tocca Γ nel punto corrispondente, ed ha ivi a comune con Γ il piano osculatore; il punto O, invariabilmente legato a Γ_0, descrive la curva data C.

Passando al secondo problema B′), lo risolviamo analogamente come segue: Si considerino i piani condotti per ciascuna generatrice della sviluppabile Σ assegnata normalmente alla sviluppabile stessa (piani rettificanti del suo spigolo di regresso), ed in ciascuno di questi piani si scelga ad arbitrio una retta r. Il luogo delle rette r è una rigata R d'appoggio in una soluzione del problema B′); la rigata rotolante R_0 ne resta individuata, insieme col piano satellite.

Si osservi che anche qui come soluzioni avremo infinite coppie di sviluppabili, ossia di curve rotolanti Γ, Γ_0, delle quali la curva Γ d'appoggio può scegliersi ad arbitrio fra le curve tracciate sulla sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso di Σ.

8. Consideriamo da ultimo il caso di due rigate (R, R_0) applicabili, di cui la rotolante R_0 trascini seco rigidamente una retta r (retta satellite), la quale dunque descriverà una terza *rigata di rotolamento* R′. Proponiamoci il nuovo problema:

P r o b l e m a C′). — *Data una qualunque rigata* R′, *trovare tutte le coppie* (R, R_0) *di rigate applicabili, tali che, rotolando* R_0 *sopra* R, *una retta* r, *satellite di* R_0, *descriva la rigata prescritta* R′.

[1] Beltrami, *Opere*, vol. I, pag. 226.

Anche questo problema ammette infinite soluzioni, le quali però ora dipendono da una sola funzione arbitraria, e si ottengono nel modo seguente: Si consideri una generatrice g' variabile sopra R' ed il *paraboloide delle normali* lungo g', e su questo paraboloide si segni ad arbitrio una generatrice g del sistema di g'. Il luogo di queste ∞^1 rette g, scelte con continuità, ci dà una superficie rigata R d'appoggio in una soluzione del problema C'); e la rigata R_0 rotolante, insieme con la retta satellite, ne resta individuata. Le generatrici dei paraboloidi delle normali appartenenti al sistema delle g' formano una congruenza, *entro la quale può essere scelta ad arbitrio la rigata* R *d'appoggio*.

In fine si osservi che, nel caso attuale, fra le coppie (R, R_0) di rigate applicabili che risolvono il problema C'), abbiamo una *semplice infinità* di sviluppabili, quella R d'appoggio potendosi scegliere ad arbitrio fra le sviluppabili della congruenza.

Fisica-matematica. — *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Alludo alla relazione

$$\varepsilon = K\alpha, \tag{I}$$

valida in ogni punto M di un generico mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento: ε vi rappresenta il coefficiente di emissione in M (riferito all'unità di volume irraggiante, talchè $4\pi\varepsilon$ è la quantità di energia irraggiata tutt'intorno nell'unità di tempo); α il coefficiente di assorbimento, pure in M (per unità di lunghezza); K l'intensità specifica, e quindi πK il potere emissivo (riferito all'unità di superficie) spettante ad uno qualunque degli ∞^2 elementi superficiali uscenti da M. Si intende che ε, α, K vanno presi tutti e tre per radiazioni di una stessa frequenza; ovvero tutti e tre per l'intero spettro; più generalmente, del resto, va ritenuto che ci atteniamo al Planck (¹) per definizioni e postulati (²).

Il procedimento (³), attraente per geometrica semplicità, di cui si è valso l'illustre Autore per stabilire la (I), si appoggia sopra un'ipotesi addizionale, intuitivamente plausibile, ma concettualmente complessa ed esuberante. Ecco di che si tratta. Si fissa in primo luogo un generico elemento di volume S circostante a M, e una superficie sferica Σ col centro in S,

(¹) *Theorie der Wärmestrahlung*, cap. I [(2ª ediz.), Leipzig, Barth, 1913].

(²) Il Planck considera soltanto mezzi omogenei. Anche la nostra deduzione della (I) sarà svolta in questa ipotesi. Ma ciò non lede la generalità, perchè l'estensione a mezzi eterogenei (isotropi) apparisce poi ovvia. Cfr. il n. 8 del presente scritto.

(³) Op. cit., §§ 24-26.

di raggio abbastanza grande perchè, rispetto ad esso, si possano trattare come infinitesime le dimensioni di S. Si valuta poi l'energia assorbita da S nell'unità di tempo, risguardandola irraggiata da Σ, *ed ammettendo inoltre che essa giunga in* S *senza attenuazione, nè rinforzo*. Cio si giustifica in base all'ipotesi addizionale suaccennata, che può enunciarsi così: in condizioni di equilibrio termodinamico, ogni pennello elementare di raggi, nel passaggio da Σ ad S, tanto perde per assorbimento (ed eventuale dispersione) quanto acquista per emissione (e dispersione). Debbo tale schiarimento alla personale cortesia del prof. Planck e gliene attesto il mio grato animo, venendo ormai allo scopo della presente Nota. Esso è di ricavare la relazione (I) [1], mediante una dimostrazione *matematica* [2] che eviti la ipotesi speciale di Planck, sfruttando unicamente (accanto alle premesse generali) la stazionarietà dell' irraggiamento globale di una (qualsiasi) porzione S del mezzo. Vi si perviene nel modo più naturale, esprimendo, a mezzo degli integrali, che direttamente traducono i postulati fisici, la eguaglianza fra l'energia emessa e quella assorbita da S nell' unità di tempo. La (I) ne discende per materiale trasformazione di integrali.

Di questa trasformazione mi occuperò in primo luogo (nn. 1-5), stabilendo anzi una formula alquanto più generale, che mi sembra specifica per la teoria matematica dell' irraggiamento.

1. — Notazioni.

Sia S un campo a tre dimensioni, σ il relativo contorno. Rappresentino: P e P' due punti qualisivogliano di S, o, in particolare, di σ; x, y, z e x', y', z' le rispettive coordinate; $r = |\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}|$ la distanza $\overline{PP'}$; dS e dS' due elementi di campo contenenti P o, rispettivamente, P'. Qualora in particolare P o P' cadano sul contorno, designeranno: $d\sigma, d\sigma'$ due elementi di superficie ad essi circostanti; n, n' le rela-

[1] A dir vero, l'intervento di K non è indispensabile per arrivare alla legge di Kirchhoff. Ciò risulta dalle belle ricerche di Hilbert [Cfr. *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1912, Heft 7]. Ma non scompare per questo l'importanza fisica della nozione di potere emissivo, e l'interesse di fissarne l'espressione in termini di ε e di α.

[2] Tale non può ritenersi la considerazione che si legge nell'articolo del Wien, *Theorie der Strahlung* [Enc. der Math. Wiss., V, 3, 2, pag. 288]. Essa contempla infatti un semispazio indefinito. E, per passare alla (I), nella sua accezione generale, bisogna ancora ammettere che, in un punto qualunque di un mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento, le cose vanno come nel caso tipico di un semispazio limitato da un piano indefinito. Ora ciò non mi sembra, nemmeno fisicamente, evidente, dato che il risultato relativo al caso tipico non scende da comportamento locale, ma è desunto per essenziale contributo di tutto il semispazio.

tive normali vòlte verso l'interno del campo; (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ i loro coseni direttori; $\widehat{nr}$ l'angolo in P, formato da n con r, o, più precisamente, col vettore $P' - P$ (che va da P a P'); $\widehat{n'r}$ l'angolo in P' di n' con $P - P'$.

Sarà manifestamente (il simbolo Σ rappresentando la somma dei termini che si ottengono da quello scritto per sostituzione circolare delle terne

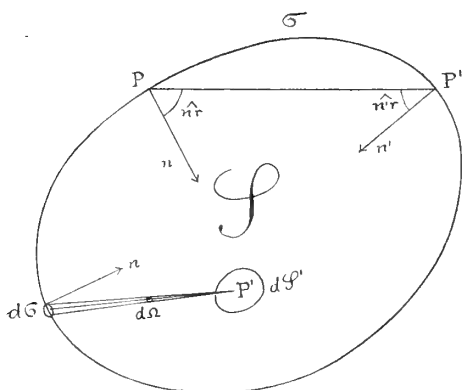



Fig. 1.

di lettere x, y, z; x', y', z'; α, β, γ; α', β', γ')

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dn} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x} \alpha = \Sigma \dfrac{x - x'}{r} \alpha = - \cos \widehat{nr}, \\[2mm] \dfrac{dr}{dn'} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x'} \alpha' = \Sigma \dfrac{x' - x}{r} \alpha' = - \cos \widehat{n'r}. \end{cases}$$

2. — Una trasformazione di integrali.

Si consideri un integrale (quadruplo) del tipo

$$(2) \qquad I = \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \, . \, r \frac{d\varphi}{dr},$$

in cui φ designa una funzione del solo argomento r, uniforme e continua insieme con le due prime derivate.

In virtù delle (1), la funzione integranda può essere scritta

$$\frac{d\varphi}{dn} \Sigma (x' - x) \alpha',$$

talchè, posto, per brevità,

$$J = \int_\sigma d\sigma' \Sigma (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \alpha',$$

la (2) equivale a

$$\text{(2')} \qquad I = \int_\sigma J \, d\sigma .$$

L'integrale J, colla ordinaria formula di Green, si trasforma in

$$-\int_S dS' \, \Sigma \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \right\} .$$

Eseguendo la derivazione e badando all'indipendenza dei due operatori $\frac{\partial}{\partial x'}$ e $\frac{d}{dn} = \Sigma \alpha \frac{\partial}{\partial x}$, si ha

$$J = -3 \int_S \frac{d\varphi}{dn} dS' - \int_S dS' \, \Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} .$$

Notiamo ora che, per essere

$$\frac{d}{dn} (x' - x) = -\alpha ,$$

sussiste l'identità

$$\Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma (x' - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x'} ,$$

e teniamo d'altra parte presente che, dipendendo φ dalle coordinate esclusivamente pel tramite di r, si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x' - x}{r} ,$$

nonchè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Con ciò, l'identità diviene

$$\Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma \frac{(x' - x)^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d}{dn} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{d\varphi}{dn} ;$$

e, sostituendo nella precedente espressione di J, si ricava

$$J = -\int_S dS' \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right) .$$

La (2') porge infine, invertendo le integrazioni,

$$\text{(2'')} \qquad I = -\int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right) .$$

La formula di trasformazione, che volevamo stabilire, risulta dall'egualiare i secondi membri di (2) e (2''). Essa è quindi:

$$(3)\qquad \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \, . \, r \frac{d\varphi}{dr} = - \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}\right) .$$

3. — Corollarii.

Nel primo membro della (3) la funzione integranda dipende, in modo simmetrico, da due punti P e P' del contorno. Si può facilmente attribuire anche al secondo membro una forma simmetrica, rispetto alle coppie P, P' del campo. Basta applicare all'integrale esteso a σ la formula classica di Green che lo trasforma in integrale di spazio. E si ha (invertendo ancora le integrazioni, per uniformità col primo membro):

$$(4)\qquad \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \, . \, r \frac{d\varphi}{dr} = \int_S dS \int_S dS' \Delta_2 \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}\right) ,$$

dove Δ_2 designa l'operatore di Laplace rispetto alle coordinate x, y, z del punto P. Si avverta, però, che, trattandosi di una funzione del solo argomento r, l'operatore Δ_2 si riduce notoriamente a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right) .$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova riprendere la (3) e presentarla sotto aspetto lievemente modificato, ponendo

$$r \frac{d\varphi}{dr} = f ,$$

ed eseguendo, nel secondo membro, la derivazione rispetto ad n.

Dacchè, per una funzione della sola r, è

$$\frac{d}{dn} = \frac{dr}{dn}\frac{d}{dr} = - \cos \widehat{nr} \frac{d}{dr} ,$$

si ha

$$- \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos \widehat{nr} \left\{ 2 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\varphi}{dr}\right) \right\} ,$$

ossia, sostituendo f a φ,

$$- \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos \widehat{nr} \left(\frac{2}{r} f + \frac{df}{dr}\right) .$$

La (3) equivale pertanto a

$$(5)\qquad \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \, . \, f(r) = \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \cos \widehat{nr} \, . \left(\frac{2}{r} f + \frac{df}{dr}\right) ,$$

dove f può ritenersi funzione arbitraria di r, continua insieme con la sua derivata prima: ciò in virtù di $f = r \frac{d\varphi}{dr}$, e delle ipotesi fatte su φ [n. 2].

Veramente, con tali ipotesi, la $f = r \frac{d\varphi}{dr}$ imporrebbe ulteriormente a f la condizione di annullarsi (di prim'ordine almeno) per $r = 0$. Ma si vede subito che ciò è inessenziale, appoggiandosi sulla seguente:

4. — Osservazione.

La formula (3) seguita a sussistere, anche se φ diviene infinita d'ordine non superiore al primo, per $r = 0$. Rimane infatti legittimo tutto ciò che si è detto, quando φ si intendeva finita.

Seguita quindi a sussistere anche la (5), con una f, sia semplicemente finita per $r = 0$ (il che corrisponde ad un infinito logaritmico della φ), sia infinita di prim'ordine (il che corrisponde ad analoga singolarità di φ).

Quanto alla (4), se l'ordine di infinito di φ, per $r = 0$, è inferiore ad 1, essa è ancora legittima. Ma se φ diviene infinita di prim'ordine, la trasformazione di

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

in integrale di volume richiede che si consideri a parte il termine polare $\frac{C}{r}$ (C costante). Ciò reca in definitiva al secondo membro della (4) un termine addizionale $4\pi CS$ (S volume del campo designato colla stessa lettera).

5. — Casi particolari notevoli.

Per quanto abbiamo ora osservato, si può prendere, nella (3), $\varphi = -\frac{1}{r}$. Il primo membro, allora, è

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r},$$

e il secondo

$$\int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Dacchè r vi rappresenta la distanza fra un punto P di σ e un generico punto P' interno alla superficie, l'integrale

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

vale 4π. Si ricava, pertanto,

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}$$

come *espressione del volume limitato da una generica superficie chiusa* σ.

Pongasi, nella (5),

$$f = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r^2}$$

con α costante. Ciò è ancora legittimo, dacchè f ha un infinito di primo ordine per $r = 0$, rimanendo, del resto, ovunque regolare.

Avremo l'identità

$$(6)\qquad \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r^2}(1 - e^{-\alpha r}) = \alpha \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos\widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r},$$

che tra un momento ci renderà segnalato servigio.

6. — Applicazione al regime stazionario del calore raggiante in un mezzo omogeneo isotropo.

Sia S una porzione di tale mezzo, limitata da un contorno *convesso* σ; ε il coefficiente di emissione, che sarà da ritenersi costante, trattandosi di mezzo omogeneo in regime stazionario.

Riportandoci, per le notazioni, al n. 1, fissiamo un qualsiasi punto P' di S e un circostante elemento dS' [cfr. la fig. 1]. Sia poi $d\Omega$ l'ampiezza (angolo solido misurato sulla sfera di raggio 1) di un generico cono elementare spiccato da P'; $d\sigma$ l'elemento del contorno σ (unico, dacchè il contorno si suppone convesso) segato da detto cono elementare. Manifestamente,

$$d\Omega = d\sigma \frac{\cos\widehat{nr}}{r^2};$$

e la quantità di energia, inviata nell'unità di tempo da dS', entro il cono elementare $d\Omega$, vale

$$\varepsilon\, dS'\, d\Omega.$$

Questa energia esce dal campo attraverso $d\sigma$: ma non integralmente, in causa dell'assorbimento. Se α è il relativo coefficiente per unità di lunghezza, dato che il cammino percorso è rappresentato da r, $e^{-\alpha r}$ sarà la frazione di $\varepsilon\, dS'\, d\Omega$ che va fuori del campo.

Di tutta l'energia emanata da dS' secondo le varie direzioni (nell'unità di tempo), ne esce da S (pure nell'unità di tempo)

$$\varepsilon\, dS' \int_{\text{esteso alla sup. sferica di raggio 1}} e^{-\alpha r}\, d\Omega = \varepsilon\, dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos\widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r}.$$

In totale, sommando cioè i contributi di tutti i dS', la perdita di energia, subita da S nell'unità di tempo, ammonterà a

$$(7) \qquad E = \varepsilon \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} .$$

In condizioni di regime (equilibrio termodinamico), a questa perdita deve far riscontro un'eguale somministrazione dall'esterno, per flusso attraverso gli elementi di contorno.

Se K rappresenta l'intensità specifica, ogni $d\sigma$ irradia verso $d\sigma'$, nell'unità di tempo, la quantità di energia

$$K\, d\sigma\, d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} \quad (^1).$$

Di questa, però, soltanto la frazione $1 - e^{-\alpha r}$ rimane entro il campo.

Complessivamente, per effetto dei mutui scambî, si ha come espressione — da eguagliarsi ad E — dell'acquisto di energia:

$$(8) \qquad E = K \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-\alpha r}).$$

In virtù della (6), si può invece scrivere

$$(8') \qquad E = K\alpha \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} ,$$

e il materiale confronto di (7) e (8') porge

$$(I) \qquad \varepsilon = K\alpha .$$

c. d. d.

7. — Validità delle formule (7) ed (8) anche per campi non convessi.

Le espressioni (7) ed (8) dell'energia sottratta, o rispettivamente comunicata ad S, nell'unità di tempo, sono state dedotte nell'ipotesi che il campo sia limitato da un contorno convesso. Tale limitazione è però inessenziale. Per rendersene conto, basta seguire passo passo il procedimento del n°. precedente, tenendo debito conto delle modificazioni richieste dalla maggiore generalità del contorno.

Riferiamoci, per fissare le idee, al calcolo dell'energia sottratta, cominciando coll'osservare che un cono elementare di vertice P' può incontrare

(1) Planck, loc. cit., § 20.

il contorno σ piu volte, sempre però un numero *dispari*, per es. (cfr. la fig. 2) nelle areole 1, 2, 3.

I relativi $\frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2}$ sono eguali in valore assoluto, ma alternativamente positivi e negativi (positivi nelle areole di egresso, come 1 e 3; negativi in quelle di ingresso, come 2). La misura dell'angolo solido $d\Omega$ è espressa, in ogni caso, da

$$\frac{d\sigma \,|\cos \widehat{nr}|}{r^2} ;$$

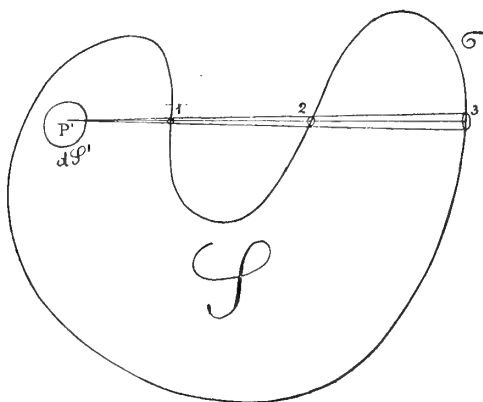



Fig. 2.

si può quindi attribuirle anche la forma

$$d\Omega = \mathrm{S} \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2} ,$$

la somma essendo estesa a tutte le areole superficiali incontrate dal cono elementare. Ed è facile riconoscere, sommando i contributi (alternativamente positivi e negativi) provenienti dalle singole areole, che l'energia sfuggente da S nell'unità di tempo, attraverso il detto cono, vale

$$\varepsilon \, dS' \, \mathrm{S} \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} .$$

L'integrazione, estesa ai varî coni elementari e ai varî dS', riporta poi subito alla (7); ecc.

8. — Mezzi eterogenei (isotropi).

Il carattere puramente locale della (I) ne lascia presumere la validità anche per mezzi eterogenei a comportamento isotropo. Lo si constata agevolmente, supponendo ε, α, K funzioni continue del posto; e così pure la

velocità c con cui si propaga l'energia; tale di più la c che i raggi, che ne rimangono definiti in base al principio di Fermat, ammettano tangenti variabili con continuità.

Con ciò, infatti, fissato un generico punto **M** del mezzo, è lecito di delimitare attorno ad M un campo S così piccolo che l'emissione, la propagazione e l'assorbimento dell'energia differiscano tanto poco quanto si vuole da quello che avverrebbe in un ipotetico mezzo omogeneo nel quale $\varepsilon, \alpha, K, c$ avessero dovunque le determinazioni $\varepsilon_M, \alpha_M, K_M, c_M$, che ad esse spettano in **M**. Più precisamente si può dimostrare che l'energia perduta, per emissione, da S nell'unità di tempo, si presenta in definitiva sotto la forma

$$S(\varepsilon_M + \delta),$$

δ convergendo a zero con S (si intenda colla massima dimensione di S); quella acquistata, per assorbimento, sotto la forma,

$$S(K_M \alpha_M + \delta^*),$$

δ^* convergendo pure a zero colla massima dimensione di S. Eguagliando, dividendo per S, e passando poi al limite, si conclude giusta l'asserto.

Matematica. — *Della probabilità nelle prove ripetute*. Nota del Socio P. Pizzetti.

Il teorema di Bernoulli sulla frequenza media di un avvenimento in un numero indefinito di prove identiche, si dimostra di solito esprimendo, per approssimazione, con un esponenziale la probabilità elementare di ogni possibile combinazione. Ma la dimostrazione, quale è esposta nei trattati, è complicata e non rigorosa. In una Nota pubblicata nel 1908 negli Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, mostrai come si possa porre quella dimostrazione al coperto da qualsiasi obbiezione, introducendo naturalmente qualche maggiore complicazione nei calcoli.

La dimostrazione che segue è invece estremamente semplice e nulla lascia a desiderare dal lato della esattezza. Essa si deduce facilmente dalle note *diseguaglianze di Cebycef* [1], e da questo punto di vista non ha nulla di originale. Credo tuttavia utile di dare qui questa dimostrazione, sia per liberarla da talune superflue complicazioni e ridurla così alla sua più semplice forma, sia per mostrare come si possano facilmente trovare dei limiti, più prossimi di quelli dati dalle diseguaglianze di Cebycef, per la probabilità

[1] Ved. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 1912, pagg. 34 e segg.

che il risultato di un certo numero di prove ripetute sia compreso entro certi limiti.

1. Consideriamo s prove, in ciascuna delle quali l'avvenimento A abbia la probabilità p di presentarsi. Poniamo:

$$(1) \qquad P_v = \frac{s(s-1)\dots(s-v+1)}{v!} p^v (1-p)^{s-v}.$$

Sarà, questa P_v, la probabilità che, in s prove, l'avvenimento A abbia a presentarsi v volte e non più. Il numero v può prendere tutti i valori interi da 0 ad s, e, se la sommatoria Σ s'intende estesa a tutti questi valori di v, si avrà evidentemente:

$$(2) \qquad \Sigma P_v = 1 .$$

Derivando la (1) rispetto a p e moltiplicando per $p(1-p)$, si ha, con ovvie riduzioni:

$$(3) \qquad p(1-p)\frac{dP_v}{dp} = (v - sp) P_v .$$

Se pertanto si deriva la (2) rispetto a p e si moltiplica per $p(1-p)$, si ottiene:

$$(4) \qquad \Sigma(v - sp) P_v = 0$$

(il che vuol dire che sp è il *valor medio* o la *speranza matematica* di v).

Ripetendo sulla (4) l'operazione ora eseguita sulla (2), e tenendo conto delle (2) (3), abbiamo

$$(5) \qquad \Sigma(v - sp)^2 P_v = sp(1-p) = spq .$$

ove si ponga $q = 1 - p$. (Questo risultato si può esprimere dicendo che $\sqrt{pqs}$ è l'errore medio Gaussiano della ipotesi $v = ps$).

Indichiamo ora con ε un numero reale positivo, e chiamiamo $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ quelli (se pur ve ne sono) fra i possibili valori di v, pei quali risulta

$$(6) \qquad (v - sp)^2 > \varepsilon^2 s^2 .$$

Denotiamo poi con Σ' quello a cui si riduce la sommatoria Σ, quando la si estenda ai soli valori $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ della v, trascurando tutti gli altri. Poichè nel 1° membro della (5) tutti i termini sono positivi, avremo

$$\Sigma'(v - sp)^2 P_v < pqs .$$

E quindi, per la (6),

$$\varepsilon^2 s^2 . \Sigma' P_v < pqs ,$$

ovvero

$$\Sigma' P_v < \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

Ora, $\Sigma' P_v$ esprime la probabilità che il numero v soddisfaccia alla diseguaglianza (6). La probabilità Π, che sia invece soddisfatta la relazione

$$|v - sp|^2 \leq \varepsilon^2 s^2 \tag{7}$$

sarà dunque

$$\Pi = 1 - \Sigma' P_v > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

La (7) può anche scriversi

$$\left|\frac{v}{s} - p\right| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo dunque una probabilità

$$\Pi > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s} \tag{8}$$

che la differenza $p - \frac{v}{s}$ non supererà, in valor assoluto, un valor assegnato ε. Preso ε piccolo a piacere, si può immaginare il numero s delle prove tanto grande perchè Π differisca da 1 (certezza) di tanto poco quanto si vuole. Il che esprime appunto il teorema di Giacomo Bernoulli.

2. Questo modo di dimostrazione presenta, di fronte a quello ordinariamente seguìto, il difetto, che esso non fornisce la nota espressione approssimata, per mezzo dell'integrale di Poisson, della probabilità Π nel caso di un numero grande, ma finito, di prove. Ma nella mia sopracitata Nota ebbi a dimostrare come, in tutti i casi (che sono i più interessanti) in cui la Π è molto prossima ad *uno*, la approssimazione data dal detto integrale è assolutamente illusoria. D'altra parte, l'assegnare, come è fatto nel precedente paragrafo, un limite inferiore della Π, può in molti casi essere sufficiente. È poi facile, trovare altri limiti [in molti casi, più approssimati di quello fornito dalla (8)], valendosi, invece che della formola (5), delle analoghe formole che dànno il valor medio delle quarte, seste ecc. potenze della differenza $v - ps$.

Per ottenere, con una certa speditezza, i detti valori medii, osserviamo che, posto

$$M_n = \Sigma (p - sv)^n . P_v,$$

la formula (3) dà immediatamente

$$M_{n+1} = p(1-p)\left\{\frac{dM_n}{dp} + sn\, M_{n-1}\right\}.$$

Questa formola dà modo di calcolare una dopo l'altra le espressioni dei valori medii M_n. Si ha, così,

$$M_3 = s(p - 3p^2 + 2p^3) = spq(q - p),$$

$$M_4 = (3s^2 - 6s)(p^2 - 2p^3 + p^4) + s(p - p^2) = (3s^2 - 6s)p^2q^2 + spq,$$

$$M_5 = 10s^2(p^2 - 4p^3 + 5p^4 - 2p^5) + s(p - 15p^2 + 50p^3 - 60p^4 + 24p^5) =$$
$$= spq(q - p)\{(10s - 12)pq + 1\},$$

$$M_6 = spq\{15s^2p^2q^2 + spq(25 - 130pq) + 1 - 30pq + 120p^2q^2\}, \text{ etc. etc.}$$

Col ragionamento del paragrafo precedente, otteniamo, facendo uso della espressione di M_4, che la probabilità Π della diseguaglianza

$$\left| p - \frac{v}{s} \right| \leq \varepsilon$$

ha un limite inferiore, dato da

$$\Pi > 1 - \frac{1}{\varepsilon^4 s^2}\left[3p^2q^2 + \frac{pq}{s}(1 - 6pq)\right]. \tag{9}$$

Valendoci della espressione di M_6, abbiamo

$$\Pi > 1 - \frac{1}{\varepsilon^6 s^3}[15p^3q^3 + \cdots] \tag{10}$$

dove i termini non scritti hanno a divisore s ed s^2, e sono praticamente trascurabili. Com'è chiaro, queste successive formole dànno limiti inferiori sempre più prossimi, nella ipotesi che s sia abbastanza grande. Se supponiamo $s = 10000$, $p = q = \frac{1}{2}$, $\varepsilon \frac{1}{50}$, abbiamo rispettivamente, dalle (8) (9) (10),

$$\Pi > 0{,}937, \quad \Pi > 0{,}988, \quad \Pi > 0{,}9963.$$

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Sulla diffusione delle rocce a nefelina nella Libia.* Nota preliminare del Corrispondente Ettore Artini.

L'esistenza di rocce a nefelina in alcuni punti della Libia è nota da molto tempo. Fin dal 1880 il van Werveke descriveva minutamente e analizzava una *fonolite* di Msid Gariàn (¹); e sopra questa roccia ritornò poi, con osservazioni particolareggiate, estese anche ad una analoga roccia di Tekut Gariàn, il Rosenbusch nel classico suo trattato (²). Nella stessa opera, questo medesimo autore accenna pure ad un *basalto nefelinico* proveniente da « Tekut, bei Ghadames » (³).

Dopo di questi accenni, quasi incidentali, del Rosenbusch, ch'io mi sappia, altri lavori particolareggiati sulla petrografia delle rocce eruttive della regione libica non furono pubblicati, all'infuori della Nota del Manasse (⁴), nella quale sono descritti due basalti feldspatici olivinici e una andesite augitica, raccolti dal prof. Vinassa sulla via da Ghadames a Tripoli, ma erratici, e ritenuti provenienti, in genere, dal Gebel. Così che il Vinassa, nel suo recente volume (⁵) molto sommariamente, ma esattamente, ebbe a scrivere: « Sembra che le rocce eruttive siano di varî tipi. Furono citati fonoliti e basalti, ed io vi raccolsi varî tipi di basalte ed una andesite augitica che vennero studiati dal prof. Manasse ». Quest'ultimo lavoro del Manasse poteva lasciar l'impressione che le rocce eruttive prevalenti fossero da ascrivere alla serie gabbro-dioritica, e le rocce a nefelina rappresentassero l'eccezione.

Io ho avuto la ventura di essere incaricato dal sig. ing. cav. Ignazio Sanfilippo dello studio petrografico del vasto materiale di rocce da lui raccolto durante la notissima e fortunosa sua spedizione; e di tale prova di fiducia e di benevolenza sono ben lieto di poterlo qui ringraziar vivamente. Riservandomi di pubblicare poi per esteso i risultati delle ricerche intraprese, voglio ora limitarmi ad una esposizione, affatto sommaria e sintetica, delle mie osservazioni.

(¹) L. v. Werveke, *Mineralogisch-petrographische Mittheilungen.* Neues Jahrb. für Min. Geol. u. Pal., 1880, II, pag. 275.

(²) Rosenbusch. *Mikroskopische Physiographie der Mineralien u. Gesteine,* Bd. II, Zw. Hälfte. *Ergussgesteine,* pp. 961, 962, 965. 969.

(³) Idem. ibid., pag. 1446.

(⁴) E. Manasse, *Sopra alcune rocce eruttive della Tripolitania.* Bollettino d. Soc. geol. ital., XXIV, 1905, pag. 137.

(⁵) P. Vinassa de Regny, *Libya Italica.* Milano, U. Hoepli, 1913, pag. 31.

FONOLITI furono raccolte nelle seguenti località

a) Gebel Tkut, nel Gariàn (camp. n. 45).
b) Bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. nn. 54, 57, 59 *b*).
c) Monti del Gem, a S. O. di Tarhona (camp. n. 61).
d) Lembi occidentali del Gebel-es-Soda; a circa 70 km. a N. N. O. di Brak (camp. n. 248).

Sono in massima parte fonoliti ad *egirina*; solo nel campione di Gebel Tkut, che è poi identico alla roccia descritta da van Werveke, il pirosseno è piuttosto un'egirinaugite, con mantello egirinico; i prismetti di egirina, spesso fascicolati o in gruppi divergenti, sono ordinariamente cribrosi per inclusione di grande quantità di nefelina in piccolissimi cristalli idiomorfi. La *nefelina* e il *sanidino* sono entrambi abbondanti; in qualche campione, (59 *b*) per la grande abbondanza della prima si passa a tipi francamente nefelinitoidi. Le segregazioni intratelluriche talora sono quasi mancanti; talora spettano a sanidino, in cristalli geminati secondo la legge di Karlsbad; ma non mancano tipi (camp. 61) con segregazioni di nefelina in nitidi prismi esagonali. Nella fonolite del Gariàn è tipica e abbondante la *sodalite*, già osservata da van Werveke; essa è scarsa o mancante nelle altre, dove invece si trova non scarso l'*analcime*. Accessorî: una *orneblenda* catoforitica, la *titanite*, l'*apatite*.

BASALTI NEFELINICI furono trovati:

a) Nella regione a S-O del Gariàn (camp. n. 37).
b) Sulle falde settentrionali dei monti del Gariàn (camp. n. 50).
c) Nel bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 59 *a*).

Sono rocce molto ricche di *augite* bruno-violacea, talune anche di *olivina*, per lo più fresca, e piuttosto povere di *nefelina*; quest'ultima costituisce la massa di riempimento fra i cristalli idiomorfi dei silicati ferromagnesiani, ed è eminentemente allotriomorfa. La determinazione, fatta per via ottica, fu naturalmente controllata per via chimica: il minerale dà subito abbondante gelatina con HCl diluito e freddo, e con la evaporazione si forma una grande quantità di cubetti di cloruro sodico. Abbastanza abbondanti i granuletti minutissimi di *magnetite*; accessorî: la *biotite*, in lamelline rossastre, l'*apatite*, e tracce di *egirina*, come mantello esterno di concrescimento sull'augite in alcune plaghette isterogenetiche.

BASANITI NEFELINICHE furono constatate fra le rocce provenienti da:

a) Gebel Tkut, nel Gariàn (camp. n. 44).
b) Bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 56).
c) Gebel-es-Soda; regione a sud di Sokna (comp. n. 237).

Queste rocce sono caratterizzate dalla associazione di un plagioclasio basico (*labradorite*) in cristalli geminati, listiformi nella sezione, con *nefelina*, per lo più fresca e non troppo scarsa; il plagioclasio è sempre idiomorfo rispetto alla nefelina, da cui si stacca nettamente per la maggiore birifrazione e il potere rifrangente molto superiore. Anche qui fu eseguita la riprova chimica della determinazione ottica. Tra gli elementi colorati prevale l'*augite*, ma non scarsa è pure l'*olivina*, fresca, o parzialmente alterata con formazione di *iddingsite*. Abbondante la *magnetite*; accessorî: *biotite, apatite, ilmenite, analcime*.

Qualche amigdaletta zeolitica si osserva anche macroscopicamente nel camp. n. 237.

I BASALTI FELDSPATICI non mancano tuttavia completamente; e ne trovai fra i campioni raccolti:

a) Nel bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 52).
b) Nella regione a Sud del Uadi Beni-Ulid (camp. n. 142 e 142 *bis*).

Sono rocce alquanto bollose, con abito doleritico, e con tipica struttura intersertale. L'*augite*, bruniccia, si modella nettamente sulle liste di plagioclasio basico (*labradorite*), larghe, geminate albite-Karlsbad, e sulla *olivina*, non scarsa. Quest'ultima è talora fresca, ma più spesso trasformata in *iddingsite*; non è raro vedere l'interno di un cristallo di olivina sostituito interamente da un individuo unico di iddingsite, mentre all'esterno si ha un sottile anello di olivina inalterata. La mesostasi vitrea, ricca di microliti fascicolati, augitici e talora anche feldspatici, di lamelle di *ilmenite* e prismetti di *apatite*, occupa i vani angolosi tra gli elementi cristallizzati, ed è variamente abbondante.

Da quanto sono venuto esponendo risulta dunque evidente che, in tutta la vasta regione percorsa dalla spedizione Sanfilippo-Sforza, le rocce basaltiche della serie gabbro-dioritica, cioè i basalti feldspatici, rappresentano una assoluta minoranza, mentre la più gran parte delle rocce eruttive raccolte spetta alla serie foyaitico-theralitica. Devo anzi aggiungere che le analogie e l'aria di famiglia che complessivamente presentano queste rocce, mi fanno ritenere probabile che tutta la regione formi una vera provincia petrografica; ciò che, tuttavia, solo i risultati di molte analisi chimiche e studî più approfonditi e particolareggiati potranno in seguito confermare.

Meccanica. — *Efflusso da un recipiente forato lateralmente.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni di linee.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

È ormai ben noto che un vero rinnovamento del Calcolo delle Variazioni potrà aversi sol quando questa teoria verrà considerata definitivamente come un capitolo di quel Calcolo funzionale che ha già avuto notevolissimi sviluppi per opera di Volterra, Pincherle, Bourlet, Hadamard, Fréchet, Riesz ed altri, ed al quale pare riserbato, in un futuro assai prossimo, un posto di singolare importanza nell'analisi. Non è quindi ozioso l'occuparsi un poco del come deve impostarsi questo Calcolo funzionale perchè riesca veramente utile ai fini del Calcolo delle Variazioni.

Limitandosi al problema più semplice, a quello relativo a integrali estesi a linee, subito si vede che, nel Calcolo delle Variazioni, si presentano le così dette *funzioni di linee*, e che perciò si è condotti naturalmente al Calcolo funzionale del Volterra.

Scopo di questa Nota è di esaminare il valore del concetto di continuità nella teoria della funzioni di linee, in relazione al problema detto di Calcolo delle Variazioni.

1. Sia dunque $F(x, y, x', y')$ la solita funzione del Calcolo delle Variazioni, finita e continua, insieme colle sue derivate parziali dei primi tre ordini, in un campo A del piano (x, y) e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti alla disuguaglianza $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Sia poi C una curva, appartenente al campo detto, continua e rettificabile.

Si consideri l'integrale

$$J(C) = \int_C F(x, y, x', y')\, ds ,$$

dove le x', y' rappresentano le derivate delle coordinate x, y dei punti di C, espresse in funzione dell'arco s della curva stessa, e si supponga che la funzione di linea J(C) sia continua.

Vediamo, innanzi tutto, di definire con esattezza questa continuità.

Diremo che una curva C' (considereremo sempre curve continue, rettificabili) *appartiene ordinatamente ad un intorno* (ϱ) *di* C, se è possibile di porre tra le curve una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre minore del numero positivo ϱ.

Diremo, poi, che la funzione di linea J(C) è *continua sull'elemento* C, se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$

tale che, per ogni curva C′ di A appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C, si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon .$$

2. Questa continuità, quali particolarità presuppone nella funzione $F(x, y, x', y')$?

Sia P un punto qualsivoglia di C, e si consideri una curva chiusa γ, passante per esso e giacente tutta nel cerchio di centro P e raggio ϱ, cerchio che indicheremo con la scrittura $(P . \varrho)$. Per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale

$$\int_{\gamma} F\, ds$$

deve essere nullo: e ciò qualunque sia la γ. Ed invero, se ciò non fosse, ad ogni intero n corrisponderebbero sempre infinite curve γ_n, tutte contenute nel cerchio $\left(P . \frac{1}{n}\right)$ e tutte soddisfacenti o alla disuguaglianza

$$\int_{\gamma_n} F\, ds > 0 ,$$

oppure alla contraria. Suppongasi, per fissare le idee, che si verifichi sempre la prima di queste disuguaglianze. Allora, presa una qualsiasi delle curve γ_n, contandola un numero sufficiente di volte, m_n, in modo che sia

$$m_n \int_{\gamma_n} F\, ds > \delta ,$$

dove δ è un numero prefissato, positivo, e unendole la curva C, se ne ottiene un'altra C_n tale che

$$J(C_n) - J(C) > \delta .$$

A questa disuguaglianza devono soddisfare tutte le C_n corrispondenti ad un determinato n: e, ciò qualunque poi sia questo n. E poichè tutte le C_n risultano appartenenti ordinatamente all'intorno $\left(2 \frac{1}{n}\right)$ di C, ne viene che la funzione di linea J non può essere continua sulla C.

È dunque provato che, per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale della F esteso alle γ è nullo, e se ne deduce, sempre per lo stesso ϱ, che il medesimo integrale, esteso ad una qualsiasi curva congiungente P con un punto arbitrario di (P , ϱ), e giacente per intero in tal cerchio, è indipendente dal cammino d'integrazione. Per ciascuna di tali curve è allora nulla la variazione prima dell'integrale della F: vale a dire, è soddisfatta l'equazione differenziale di Eulero

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x' y'' - x'' y') = 0 ,$$

dove F_1 rappresenta l'invariante di Weierstrass della F. Questa equazione risulta quindi soddisfatta identicamente nel cerchio (P, ϱ), il che porta che sia identicamente

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_{xy'} = F_{yx'} .$$

Essendo

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = - \frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} ,$$

la prima delle precedenti identità mostra che $F_{x'}$ e $F_{y'}$ sono indipendenti da x' e y', che è cioè $F_{x'} = P(x, y)$, $F_{y'} = Q(x, y)$; e la seconda, che queste P e Q verificano l'ugnaglianza

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Tutto questo avviene nel cerchio (P, ϱ). E poichè P è scelto comunque su C si può concludere, in forza di un noto ragionamento, che

l'ipotesi della continuità della J(C) *sulla curva* C, *porta che, per tutti i punti di* A *distanti da* C *per meno di un certo* ϱ_1, *è*

$$F(x, y, x', y') = x' F_{x'} + y' F_{y'} = x' P(x, y) + y' Q(x, y),$$

con $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Se poi la J(C) è continua su qualunque C di A, le uguaglianze qui scritte valgono in tutto il campo.

3. Da quanto precede, si vede che l'ipotesi della continuità è di troppo restrittiva, portando ad escludere tutti quegli integrali che veramente interessano nel Calcolo delle Variazioni.

La continuità è dunque da scartarsi, almeno nella forma nella quale fu posta più sopra. Si potrebbe però pensare ad una continuità di natura più larga, per esempio alla continuità di ordine 1 dell' Hadamard (secondo il quale, la precedente sarebbe di ordine zero), ed anche a quest'altra, che starebbe fra quella definita più sopra e quella detta or ora dell' Hadamard, e che si può fissare così: la funzione J(C) è continua sull'elemento C se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C' di A, appartenente all'intorno (ϱ) di C, e tale che sia

$$|\text{lunghezza } C' - \text{lungh. } C| < \varrho ,$$

si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon .$$

Secondo questa definizione, la funzione J(C), qualunque sia la $F(x, y, x', y')$ (purchè soddisfacente alle condizioni iniziali da noi poste al n. 1), risulte-

rebbe *sempre* funzione continua. Ed infatti, come ho altrove dimostrato [1], sta la seguente proposizione: « Se la curva C′ tende alla C, in modo che differenza delle rispettive lunghezze tenda a zero, è

$$\lim_{C' \equiv C} \int_{C'} F\, ds = \int_C F\, ds\,;$$

e ciò vale, solo che la F soddisfi alle condizioni poste al principio del n. 1 » Possiamo anzi aggiungere [2] che la condizione del tendere allo zero della differenza delle lunghezze delle curve C′ e C, è non solo sufficiente, bensì anche necessaria, affinchè si abbia l'uguaglianza precedente, tutte le volte che l'invariante di Weierstrass si mantenga diviso da zero sulla C e per qualunque coppia x', y' tale che sia $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Questo mostra, in particolare, che neppure aggiungendo una limitazione sulla lunghezza delle curve da considerare (limitazione che si presenta spontaneamente per es., in molti problemi isoperimetrici) è possibile di render continui, secondo la definizione del n. 1, gli integrali relativi al caso *regolare* (pei quali l'invariante di Weierstrass si mantiene, precisamente, sempre diverso da zero).

4. Peraltro, la definizione di continuità ora proposta non presenta di fronte ai problemi di calcolo delle variazioni, quel medesimo valore che la continuità delle funzioni di variabili numeriche ha rimpetto alle questioni di massimo e minimo. Ciò che, invece, sembra rispondere alle esigenze del calcolo delle variazioni, è il concetto di *semicontinuità*, che Baire ha fissato per le funzioni del calcolo ordinario e che io ho già cercato di introdurre nelle questioni che qui ci occupano.

Il concetto di *semicontinuità* si ha analizzando quello di continuità, preso, nel caso nostro, nella forma del n. 1, scindendolo nei suoi due elementi costitutivi.

Diremo che la J(C) è *semicontinua inferiormente* (*superiormente*) sull'elemento C, se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C′ di A, appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C, si abbia

$$J(C') - J(C) > \varepsilon \quad (< \varepsilon).$$

Come è evidente, se la J(C) è semicontinua, tanto inferiormente quanto superiormente, è anche continua nel senso del n. 1.

Ciò che è essenziale, circa il valore della semicontinuità, è questo: le funzioni semicontinue inferiormente (superiormente) si comportano, di fronte

[1] *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni*, Nota II (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 1° sem.).

[2] Cfr. L. Tonelli, *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*. Nota III (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 2° sem.).

ai minimi (massimi), proprio come le funzioni continue. Si tratta però d vedere se questo concetto di semicontinuità porti o no a scartare i casi più interessanti del calcolo delle variazioni. Qui la risposta è confortante. Si può, infatti, dimostrare [1] che, se l'invariante di Weierstrass, F_1, si mantiene sempre diverso da zero (caso detto *regolare*), J(C) è una funzione semicontinua: e precisamente, semicontinua inferiormente, se è $F_1 > 0$; superiormente, se $F_1 < 0$.

5. Questa semicontinuità fu già da me [2] applicata alla dimostrazione dell'esistenza del minimo nel caso in cui siano verificate entrambi le condizioni $F > 0$, $F_1 > 0$; ed anche nell'altro, $F > 0$, $F_1 \geq 0$. Qui mi propongo di mostrare come da essa scenda immediatamente anche l'esistenza del minimo nel così detto *problema discontinuo*, in quello cioè nel quale la funzione F, che si tratta di integrare, presenta delle discontinuità nel campo in cui la si considera.

Tale problema ha un'importanza pratica, perchè ad esso conducono diverse questioni di fisica-matematica, delle quali citeremo solo quella relativa alla propagazione della luce attraverso un mezzo composto di parti eterogenee, per le quali l'indice di rifrazione presenti delle discontinuità.

Supponiamo, per semplificare il ragionamento, che ci sia una sola discontinuità : vale a dire, che il campo A, che supporremo limitato, sia diviso da una linea Γ in due altri $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, nei quali si abbia, rispettivamente,

$$F = F^{(1)} \quad , \quad F = F^{(2)},$$

dove queste $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ saranno funzioni aventi, ciascuna nel proprio campo, le stesse proprietà enunciate per la F al principio del n. 1. Si supponga, inoltre, che si abbia sempre (eccettuate le solite coppie x', y' verificanti l'uguaglianza $x'^2 + y'^2 = 0$)

$$F^{(1)} > 0 \ , \ F_1^{(1)} > 0 \quad ; \quad F^{(2)} > 0 \ , \ F_1^{(2)} > 0 .$$

Presi due punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, rispettivamente in $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$, si consideri una curva (continua e rettificabile) α, congiungente i punti detti e composta di due archi $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, il primo dei quali sia contenuto in $A^{(1)}$ (contorno compreso), e il secondo in $A^{(2)}$ (pure contorno compreso).

Dico che, fra tutte le possibili curve α, ve n'è una almeno per la quale

$$\int_{\alpha} F\, ds = \int_{\alpha^{(1)}} F^{(1)} ds + \int_{\alpha^{(2)}} F^{(2)} ds$$

è minimo (assoluto).

[1] L. Tonelli, *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1913, 1° sem.).

[2] loc. cit.

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$ una successione minimizzante, tale cioè che $\int_{\alpha_n} \mathrm{F}\, ds$ tenda al limite inferiore i dell'integrale della F esteso a tutte le possibili curve α. Osserviamo, prima di proseguire, che l'esistenza di questa successione è del tutto indipendente dal postulato di Zermelo, come risulta da una mia Nota: *Sul valore di un certo ragionamento* [1].

Indicheremo con O_n il punto di α_n che divide questa stessa curva nelle sue due parti $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}$. O_n giace necessariamente su Γ, e la successione $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \ldots, \mathrm{O}_n, \ldots$ ammette (su Γ) uno o più punti limiti. Sia O uno di essi. Possiamo, senz'altro, ammettere che sia addirittura $\mathrm{O} = \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{O}_n$. Le lunghezze delle α_n sono tutte inferiori ad un numero fisso, perchè è sempre $\mathrm{F}^{(1)} > 0$, $\mathrm{F}^{(2)} > 0$. Tali curve ammettono perciò una o più curve limiti. Se $\bar{\alpha}$ è una di esse, questa $\bar{\alpha}$ dovrà passare per O, e sarà la curva a cui tenderà una successione $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots,$ estratta dalla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. E avremo, per la *semicontinuità inferiore*,

$$\int_{\bar{\alpha}^{(1)}} \mathrm{F}^{(1)}\, ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(1)}} \mathrm{F}^{(1)}\, ds$$

$$\int_{\bar{\alpha}^{(2)}} \mathrm{F}^{(2)}\, ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(2)}} \mathrm{F}^{(2)}\, ds\,,$$

e quindi

$$\int_{\bar{\alpha}} \mathrm{F}\, ds \leq \operatorname*{Minlim}_{n_r=\infty} \int_{\alpha_{n_r}} \mathrm{F}\, ds = i\,,$$

donde

$$\int_{\bar{\alpha}} \mathrm{F}\, ds = i\,,$$

e $\bar{\alpha}$ è una curva *minimum*.

Le condizioni poste, relative all'invariante di Weierstrass, $\mathrm{F}^{(1)} > 0$, $\mathrm{F}^{(2)} > 0$, non sono essenziali e possono sostituirsi con le altre $\mathrm{F}^{(1)} \geq 0$, $\mathrm{F}^{(2)} \geq 0$.

Possiamo aggiungere, terminando, che, anche nel caso attuale, dalla semicontinuità in J(C) scende il teorema di Osgood, il cui enunciato e le cui dimostrazioni sono identici a quelli dei nn. 19 e 20 del mio citato lavoro: *Sul caso regolare ecc.*

[1] Atti R. Acc. delle scienze, di Torino, 1913.

Geografia fisica. — *Prima relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale,* trasmessa al PRESIDENTE dal Capo della spedizione dott. FILIPPO DE' FILIPPI.

Il Presidente BLASERNA dà comunicazione della seguente lettera, con la quale il dott. DE FILIPPI accompagna la Relazione più sotto riportata:

Skardu, Baltistan, 5 novembre 1913.

Illustre Professore,

Sono lieto di mandarle per i Lincei una breve relazione del lavoro a tutt' oggi compiuto dalla Spedizione scientifica alla quale l'Accademia ha accordato il suo appoggio morale e finanziario.

Possiamo esser soddisfatti dei frutti raccolti in queste poche settimane di attività, i quali fanno sperare un risultato finale non indegno delle lusinghiere prove di fiducia accordate alla impresa fin dal suo inizio.

Mi è grata l'occasione per trasmetterle, insieme cogli ossequî dei componenti la spedizione, i miei più cordiali saluti e l'espressione della mia devozione.

Dott. FILIPPO DE FILIPPI.

***

La spedizione asiatica organizzata dal dott. De Filippi ha ora felicemente raggiunto Skardu, nel Baltistan, dove si propone di svernare, ed invia il seguente resoconto del lavoro già compiuto e di quello in corso.

La spedizione, dopo avere eseguito le necessarie osservazioni nel Regio Istituto idrografico di Genova, stazione base delle misure gravimetriche, si imbarcò a Marsiglia l' 8 agosto, giunse a Bombay il 22, e ripartì lo stesso giorno in ferrovia. Il prof. Dainelli, il ten. Antilli ed il marchese Ginori, colla guida Petigax, si recarono direttamente nel Kashmir, mentre il dottore De Filippi saliva a Simla, la residenza estiva del Governo dell' India, per prendere accordi intesi a coordinare il lavoro della spedizione con quello dei varî dicasteri tecnici indiani, ed il comandante Alessio, insieme col prof. Abetti, si rivolgeva a Dehra Dun, dove ha sede l' Ufficio trigonometrico e geodetico dell' India. Quivi, fra il 25 agosto ed il 4 settembre, essi eseguivano, cogli strumenti della spedizione una completa serie di osservazioni gravimetriche e magnetiche. Vennero anche fatte in questi giorni le prime esperienze di trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo con Delhi, Simla e Lahore, per mezzo della stazione ricevitrice di cui è fornita la spedizione.

L' 8 settembre, tutta la comitiva era riunita a Srinagar nel Kashmir, dove fra il 12 ed il 19 l'Alessio e l'Abetti eseguivano la stazione gravimetrica e magnetica. Due giorni dopo, venne iniziato il viaggio in carovana,

ed il 26 si attraversò lo spartiacque imalaiano per il passo Zoji-La (3390 m.). Da questo punto fino a Skardu la marcia venne interrotta due volte per le osservazioni di gravità e di magnetismo. La prima stazione si fece a Dras (3090 metri), paesetto situato nella valle omonima, ai piedi del valico imalaiano; la seconda a Tolti (circa 2500 metri), piccolo villaggio balti nella valle dell'Indo. Gli osservatori riuscirono a creare le condizioni migliori per il loro lavoro, per modo che esso si potè eseguire col più rigoroso metodo scientifico e con tutte le garanzie di esattezza richieste da queste ricerche. Il cielo quasi sempre sereno ha finora permesso di compiere molto regolarmente le osservazioni astronomiche, sia quelle connesse colla gravimetria, sia quelle rivolte a determinare la latitudine e la longitudine delle stazioni.

Dovunque la spedizione si è fermata per qualche giorno, è stata montata la stazione meteorologica affidata al marchese Ginori, e ne vennero raccolti regolarmente i dati. Inoltre si è cercata ogni occasione per fare letture strumentali comparative, le quali, oltre ad essere un continuo controllo sul funzionamento degli apparecchi, potranno condurre ad interessanti conclusioni sui limiti di precisione dei varî strumenti, con speciale riguardo alle determinazioni altimetriche.

Queste fermate, e la lentezza della marcia, hanno dato al geologo prof. Dainelli occasione e possibilità di fare frequenti escursioni nel Kashmir e nelle valli del Dras e dell' Indo, e di raccogliere molti dati che lo hanno condotto a conclusioni nuove ed assai interessanti rispetto alla costituzione ed alla storia geologica della regione attraversata. Il materiale litologico raccolto viene man mano spedito in Italia.

Attivissima è pure stata l'opera del ten. Antilli, il quale, oltre a coadiuvare il prof. Dainelli nella documentazione fotografica per quel che riguarda la geologia, ha portato l' utile sussidio della fotografia ai lavori topografici, ed ha raccolto una buona illustrazione di luoghi e di genti.

La spedizione arrivò a Skardu il 25 ottobre, e si stabilì in due piccoli *bungalow*, utilizzando, per i laboratorii ed i magazzini, i locali del serai indigeno. Skardu, la capitale del Baltistan, è un piccolo villaggio sulle rive dell'Indo, a 2287 metri sul mare. L'alta valle dell'Indo, compresa fra Imalaia e Karakoram, generalmente angusta e profondamente intagliata fra coste montane ertissime, qui si apre in un vasto spiano coperto di ciottoli e di sabbie, nel mezzo del quale confluisce coll'Indo il fiume Shigas, nato da alcuni fra i più grandi ghiacciai del Karakoram.

Quattro giorni dopo l'arrivo, si poteva già eseguire una esperienza di molto interesse. L'Alessio e l'Abetti, avendo messo su la stazione radiotelegrafica ricevitrice, poterono nelle sere del 29 e del 30 ricevere con grande chiarezza e registrare i segnali di tempo radiotelegrafici trasmessi dalla stazione di Lahore, secondo uno schema prestabilito. Questa esperienza preliminare sarà seguita da una serie di trasmissioni di segnali di tempo in-

viati dalla stazione di Lahore e contemporaneamente ricevuti da Dehra Dun e dalla stazione della spedizione. Fino a che si sarà nella valle dell'Indo, che è compresa nella triangolazione dell'India, questi serviranno a calcolare differenze di longitudine con esattezza sufficiente per determinare, insieme colle osservazioni di latitudine, la deviazione della verticale. Più oltre, le dette segnalazioni permetteranno di determinare l'andamento dei cronometri e la longitudine dei luoghi nel rilevamento della regione sconosciuta che la spedizione si propone di esplorare nell'estate ventura. Rimane intanto dimostrata la possibilità di applicare questo metodo a stazioni di campagna anche se situate fra catene di altissimi monti.

Si sono già iniziati da parte del marchese Ginori i lanci di palloni piloti seguìti col teodolite, contemporanei a quelli eseguiti da varî osservatori indiani, secondo un piano concordato per lo studio delle correnti dell'alta atmosfera, che ha un interesse speciale in questa regione.

Infine, nei primi giorni di novembre, i membri della spedizione hanno fatto una escursione su per la valletta che sale al Burji-La ed all'altipiano Devsai, ed hanno scelto un piccolo ripiano a circa 4300 metri sul mare, dove si stanno ora trasportando il bagaglio da campo e quello scientifico, colla speranza di potervi fare, ad onta della stagione inoltrata, una stazione gravimetrica e magnetica, osservazioni sulla radiazione totale solare con pireliometri di vario modello, lanci di palloni piloti e lavori telefotografici.

Terminato questo lavoro, il gruppo tornerà a Skardu, per farvi le osservazioni di gravità e di magnetismo, la determinazione di longitudine e di latitudine, varî lavori topografici e studî meteorologici ed aerologici; mentre il prof. Dainelli continuerà le sue escursioni geologiche, fino a che non glie lo impediranno le nevi invernali, ormai prossime.

Il materiale scientifico non ha subìto alcun guasto nel lungo e complicato viaggio, ed è in perfette condizioni; e tutti i membri della spedizione hanno sempre goduto ottima salute. In tutto il suo cammino la spedizione è stata dovunque accolta col massimo favore ed aiutata in tutti i modi dalle Autorità locali e dalle popolazioni.

Chimica. — *La distillazione della nitroglicerina a bassa temperatura* [1]. Nota di D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, presentata dal Socio E. Paternò.

Da un esame del gran numero di lavori finora pubblicati sulle proprietà fisiche della nitroglicerina, non risulta che alcuno sia mai riuscito a preparare una sensibile quantità di liquido per distillazione. Ciò si spiega col fatto che, mentre a bassa temperatura la nitroglicerina ha una tensione di vapore piccolissima, che noi abbiamo potuto in un precedente lavoro [2] stabilire come inferiore a 1/10.000 di millimetro alla temperatura di 20°, non si può d'altra parte scaldare il liquido a temperature anche di poco elevate, senza determinarne l'alterazione.

Un tentativo di distillazione a 70° nel vuoto più spinto, ma senza speciali disposizioni, non ci diede, come già avemmo occasione di riferire, risultati incoraggianti; poichè si raccolse una quantità piccolissima di distillato, nè parve opportuno di prolungare ulteriormente l'operazione, anche perchè si ebbe il sospetto che i vapori prodotti si decomponessero nello spazio tenuto a 70°, prima di raggiungere il condensatore.

In un recente lavoro di Snelling e Storm [3] la nitroglicerina venne sottoposta a forti riscaldamenti sotto la pressione ordinaria; e fu così osservato che a circa 145° la decomposizione del liquido è così rapida da manifestare gli aspetti di una vera ebollizione. Tenendo a lungo costante la temperatura del liquido, la cui decomposizione è accompagnata da sviluppo di calore, i due autori riuscirono a raccogliere, in un recipiente connesso col serbatoio della nitroglicerina, una notevole quantità di distillato, che appariva diviso in due strati: uno aveva l'aspetto di nitroglicerina, l'altro era costituito da acido nitrico diluito. La prima parte, fortemente colorata in giallo-verde, venne accuratamente disacidificata, lavata e disseccata; e rivelò, al nitrometro un contenuto in azoto del 13,5 %; mentre la nitroglicerina adoperata aveva primitivamente un contenuto in azoto del 18,45 %. Più profonde modificazioni rivelò l'esame del residuo non distillato, che aveva anche perduto le energiche proprietà esplosive.

È chiaro da tutto ciò che la prova fatta da Snelling e Storm non può considerarsi come una riuscita distillazione della nitroglicerina, poichè il

(1) Lavoro eseguito nel «Laboratorio chimico per le sostanze esplosive». Ministero dell'Interno. - Roma.

(2) Chiaraviglio e Corbino, Gazzetta chimica, tom. XLIII, 2ª, pag. 390, an. 1913.

(3) Snelling e Storm, Zeitschr. f. d. Ges. Schiess- und Sprengstoffwesen, tom. 8, pag. 1, an. 1913.

prodotto e il residuo della distillazione risultano evidentemente da un complesso di composti sottonitrati della glicerina.

Era quindi necessario di procedere per ben altra via, e tentare la distillazione a freddo, tra la temperatura ordinaria e un refrigerante a temperatura più bassa, sotto rarefazioni grandissime, e con opportuni accorgimenti perchè, non ostante la piccolissima tensione del vapore e la sua facile decomponibilità, esso affluisse in misura sensibile verso il condensatore. Occorreva perciò costruire un apparecchio nel quale si potessero praticare le rarefazioni estreme che le attuali macchine a vuoto son capaci di produrre, e far sì che il vapore, svolgentesi a temperatura ordinaria, non incontrasse alcun ostacolo nell'avviarsi verso il condensatore.

Dopo diversi tentativi ispirati da questi criterî, siamo pervenuti alla costruzione dell'apparecchio della fig. 1, col quale ci è stato possibile distillare circa 10 grammi di nitroglicerina tra le temperature di 25° e 0°, nella durata di circa 44 ore.

L'apparecchio è costituito essenzialmente da un pallone di vetro, C (fig. 1), a largo collo, al quale può applicarsi un grande tappo a smeriglio, E, la cui tenuta è assicurata dalla chiusura a mercurio F. Il tappo E sostiene un sistema risultante da una capsula in vetro, A, per contenere la nitroglicerina (circa 16 grammi), da un riscaldatore elettrico in spirale di platino (M) chiusa entro una scatola a doppio fondo, e da un termometro (non segnato in figura) di cui il bulbo pesca nella nitroglicerina della capsula. I capi della spirale seguendo i tubi BB GG passano attraverso al grande tappo di vetro che chiude il collo del pallone, e si può così, per mezzo di una corrente elettrica esattamente graduabile, portare la temperatura del liquido al punto voluto. Il pallone è immerso per circa due terzi in una miscela di acqua e ghiaccio, che ne mantiene la parete a circa 0°, mentre la corrente elettrica nella spirale permette che la temperatura del liquido si conservi prossima a 25°.

Il pallone, per mezzo di una tubatura innestata nel tappo, attraverso al rubinetto con chiusura di mercurio H, può mettersi in comunicazione con una pompa Gaede a mercurio (munita, come al solito, del palloncino con anidride fosforica per il disseccamento) e con un provino di Mac-Leod. Si potevano così stabilire o interrompere le comunicazioni con la pompa, il disseccante e il provino; mentre, per la grande cura spesa a migliorare le chiusure, fu possibile di mantenere nel pallone una rarefazione gassosa inferiore a 1/10.000 di millimetro, anche dopo aver interrotto la comunicazione con la pompa. Restava, come è naturale, la pressione dei vapori di mercurio; essa era ridotta a quella che corrisponde a 0°, e un continuo afflusso di vapori di mercurio era impedito dal fatto che le comunicazioni con la pompa e il provino erano normalmente interrotte.

Si adoperò per l'esperienza nitroglicerina di fabbricazione corrente, che resisteva a 15 minuti primi, ad una temperatura di 80° C., senza decomporsi

(saggio Abel); era leggerissimamente giallastra. Durante la distillazione fu sorvegliato con cura l'andamento del termometro, e regolata la corrente nella spirale in modo che la temperatura del liquido si mantenesse, come si è detto, prossima a 25°. Occorreva pure a lunghi intervalli ristabilire la comunica-

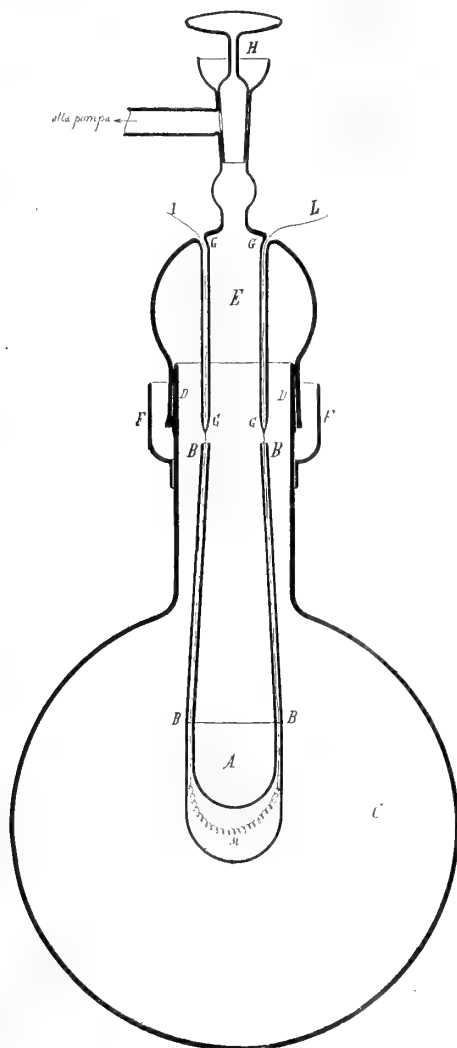



Fig. 1.

zione con la pompa, e aspirare con questa le piccole quantità di gas rivelate dal Mac-Leod, e che provenivano in parte dalle chiusure, in parte anche dalla lenta decomposizione del liquido o dei suoi vapori. Si procurò, così, che la pressione residua fosse sempre inferiore a 1/10.000 di mm.

La condensazione si produceva sulla parete del pallone tenuta a 0°, dove andavan formandosi minutissime goccioline molto fitte, e che si andavano

assai lentamente ingrossando. A poco a poco il distillato si andò raccogliendo per la maggior parte al fondo del pallone, conservando lo stato liquido, non ostante che la temperatura fosse inferiore a quella di solidificazione; ciò era dovuto alla nota difficoltà di congelamento che la nitroglicerina presenta.

La distillazione fu interrotta quando nella capsula non vi era più che un terzo circa del liquido primitivo. Raccolto il distillato, si constatò che esso era costituito da un liquido perfettamente limpido e incoloro, mentre quello rimasto nella capsula era di un giallo un poco più intenso che non il liquido primitivo.

Nell'esame preliminare del liquido distillato la leggera variazione di tinta da quella del liquido primitivo e del residuo di distillazione fu l'unica differenza che potemmo osservare. Le altre proprietà sembrano rimaste le stesse. Così, ad esempio, la resistenza al calore fu sempre di 15′ a 80°, tanto nel liquido distillato, quanto nel residuo.

Ci proponiamo di proseguire le esperienze, per stabilire un più esatto confronto fra le proprietà della nitroglicerina ordinaria e quelle della distillata; e inoltre per dedurre, se ci sarà possibile, la tensione di vapore a diverse temperature, misurando la velocità del processo di distillazione.

I dati che attualmente possediamo, ci permettono già di fare un calcolo approssimativo sul valore della pressione a 25°, utilizzando la formola proposta recentemente da Langmuir [1] nelle sue ricerche sulla tensione di vapore del tungsteno.

Detta m la quantità di sostanza evaporata da 1 cm² del liquido in un secondo, nelle condizioni per cui si può ammettere che ogni molecola partita dalla superficie del liquido, non incontrando ostacoli nel suo cammino, finisca col raggiungere la superficie condensante: e indicando con T la temperatura assoluta, con M il peso molecolare e con p la pressione del vapore corrispondente alla temperatura T, si ha

$$p = \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}\, m\, .$$

In misure assolute C. G. S. si può porre R (costante dei gas) eguale a 83×10^6; con ciò p risulta misurata in dine per centimetro.

Coi dati delle nostre esperienze, essendo 10 grammi la quantità di liquido evaporato in 44 ore, e da una superficie di circa 10 cm², si può calcolare che la pressione a 25°, ridotta in millimetri di mercurio, equivale a 1,2 diecimillesimi. E poichè la temperatura ha notevole influenza su queste pressioni di vapore molto basse (così, per il mercurio, l'aumento di 10° nella temperatura in vicinanza di 20° basta a triplicare la pressione), non sarà azzardato il dedurre che a 20° quella pressione sia inferiore a un diecimillesimo di millimetro, come appunto avevamo potuto affermare nel lavoro sopra citato.

[1] Irving Langmuir, The Phys. Review, t. 11, pag. 329, nov. 1913.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Socio A. RÒITI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle proprietà dell' iodio come solvente crioscopico.* Nota di F. OLIVARI [1], presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

4. Traendo profitto della circostanza che nell'alogeno fuso sono facilmente solubili gli elementi del 6° gruppo — S, Se, Te —, io ho studiato, qualche anno fa, il contegno crioscopico di questi metalloidi in soluzione iodica, giungendo a risultati numerici che vennero in seguito controllati da Beckmann [2].

La tabella seguente riassume alcune nuove misure:

TAV. IV.

conc. %	Δ	PM(K = 213)	conc. %	Δ	PM
	$S_8 = 256$			$Se_2 = 158,4$	
			0.1520	0.29	111.7
0.2894	0.33	184	0.3274	0.60	116.2
0.6138	0.645	202.7	0.5106	0.905	120.2
0.8172	0.825	211	1.028	1.67	131.1
			(5.038)	(6.87)	(156.2)
1.068	1.025	222.1		Te = 127.6	
1.376	1.24	236.5	[3] 0.2361	0.345	145.8
2.134	1.81	251.2	0.4215	0.61	147.2
3.167	2.565	257.5	[4] 0.1210	0.192	134.2
4.730	3.85	261.7	0.4766	0.72	141.0

Lo zolfo dimostra in iodio una grandezza molecolare dell'ordine S_8; tuttavia, in soluzione diluita assume valori sensibilmente più piccoli.

Le depressioni prodotte dal selenio corrispondono ad un peso molecolare compreso fra Se e Se_2; solo in soluzioni molto concentrate si ottengono valori prossimi alla molecola biatomica.

Il tellurio, la cui miscela col solvente è accompagnata da fenomeni termici evidentissimi (sviluppo di calore), fornisce abbassamenti che si avvicinano a quelli calcolati per Te = 127,6. Questi valori crioscopici si spie-

[1] V. questi Rendiconti vol. precedente XXII, 2° sem. 1913, pag. 697.
[2] Z. anorg. Chem., 63, pag. 63 (1909).
[3] « Tellur in Stangen » Kahlbaum.
[4] « Tellur puriss. subl. in Nadeln » T. Schuchardt.

gano, in gran parte, ricordando che, per fusione reciproca dei due elementi, si formano combinazioni del tipo $Te\,I_x$ (1).

Meno agevole appare invece la interpretazione dei resultati relativi allo zolfo (soluzioni diluite) e specialmente al selenio. Infatti, poichè la grandezza molecolare di questi metalloidi in mezzi indifferenti è normalmente ottoatomica, la minore complessità ottenuta in iodio sembrerebbe indicare l'intervento di un'azione chimica tra solvente e soluto. Per contro lo studio completo degli equilibrî di congelamento tra i metalloidi e l'iodio esclude la esistenza di ioduri di zolfo e di selenio, capaci almeno di cristallizzare dalla fase liquida (2).

L'argomento del quale da tempo mi occupo, richiede ulteriori esperienze e merita una discussione più ampia di quella che mi sarebbe consentita dalla brevità di questa Nota; perciò mi riprometto di trattarne *ex professo* in un prossimo lavoro, tanto più che il prof. Beckmann ha dedicato allo stesso studio una recentissima Memoria, dal titolo: « Verhalten von Jod zu Schwefel, Selen und Tellur » (3). Le ricerche crioscopiche ed ebullioscopiche di questo autore, di cui mi limito qui a riferire i risultati sperimentali per il confronto coi miei, provano:

1°) che lo zolfo in soluzione iodica, possiede essenzialmente la molecola S_8, ma non si rileva alcun andamento speciale a bassa concentrazione;

2°) che il selenio viene scomposto sino alle molecole Se_2 e Se, non tanto in virtù della temperatura a cui si sperimenta, quanto per una influenza specifica del solvente;

3°) che il tellurio e l'iodio reagiscono fra di loro, con formazione di molecole le quali contengono meno di Te_2.

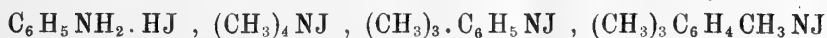
5. Per le determinazioni relative agli ioduri mi sono servito di uno dei consueti dispositivi che permettono di operare in ambiente perfettamente secco, essendo molti di questi sali anidri — o i rispettivi poliioduri — in alto grado igroscopici.

(1) Berzelius, Ann. de Chemie e phys., 58 (1835); Metzner, ivi, (7) 1898; Wheeler, Z. für anorg. Chem. 3 (1893); Gutbier e Hury, ivi, 32 (1902); Jaeger e Menke, Z. für anorg. Chem., *75*, pagg. 241, e *77*, pag. 320 (1913).

(2) Cfr. Pellini e Pedrina, Rend. Acc. Lincei, XVII, serie 5a, pag. 78 (1908); Olivari, Rend. Acc. Lincei, XVII, 2° sem., serie 5a, pag. 512 (1908). Forse nei miscugli fusi S — J e Se — J (specialmente in quest'ultimo caso) v'è luogo a supporre l'esistenza di composti parzialmente dissociati, i quali, per raffreddamento, anzichè separarsi allo stato solido, si scompongono in un miscuglio meccanico dei componenti. Cfr. la mia Nota « Studî sull'analisi termica », III, Rend. Soc. chim. ital., 1911.

(3) Z. für anorg. Chem., Band. 80, pag. 221 (1913).

Dai risultati ottenuti e dalla loro rappresentazione grafica (tav. V e fig. 2) emerge che i pesi molecolari degli ioduri alcalini (KJ, RbJ, NH_4J) e degli ioduri ammonici organici

$$C_6H_5NH_2 . HJ \ , \ (CH_3)_4NJ \ , \ (CH_3)_3 . C_6H_5NJ \ , \ (CH_3)_3C_6H_4CH_3NJ$$

presentano in iodio fuso un andamento anormale caratteristico e uniforme: in soluzioni diluitissime, i pesi molecolari sono molto prossimi ai normali;

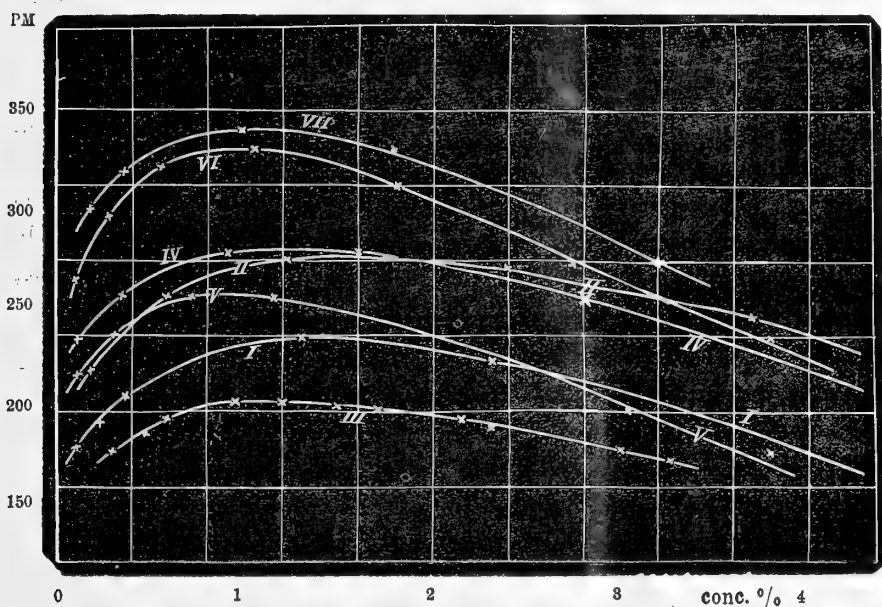
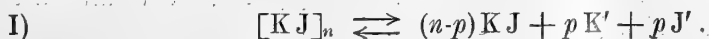



Fig. 2.

aumentano rapidamente colla concentrazione sino ad un massimo poi decrescono con continuità e, a concentrazioni elevate, assumono talvolta valori inferiori al teorico.

La discussione di questo interessante decorso dei pesi molecolari riesce particolarmente istruttiva nel caso dell'ioduro potassico, il solo sale di cui si conosca anche la conducibilità elettrica in iodio fuso. In base alle già citate esperienze di Lewis e Wecher, si calcola che, alla concentrazione in cui KJ raggiunge il valore massimo del peso molecolare (intorno all' 1 %), la sua conducibilità specifica sia paragonabile a quella delle migliori soluzioni acquose saline normaldecime. Ciò autorizza a ritenere che l'ioduro potassico, sciolto in iodio fuso, sia contemporaneamente dissociato e polimerizzato:

$$\text{I)} \qquad [KJ]_n \rightleftarrows (n\text{-}p)KJ + pK' + pJ' .$$

Il fenomeno non è nuovo; si può anzi affermare che l'esistenza di molecole polimere degli elettroliti rappresenti il caso generale delle soluzioni conduttrici non acquose, e porga una plausibile spiegazione del fatto che per esse non si riscontra generalmente nessuna identità fra il valore del grado di dissociazione calcolato coi metodi osmotici e quello dedotto dalla conducibilità elettrolica (Walden).

Il presentarsi di un massimo nella serie dei pesi molecolari, oltre il quale la complessità del soluto apparentemente decresce coll'aumentare della concentrazione, si spiega poi considerando la verosimile formazione di polijoduri nel fuso [1]:

$$\text{II)} \qquad KJ + nJ_2 \rightleftarrows KJ_{2n+1}.$$

Infatti, ammessa in seno al liquido un'associazione molecolare del solvente al soluto (solvatazione), la quale non alteri il numero delle particelle osmoticamente attive, è facile dimostrare che i pesi molecolari appariranno minori dei reali e tenderanno continuamente a diminuire col crescere della concentrazione. Tale andamento, di entità trascurabile in soluzioni diluite, diviene in modo speciale manifesto nelle soluzioni concentrate.

I. KJ; II. RbJ; III. NH_4J; IV. $C_6H_5NH.HJ$; V. $(CH_3)_4NJ$; VI $(CH_3)_3C_6H_5NJ$; VII. $(CH_3)_3C_6H_4CH_3NI$.

TAV. V.

conc. %	Δ	PM
	I. KJ = 166	
0.1092	0.128	181.6
0.2351	0.26	181.6
0.3760	0.385	192.6
1.321	1.18	208.0
2.302	2.370	224.9
2.760	2.70	217.7
2.918	5.95	210.7
3.725	4.11	193.1
4.541	5.50	177.4
4.812	5.78	177.0
	2,3 % KJ + HgJ_2	
0.5197 (HgI_2)	0.15	737.9
1.157	0.33	746.6
3.509	1.00	747.4

conc. %	Δ	PM
	IV. $C_6H_5NH_2.HJ$ = 221	
0.1204	0.108	237.5
0.3501	0.288	259
0.8879	0.665	284
1.636	1.215	286.8
2.844	2.32	261.1
4.756	4.73	214.1
	V. $(CH_3)_4N.J$ = 201	
0.1116	0.11	216.1
0.2792	0.245	242.7
0.7122	0.58	261.5
1.140	0.93	261.2
1.837	1.606	244.6
3.087	3.25	202.3
3.789	4.57	177

[1] Abegg e Hamburger, Z. für anorg. Chem., Bd. 50, pag. 403; Olivari, Rend. Acc. Lincei, vol. XVII, 2° sem., pag. 717 (1908).

Segue: Tav. V.

conc. %	Δ	PM	conc. %	Δ	PM
			VI. $(CH_3)_3\,C_6H_5NJ = 263$		
II. $RbJ = 212.5$			0.0948	0.075	268
0.1786	0.17	223	0.2665	0.185	305.7
0.5859	0.48	260	0.5444	0.35	331.3
1.232	0.93	282.2	1.068	0.67	121.5
2.393	1.85	275.6	1.816	1.215	318.4
3.702	3.18	248			
4.582	4.30	227	2.711	2.10	283
			3.830	3.385	241.1
III. $NH_4J = 145$			4.903	4.98	209.5
0.6832	0.725	200.7	6.537	8.18	170
1.711	1.81	201.3	7.793	11.28	147.1
2.141	2.32	196.6			
2.975	3.48	182.1			
			VII. $(CH_3)_3\,C_6H_4(CH_3)N.J = 277$		
0.3199	0.38	179			
0.5413	0.60	192.2	0.1784	0.124	306.5
0.9328	0.97	204.9	0.3656	0.235	331.4
1.486	1.56	203	0.9749	0.59	352
2.308	2.57	191.3	1.774	1.11	340.5
3.249	4.06	170.4	3 265	2.50	278.2

Ma nel nostro caso la sostanza sciolta è un elettrolita e, di più, è anche in parte polimerizzata; ora, il crescere della concentrazione, favorendo il costituirsi delle molecole neutre e polimere del soluto, produrrà per tale riguardo un aumento dei pesi molecolari antagonistico alla diminuzione cagionata dalla solvatazione. Inoltre l'aumento sarà in particolar modo evidente nelle soluzioni diluite, poichè è noto che le curve di dissociazione tendono a divenire orizzontali.

Componendo le due influenze, potrà darsi che, per opportuni valori delle costanti relative agli equilibrî I e II, prevalga in soluzioni diluite l'aumento dei pesi molecolari colla concentrazione, dovuto al retrocedere della dissociazione ionica e molecolare del soluto; e in soluzioni concentrate prevalga invece la diminuzione indotta dalla combinazione col solvente. E così la curva dei pesi molecolari presenterà un massimo [1].

Non insisteremo ulteriormente su queste considerazioni di carattere orientativo: ci basti concludere che lo stato dello ioduro potassico (e, verosimilmente, anche quello degli altri ioduri) in soluzione nell'iodio fuso è caratterizzato sia da dissociazione e polimerizzazione contemporanee, sia dalla formazione di complessi col solvente (poliioduri).

Beckmann, sperimentando sugli ioduri di potassio, di sodio, di litio, di rubidio e di cesio, si limita a constatare l'esistenza di molecole associate anche al punto di ebollizione dello iodio (184°); naturalmente, ciò esclude che l'anomalia osservata possa attribuirsi a fenomeni di isomorfismo,

[1] Cfr. Jones, « Hydrates in acqueous solution », Carnegie Institution (1907); Walden, Z. für anorg. Chem., 30, pag. 145 (1902), e Z. für physik. Chem., 55, pag. 321 (1906).

Chimica-fisica. — *La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione.* Nota di M. PADOA e G. TABELLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *I sistemi binarî cianamide-acqua, cianamide-urea e cianamide-diciandiamide* (¹). Nota di M. PRATOLONGO, presentata dal Socio A. MENOZZI.

In una serie di ricerche, di cui ho dato conto in una Nota precedente (²), ho fatto oggetto di studio il comportamento della cianamide quale solvente crioscopico. Allo scopo di giungere ad una più esatta conoscenza del comportamento reciproco dei composti studiati, mi sono indotto, di fronte alle notevoli anomalie di carattere associativo, che sono emerse dalle ricerche crioscopiche, a completare lo studio dei sistemi binarî *cianamide-acqua, cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide*. I risultati di tale ricerca sono oggetto della presente Nota.

Per tutti e tre i sistemi studiati, la ricerca venne limitata all'esame delle curve di congelamento. Le determinazioni vennero eseguite seguendo i metodi consueti. Le curve di congelamento del sistema *cianamide-acqua*, nel quale più notevoli si presentano le anomalie crioscopiche di carattere associativo, vennero determinate con termometro Beckmann al centesimo di grado; quelle dei sistemi *cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide*, con termometro al decimo.

Nello studio dei sistemi *cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide* la ricerca ha naturalmente dovuto esser limitata al campo di stabilità della cianamide, il cui limite superiore può porsi, nelle condizioni sperimentali delle ricerche presenti, fra 90° e 100° (³). Nei diagrammi che seguono, le linee tratteggiate indicano l'andamento probabile delle curve di congelamento a temperature superiori a quelle che segnano il limite di stabilità della cianamide.

Per quanto ha riguardo alla preparazione e alla purezza dei prodotti adoperati, mi richiamo alla mia Nota precedentemente citata.

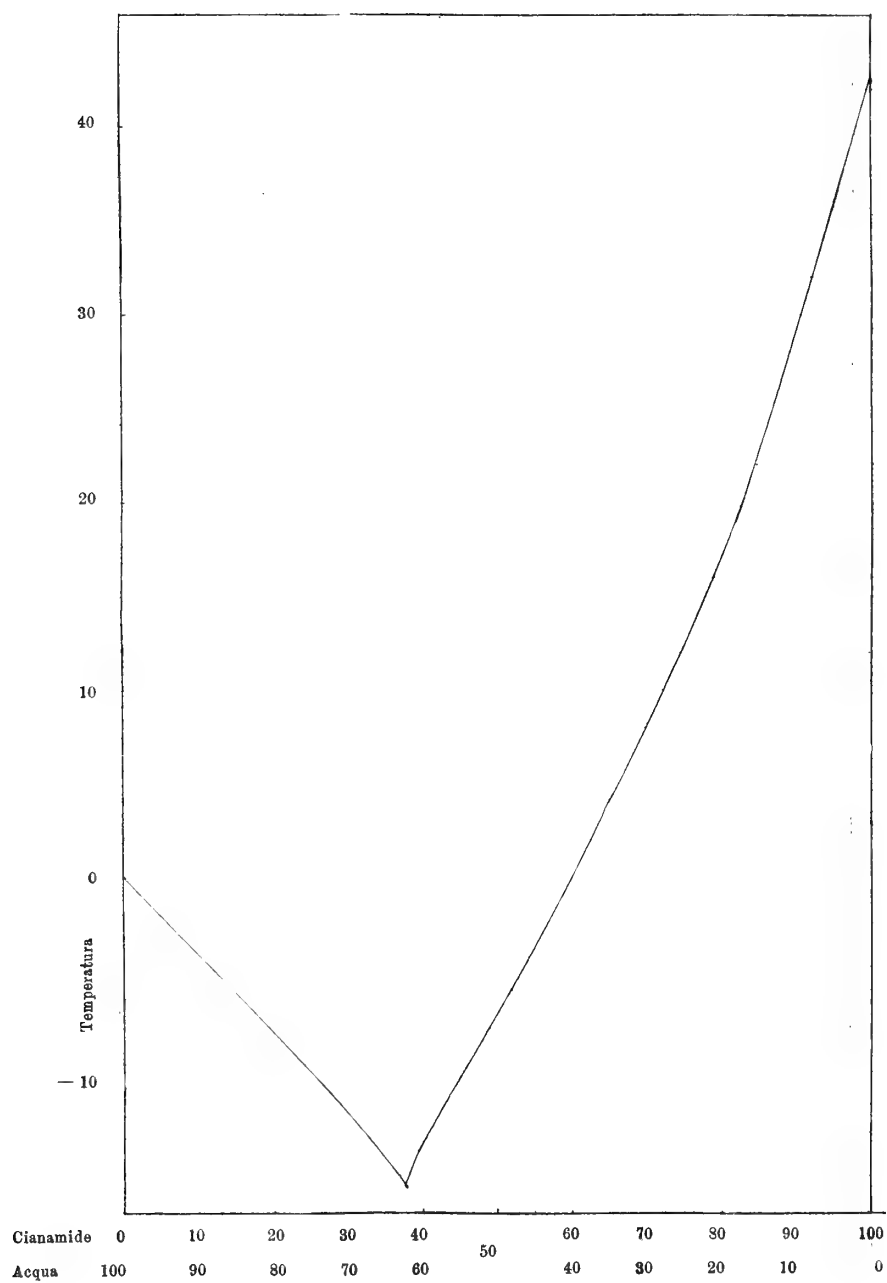
(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica agraria della R. Scuola superiore di agricoltura, di Milano.

(²) Questi Rendiconti.

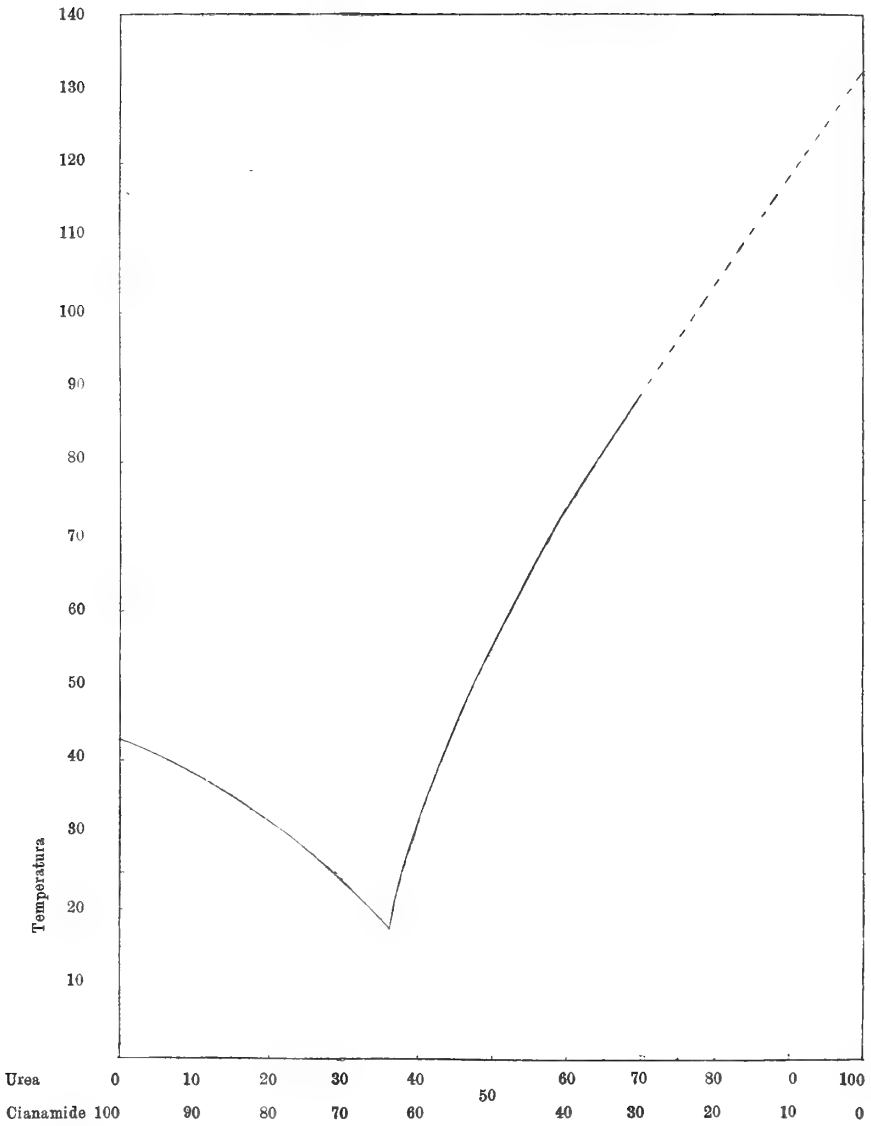
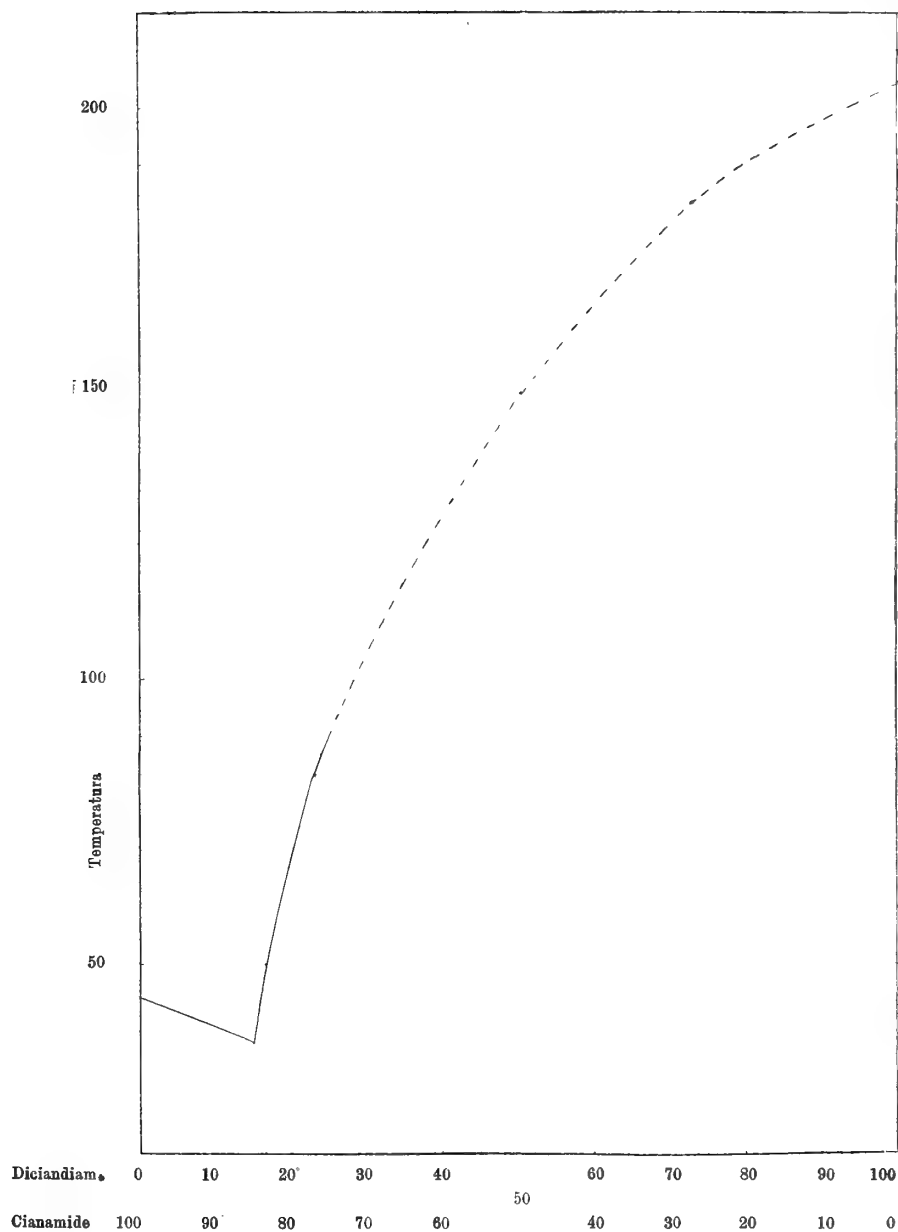
(³) Giova notare, (ciò che sarà oggetto di una Nota successiva) che la trasformazione della cianamide solida procede lentissima a temperatura ordinaria; e anche alla temperatura di fusione, è solo sensibile dopo alcuni giorni. Nel limite di alcuni minuti, la velocità di trasformazione è ancora trascurabile a 80°.

I risultati delle ricerche compiute sono raccolti nei prospetti che seguono:

I. Sistema *Cianamide-Acqua.*

N. d'ordine	Acqua %	Cianamide %	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	0.00	Ghiaccio
2	98.62	1.38	— 0.62	»
3	97.42	2.58	— 1.13	»
4	96,62	3.38	— 1.48	»
5	93.69	6.31	— 2.60	»
6	90.58	9.42	— 3.96	»
7	85 02	14.98	— 6.19	»
8	81.60	18.40	— 7.58	»
9	75.30	24.70	— 10.19	»
10	73.91	26.09	— 10.74	»
11	71.38	28.62	— 11.88	»
12	69.10	30.90	— 12.72	»
13	66.68	33.32	— 13.93	»
14	63.14	36.86	— 15.39	»
15	61,25	38.75	— 15.59	Cianamide
16	59.81	40.19	— 14.39	»
17	58.33	41.67	— 13.23	»
18	56.73	43.27	— 11.80	»
19	55.01	44.99	— 10.76	»
20	52.40	47.60	— 8.92	»
21	47.88	52.12	— 5.81	»
22	43.20	56.80	— 2.49	»
23	39.65	60.35	+ 0.28	»
24	33.63	66.37	5.12	»
25	30.30	69.70	7.85	»
26	23.80	77.20	14.50	»
27	18.19	81.71	19.32	»
28	12.85	87.15	25.60	»
29	10.59	89.41	28.58	»
30	8.16	91.84	32.00	»
31	4.69	95.31	35.78	»
32	3.23	96.77	37.90	»
33	2 68	97.32	38.60	»
34	1.76	98.24	40.12	»
35	—	100.00	42.90	»

Diagr. I. Sistema *Cianamide-Acqua.*

II. Sistema *Cinamide-Urea.*

N. d'ordine	Cianamide °/₀	Urea °/₀	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	42.9	Cianamide
2	95.84	4.16	41 3	"
3	92.01	7.99	39.4	"
4	88.48	11.52	37.6	"
5	85.20	14.80	35.8	"
6	82.21	17.79	33.9	"
7	79.40	20.60	32.0	"
8	77.22	22.78	30.3	"
9	74.20	25.80	27.8	"
10	69.61	30.29	23.8	"
11	65.80	34.20	19.6	"
12	62.55	37.45	22.4	Urea
13	61.13	38.87	28.6	"
14	59.00	41.00	35.0	"
15	53.50	46.50	47.0	"
16	49.02	50.98	56.3	"
17	45.13	54.87	63.5	"
18	41.90	58.10	68.7	"
19	39.06	60.94	74.8	"
20	32.79	67.21	84.8	"
21	30.70	69.30	88.4	"
22	—	100.00	132.00	"

Diagr. II. Sistema *Cianamide-Urea.*

Diagr. III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide.*

III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide.*

N. d'ord.	Cianamide %	Diciandiamide %	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	42.9	Clanamide
2	95.24	4.70	40.9	"
3	90.91	9.09	38.9	"
4	86.96	13.04	36.8	"
5	84.59	15.41	40.9	Diciandiamide
6	83.40	16.60	49.6	"
7	81.80	18,18	58.6	"
8	80.00	20.00	66.5	"
9	77.02	22.98	80.0	"
10	—	100.00	205.0	"

L'esame delle curve di congelamento, che sono tracciate nei diagrammi 1, 2 e 3, come del resto i risultati di alcune analisi termiche che ho istituite su alcune miscele appartenenti ai diversi sistemi, pongono in rilievo, per ciascuno dei sistemi descritti, l'esistenza di un semplice eutettico, la cui composizione e temperatura di congelamento appare nel seguente prospetto:

I. Sistema *Cianamide-Acqua.*

Cianamide	*Acqua*	Temperatura di congelamento
37.8 %	62.2 %	— 16°.6

II. Sistema *Cianamide - Urea.*

Cianamide	*Urea*	Temperatura di congelamento
63.9 %	36.1 %	17°.4

III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide.*

Cianamide	*Diciandiamide*	Temperatura di congelamento
85.0 %	15.0 %	35°.6

Fisiologia. — *La perspirazione cutanea in alta montagna* (1). Nota del dott. Gaetano Viale, presentata dal Socio Pio Foà.

Fondandosi su la legge fisica dell'aumento dell'evaporazione, quando la pressione barometrica diminuisce, alcuni autori affermarono, senz'altro, che in alta montagna la perspirazione cutanea dev'essere maggiore; e questa opinione trovò un appoggio negli esperimenti di Regnard (*Cure d'altitude*, 1897) il quale, mantenendo animali a lungo sotto alla campana pneumatica, constatò una maggior perdita di acqua nell'aria rarefatta.

Se non che Mosso (*L'uomo sulle Alpi*, III ed., Milano, 1909, pag. 393); Zuntz, Loewi, Müller, Caspari (*Höhenklima und Bergwanderungen*, Berlin, 1906, pag. 378); Guillemard e Moog, [Compt. rend. Soc. Biol. 1907, pp. 819 e 874; Compt. rend. Acad. d. Sciences, Paris, *148*, pag. 1624 (1909)], ed altri, trovarono invece una minor perdita d'acqua nell'aria rarefatta. Il metodo da loro generalmente usato è stato quello della variazione in peso dell'organismo, col quale misurarono complessivamente l'acqua eliminata per la cute e quella per i polmoni. Guillemard e Moog, [Compt. rend. Acad. d. Sciences, Paris, *145*, 823, an. 1907], cercarono di ricavare separatamente le due quantità; e trovarono che, mentre in montagna cresce l'acqua emessa per i polmoni, diminuisce molto l'acqua emessa per la cute. Siccome tutti questi autori non sperimentarono nelle stesse condizioni di temperatura al piano e in montagna, così essi non poterono attribuire la minor perdita d'acqua in montagna alla altitudine, ma tutt'al più alla bassa temperatura che induce vasocostrizione cutanea e toglie ogni attività alle ghiandole sudoripare.

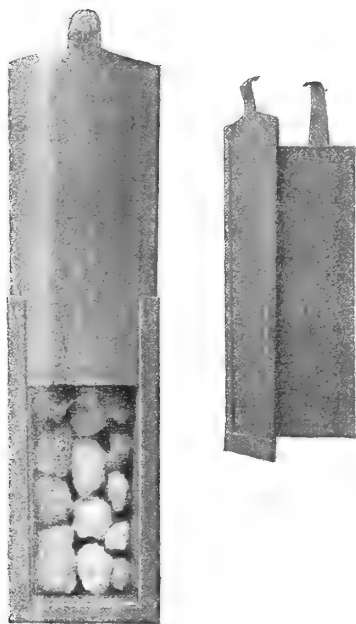
Kalmann, [Pflüger's Arch., *112*, 561 (1906)], da ricerche dirette, concluse che l'altitudine fa diminuire l'evaporazione cutanea, e suppose che per la regolazione dell'equilibrio termico in media montagna fosse necessaria una minore attività perspiratoria della cute.

O. Cohnheim e i suoi collaboratori [Zeit. f. physiol. Chemie, *63*, 413 (1909) e *78*, 62 (1912)], contrariamente agli altri, trovano in pianura una minor eliminazione di acqua. Poichè determinarono la perdita in peso che avveniva durante la notte sotto le coltri, essi sperimentarono quasi nelle stesse temperature in montagna e in pianura (2).

(1) Ricerche eseguite per consiglio e sotto la direzione del prof. Gino Galeotti, nel Laboratorio scientifico « A. Mosso » sul Monte Rosa (dirett. prof. A. Aggazzotti).

(2) Un errore di questi esperimenti è stato quello di aver considerato la perdita in peso dell'organismo come perdita di acqua, trascurando l'emissione dell'anidride carbonica che pur è rilevante, tanto più che l'emissione di questo gas è maggiore in alta montagna che non al piano.

Ultimamente, Galeotti e Signorelli [Bioch. Zeitschr., *41*, 268 (1912)] stabilirono un bilancio completo dell'acqua determinando l'acqua introdotta, quella eliminata con le feci e con l'urina, con l'aria espirata, e con la cute. Essi conclusero che si perde minor acqua per la cute nel soggiorno in alta montagna; e giustamente riportarono ciò alla differenza della temperatura e non già alla rarefazione dell'aria. Dai loro valori, se pure in via generale si poteva dire che in montagna si perdeva meno acqua, non si poteva però senz'altro dire, che nell'unità di tempo, da una determinata superficie cutanea si perspirasse meno.

E così mi è sombrato opportuno di trattare sperimentalmente, in modo diretto, il problema.

Metodo. — Per le mie determinazioni servì un apparecchio semplice ed esatto, ideato dal prof. Galeotti (ved. figura). Consta di una cassetta metallica rettangolare, che si apre e chiude come uno *chassis* fotografico con un coperchio metallico scorrevole con attrito in una doccia. Nel fondo della cassetta sono attaccati, a guisa di mosaico, dei blocchetti di cloruro di calcio. Per fissarli, si adagiano in paraffina resa semifluida col calore: raffreddandosi e consolidandosi la paraffina, i blocchetti restano aderenti. Dopo aver ripetutamente scossa la scatola per far cadere ogni traccia di polvere dal cloruro di calcio, la cassetta chiusa viene pesata. Tolto poi il coperchio, la scatola prontamente si applica su la cute, si stringe con una cinghia, si lascia un tempo determinato: trascorso il quale, prontamente si chiude e si ripesa.

L'aumento in peso esprime la quantità di vapor acqueo esalato dalla superficie cutanea esplorata. Poichè è nota l'estensione di essa così si può calcolare la quantità di acqua perspirata nell'unità di tempo dall'unità di superficie. Si tien conto dell'umidità dell'aria (1) e della temperatura ambiente.

L'apparecchio può applicarsi in qualsiasi parte del corpo, purchè la pelle lo chiuda perfettamente: ma per il confronto tra la perspirazione in montagna e quella in pianura, preferii utilizzar sempre la superficie anteriore dell'avambraccio.

La prima serie di determinazioni è stata fatta al colle d'Olen (m. 2900 s. m.), e la seconda serie a Torino (m. 250 s. m.). Le cifre, nei ragguagli delle tabelle, si riferiscono all'acqua perspirata da 1 dm² di cute in 10', e sono espresse in milligrammi.

Determinazioni al colle d'Olen.

Data 1913	Temperatura	Grado igrometrico	H_2O da 1 dm² in 10' mg.	
22 - VII	8°	—	23.6	Esperimenti su G. V.
25 »	10	70	28.1	
26 »	9	80	23.7	
27 »	10,5'	80	27	
	10,5	80	22.7	
28 »	9	87	24.8	
29 »	13	95	18.9	
	9,5	87	20.2	
31 »	9	75	27	
1 - VIII	8	80	18.9	
	11	80	20.2	
2 »	10	90	24.3	
4 »	11	80	23	
	9,5	80	19.4	
	14	80	28.3	
5 »	9	70	25.1	
31 - VII	10	75	24.3	Su A. A.
1 - VIII	11	80	21.1	
5 »	10	70	22.8	

(1) Applicata la cassetta, la zona di cute in esperimento perspira in un'aria resa secca dalla presenza di cloruro di calcio. Per cui nelle mie misure l'igrometria non ha una grande importanza: ma noi non sappiamo quale ripercussione possa avere lo stato di tutto l'organismo su la zona limitata di cute che si esplora.

Da questa tabella si rileva:

1) Al colle d'Olen, alla temperatura media di 10° (grado igrometrico 75-80) da 1 dm^2 di cute, in 10′, si perspirano mgr. 23 di acqua in media. Calcolando la superficie del corpo come m^2 1.6, secondo Vierordt, in 24^h, da tutto il corpo un uomo di statura media perspira gr. 536 di acqua [1]. Galeotti (loc. cit.), calcolando la perdita d'acqua dalla cute, durante il decorso d'una giornata, trovò all'Olen, alla temperatura media di 11°, gr. 473-671, valori concordanti pienamente col mio.

2) Nel breve àmbito delle temperature esperimentate, tra 8° e 14°, si riscontrò un rapporto approssimativo tra temperatura e quantità d'acqua perspirata.

3) Comparando poi i valori dell'acqua col grado igrometrico, oscillando la temperatura tra 9° e 10°, si constatò, col crescere dell'umidità dell'aria, una diminuzione nel vapor acqueo esalato.

Per cui la maggior temperatura agirebbe in modo contrario alla maggior umidità. In ciò i miei valori concordano con quelli di Rubner [*Arch. f. Hygiene*, *11*, 137 (1890)], di Wolpert [*Arch. f. Hygiene*, *41*, 30 (1901)], e di altri.

Determinazioni a Torino.

Data 1913	Temperatura	Grado igrometrico	H_2O da 1 dm^2 in 10′ mg.	
7 - XI	10°	75	14.5	Su G. V.
8 »	10	78	14.3	
9 »	13	69	14.8	
	10	88	12.8	
10 »	14,8	82	16.6	
12 »	14	76	17.2	
13 »	17	70	17.3	
	9	77	12.9	
14 »	16	72	13.4	
15 »	16	80	16	
12 »	16	76	13	Su A. A.
14 »	17	72	12	

[1] Questa cifra va accolta con riserva, giacchè non si può senz'altro ammettere che tutte le parti del corpo, anche senza secrezione di sudore, eliminino, per perspirazione, eguali quantità di acqua.

Dai valori ottenuti a Torino, ricaviamo le stesse conclusioni circa al rapporto tra perspirazione del vapor acqueo e temperatura e grado igrometrico.

Da 1 dm² di cute, in 10', a Torino, alla temperatura media di 10° (grado igrometrico tra 75 e 80), si esalano in media mg. 14 di acqua; cioè nelle 24ʰ. calcolando la superficie di tutto il corpo m.² 1,6, gr. 322 di acqua.

Riesce utile il paragone dei miei valori con quelli già noti: Röhrig [*Physiologie der Haut*, 1876] trovò, in condizioni medie di temperatura, per tutto il giorno, gr. 660; Schierbeck [Arch. f. Hygiene, *16*, 203, 1893] a 18°, gr. 317, e [Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1893, pag. 116) a 29°,8, gr. 532; Nutall [Arch. f. Hygiene, 23, 184, 1895] a 28°,8 gr. 304; Wolpert [loc. cit.] un valore simile a quello di Röhrig; Willebrand [Skandin. Arch., 13, 337, 1902] a 12° trovò gr. 252, a 16° gr. 366, a 17°,2 gr. 396; Osborne [Journ. of Physiol., 41, 345, 1910] trovò a 17°,3, gr. 748; Kalmann [loc. cit.] a 15°-16° gr. 821 in media; Galeotti e Signorelli [loc. cit.] trovarono a Napoli, alla temperatura media di 18°-20°, per G., gr. 946-1690, per S. gr. 719-1079.

Le cifre riferite superano, in generale, il valore da me trovato: ciò dipende dalla maggior temperatura a cui si esperimentò: invece, nell'àmbito delle temperature a cui sperimentai io, si trovano valori più concordanti col mio e col valore di Schierbeck a 18°. Dalle mie determinazioni a 17° si calcola un'emissione di gr. 398: cifra che pienamente concorda con quella ottenuta da Willebrand a 17°,8 (cioè gr. 396).

I miei valorl sono poi molto uniformi, perchè col metodo del prof. Galeotti misurai solo la fase gassosa (insensibile) della traspirazione cutanea; mentre invece gli sbalzi grandi tra giorno e giorno, quali si vedono nelle cifre di Galeotti e Signorelli, sono da riportarsi all'attività saltuaria della funzione sudoripara.

Più interessante appare il confronto dei valori ottenuti al colle d'Olen con quelli ottenuti a Torino. Resulta che in alta montagna l'eliminazione cutanea dell'acqua è maggiore che non in pianura.

Per render conto della divergenza di questo resultamento da quello di altri autori citati in principio, giova pensare:

1) che Mosso, Zuntz, Galeotti e Signorelli non sperimentarono alle stesse temperature, e che la differenza da loro riscontrata nell'eliminazione dell'acqua si deve riportare non all'altitudine, ma alla temperatnra. Io infatti — e in parte pur Cohnheim — esperimentando alla stessa temperatura tanto su le Alpi quanto al piano, ho riscontrato una maggior perdita d'acqua nell'aria rarefatta. Anche recentemente Aggazzotti [Arch. f. Entwickmech, *36*, 633, 1913] trovò che la perdita d'acqua delle uova di gallina in via di sviluppo è maggiore in montagna che non in pianura: per necessità sperimen-

tali le uova si trovavano alla stessa temperatura ambiente dell'incubatrice nei due luoghi;

2) che io ho sempre sperimentato a temperature piuttosto basse, intorno a 10°, quando cioè si poteva supporre che le ghiandole sudoripare fossero inattive, per cui determinai la sola fase gassosa (insensibile) della eliminazione dell'acqua. È appunto noto che la temperatura critica per il funzionamento delle ghiandole del sudore è 33° (cfr. Schierbeck, loc. cit).. In ricerche che durano un'intera giornata, vi sono, nelle condizioni climatiche della pianura, più occasioni a sudare: per cui la perdita dell'acqua diventa grande e anche maggiore che non nell'aria rarefatta, ma per un altro meccanismo che non è quello della perspirazione insensibile;

3) che è difficile di avere le stesse condizioni igrometriche alla montagna e al piano, in esperienze che occupano un giorno intero: invece nelle mie determinazioni, che durano pochi minuti, è in certo qual modo possibile la riproduzione, al piano, del clima alpino;

4) che, pur ammettendo che la perdita complessiva dell'acqua sia minore nell'aria rarefatta, potrebbe darsi che, anche eliminandone in maggior copia dalla cute, se ne eliminasse molto meno per i polmoni. Ulteriori studî delucideranno questo punto. Galeotti [Bioch. Zeitschr., *46*, 173, 1912] trovò intanto come — essendo la temperatura più bassa — diminuisca l'eliminazione del vapor d'acqua dai polmoni. Le ricerche dirette eseguite da Galeotti e Signorelli (loc. cit.) in montagna, non hanno dato ancora resultati conclusivi.

La maggior perspirazione cutanea dell'acqua in alta montagna si può interpretare con due diversi meccanesimi.

Se si ammettesse con Schwenkenbecher [Med. klin. Jahrg., *4*, 889, 1908] e con Luciani [*Fisiologia dell'uomo* II, pag. 543], che la perspirazione fosse un fenomeno biologico dovuto all'attività delle ghiandole sudoripare, allora si potrebbe ammettere che in alta montagna, come altre funzioni, anche quella delle ghiandole sudoripare venisse esaltata. Sennonchè, questo esaltamento non venne riscontrato in misure dirette da Viale [Rend. Accad. dei Lincei, *22*, 180, 1913].

Se invece si ammette che *perspiratio insensibilis* e *sensibilis* non sieno due gradi di uno stesso processo, ma due distinti fenomeni con un proprio determinismo, e se si ammette che la *perspiratio insensibilis* avvenga per pura legge fisica di evaporazione attraverso la pelle che è sicuramente permeabile all'acqua, allora il fatto da me riscontrato ha una facile e semplice interpretazione: cioè dipende dalla diminuita pressione atmosferica.

Poichè in alta montagna la *perspiratio insensibilis* è aumentata, mentre invece la funzionalità delle ghiandole sudoripare si trova inibita dal freddo, si è in certo modo propensi a considerare la *perspiratio sensibilis* e la *insensibilis* come due ordini di fenomeni indipendenti.

Ci portiamo così nell'àmbito delle idee di Willebrand [loc. cit.] e di Loewy e Wechselmann [Virchow's Arch., *206*, 79, 1911].

Il fattore principale che determina la maggior perspirazione in alta montagna è dunque la rarefazione dell'aria, che, oltre che per un meccanismo fisico, agisce anche per un meccanismo biologico determinando vasodilatazione periferica nell'organismo. Tra le cause che possono modificare infatti l'eliminazione cutanea dell'acqua, sta pure l'irrorazione sanguigna: cfr. Jansen [Deutsch. Arch. f. klin. Mediz., *23*, 314, 1883].

Una certa influenza può anche avere l'acclimatazione al freddo; per cui, a parità di temperatura, l'impressione di freddo e la vasocostrizione è maggiore al piano che non in montagna: questo fattore diminuisce i valori della perspirazione cutanea.

Le *conclusioni* di questi miei esperimenti si posson così riassumere:

1°) La *perspiratio insensibilis* di 1 dm² di cute (avambraccio), calcolata in milligrammi di acqua in 10′, e alla temperatura media di 10°, è a Torino, mgr. 14; al colle d'Olen, mgr. 23.

2°) Ponendo per ora l'ipotesi che la perspirazione sia presso a poco eguale per la cute delle diverse parti del corpo, la perdita totale di acqua per la via della pelle (senza sudorazione), alla temperatura di 10° sarebbe: a Torino, gr. 322; al Colle d'Olen, gr. 536.

Questi valori concordano con quelli di altri autori che esperimentarono in eguali condizioni e alla stessa temperatura.

3°) Il fatto principale che determina la maggior prespirazione cutanea in alta montagna deve essere la rarefazione dell'aria, che agisce per un meccanismo fisico, poichè la cute è certamente permeabile all'acqua; e per un meccanismo biologico, producendo vasodilatazione periferica nell'organismo.

4°) La quantità d'acqua eliminata dalla cute colla *perspiratio insensibilis* cresce con la temperatura dell'ambiente, e diminuisce con l'aumentare del grado igrometrico dell'aria.

Zoologia. — *Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili.* Nota di Leopoldo Granata, presentata dal Socio B. Grassi.

Zoologia. — *L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei.* Nota del prof. Rina Monti, presentata dal Socio B. Grassi.

Queste Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Lincio G., *Rocce e minerali del Monte Colmine ed adiacenze*. Presentata dal Socio Viola.

Cotronei M., *Sul tubo digerente del Linculus*. Pres. dal Socio Grassi.

Bargagli Petrucci G., *Sull'origine biologica della Terra di Siena* (*Terre gialle e bolari del Monte Amiata*). Pres. dal Corrispondente Baccarini.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Strüver, relatore, a nome anche del Corrisp. Millosevich F., legge una relazione sulla Memoria del dott. E. Grill, avente per titolo: *I minerali dell'isola di Nisiro* (*Mar Egeo*), concludendo col proporre la inserzione del lavoro nei volumi accademici.

Eguale proposta fa il Corrisp. Millosevich F., relatore, a nome anche del Socio Strüver, per la Memoria del dott. A. Rosati, intitolata: *Studio cristallografico della Maucherite e della Placodina.*

Le conclusioni delle Commissioni esaminatrici sopra nominate, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio De Stefani legge una Commemorazione del Corrispondente prof. Igino Cocchi.

Questa Commemorazione sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Il Presidente comunica i ringraziamenti inviati dal prof. I. Fredholm all'Accademia, per la sua recente nomina a Socio straniero.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio Taramelli, dei Corrispondenti Pascal e Silvestri, e dei Soci stranieri Lacroix e Picard; fa inoltre particolare men-

zione dei seguenti lavori del prof. ANGELITTI: *Le antiche misure della lunghezza del meridiano terrestre*; *La forma della terra secondo Aristotele nel trattato De Caelo*.

Il Socio PIROTTA fa omaggio a nome dell'autore prof. LONGO dell'Orto botanico di Siena, di varie pubblicazioni, e si intrattiene sulla importanza di alcune di queste.

CONCORSI A PREMI

Il PRESIDENTE comunica gli elenchi dei lavori presentati per concorrere al premio Reale, del 1913, per la Matematica, dai signori: LAURICELLA G., MIDOLO P., SEVERI F.; e per il premio Reale di Fisiologia normale e patologica, parimente del 1913, dai signori: BARBIERI N. A., BOCCI B., BOTTAZZI F., FICHERA G., LOMONACO D., NEGRO C., PETRONE A., SEGALE M., ZANOTTI P.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente BLASERNA annuncia che alla seduta assiste il prof. DE BODOLA della Scuola politecnica di Budapest.

Lo stesso PRESIDENTE dà partecipazione degli inviti per le feste commemorative che saranno celebrate dalla Reale Accademia di scienze ed arti di Barcellona e dalla Biblioteca imperiale di Pietroburgo, nonchè di un invito per tenere a S. Francisco un meeting nell'occasione dell'Esposizione internazionale del Panama (1915).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 gennaio 1914.

ANGELITTI F. — La forma della terra secondo Aristotele nel trattato « De Caelo ». (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.

ANGELITTI F. — Le antiche misure della lunghezza del meridiano terrestre. (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.

LACROIX A. — Minéralogie de la France et de ses Colonies. Description physique et chimique des minéraux: étude des conditions géologiques de leurs gisements. T. V. suppl. II et Index géographique dressé avec le concours du Colon. Azèma. Paris, 1913. 8°.

PASCAL E. — I miei integrafi per equazioni differenziali. Napoli, 1913, 8°.

PICARD ÉM. — L'oeuvre d'Henri Poincaré. (Extr. de la « Revue scientifique », 1913). Paris, 1913. 8°.

RELAZIONE II della Commissione per le norme edilizie obbligatorie per i Comuni colpiti dal terremoto del 28 dicembre 1908 e da altri anteriori. Istruzioni tecniche - metodi di calcolo - applicazioni. Roma, 1913. 8°.

SALAZAR A. E. — Las funziones iperbólikas i su aplikazion a los problemas de injenería eléktrika. Killota, 1913. 8°.

SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo ordine di insetti. (Estr. dal « Boll. del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura », vol. VII). Portici, 1913. 8°.

TARAMELLI T. — Ricordo dello Spallanzani, come vulcanologo. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLVI). Pavia, 1913. 8°.

TARANELLI T. — Sul lembo pliocenico di S. Bartolomeo presso Salò. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLVI). Pavia, 1913. 8°.

TEODORO G. — Sul sistema tracheale dei Lecaniti. (Estr. dal « Redia », vol. IX). Firenze, 1913. 8°.

VILHENA H. — Archivo de anatomia et de anthropologia. N. 1. Lisboa, 1913. 8°.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Bianchi. Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili . . . . Pag. 3
Levi-Civita. Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante . . . . » 12
Pizzetti. Della probabilità nelle prove ripetute . . . . » 21
Tedone. Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate (*) . . . . » 24
Artini. Sulla diffusione delle rocce a nefelina nella Libia . . . . » 25
Cisotti. Efflusso da un recipiente forato lateralmente (pres. dal Socio *Levi-Civita*) (*) . . » 27
Tonelli. Sulle funzioni di linee (pres. dal Socio *Pincherle*) . . . . » 28
De'Filippi. Prima relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale . . . . » 34
Chiaraviglio e *Corbino.* La distillazione della nitroglicerina a bassa temperatura (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . » 37
Lo Surdo. Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale (pres. dal Socio *Róiti*) (*) . . . . » 41
Olivari. Sulle proprietà dell'iodio come solvente crioscopico (pres. dal Socio *Ciamician*) . » »
Padoa e *Tabellini.* La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione (pres. *Id.*) (*) . . » 46
Pratolongo. I sistemi binarî cianamide-acqua, cianamide-urea e cianamide-diciandiamide (pres. dal Socio *Menozzi*) . . . . » »
Viale. La perspirazione cutanea in alta montagna (pres. dal Socio *Foà*) . . . . . . » 53
Granata. Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili (pres. dal Socio *Grassi*) (*) . . . . » 59
Monti. L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei (pres. *Id*) (*) » »

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Lincio. Rocce e minerali del Monte Colmine ed adiacenze. Pres. dal Socio *Viola* . . . » 60
Cotronei. Sul tubo digerente del Linculus. Pres. dal Socio *Grassi.* . . . . » »
Bargagli Petrucci. Sull'origine biologica della Terra di Siena (Terre gialle e bolari del Monte Amiata). Pres. dal Corrisp. *Baccarini* . . . . » »

(*Segue in terza pagina*)

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Strüver (relatore) e *Millosevich F.* Relazione sulla Memoria del dott. *E. Grill*: « I minerali dell'isola di Nisiro (Mar Egeo) » . . . . Pag. 60
Millosevich F. (relatore) e *Strüver*. Relazione sulla Memoria del dott. *Rosati*: « Studio cristallografico della Maucherite e della Placodina » . . . . » »

PERSONALE ACCADEMICO

De Stefani. Commemorazione del Corrisp. *Igino Cocchi* (*) . . . . » »
Blaserna (Presidente). Comunica i ringraziamenti del prof. *I. Fredholm* per la sua recente nomina a Socio straniero . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Millosevich (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Taramelli*, *Pascal*, *Silvestri*, *Lacroix*, *Picard* e del prof. *Angelitti* . . . . » »
Pirotta. Fa omaggio di varie pubblicazioni del prof. *Longo* e ne parla . . . . » 61

CONCORSI A PREMI

Blaserna (Presidente). Comunica i nomi dei concorrenti al premio Reale per la *Matematica* e a quello di *Fisiologia normale e patologica*, del 1913 . . . . » »

COMUNICAZIONI VARIE

Blaserna (Presidente). Annuncia che alla seduta assiste il prof. *De Bodola* . . . . » »
Id. Comunica gl'inviti pervenuti all'Accademia per prender parte alle feste commemorative che saranno celebrate dalla R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona e dalla Biblioteca imperiale di Pietroburgo, ed all'Esposizione internazionale del Panama del 1915 » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . » 62

(*) Questa Commemorazione sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Pubblicazione bimensile. *Roma 18 gennaio 1914.* **N. 2.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 gennaio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 2°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 gennaio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti, nell'anno scorso (1), ho mostrato come si può pervenire a determinare l'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche, nella sua primitiva forma di Riemann-Volterra. Lasciando da parte il paragone fra i risultati precedenti e quelli che si otterrebbero applicando alla stessa equazione il metodo delle caratteristiche com'è stato modificato dall'Hadamard (2), che pure sarebbe certamente interessante a farsi, noterò che una espressione del sopraddetto integrale generale, analoga alla formola di Poisson per l'ordinaria equazione delle onde, si trova nel Riemann-Weber (3). Questa formola è dedotta, in quel libro, con artificio elegante dall'integrale generale della cosiddetta equazione dei telegrafisti, che non è altro se non la stessa equazione delle onde smorzate, pel caso di due variabili. Stante l'importanza innegabile dell'argomento, mi permetto di mostrare brevemente, in questa Nota, come dalla formola da me data si ottenga quella ricordata del Weber, anche per mettere in vista una nuova e notevole relazione integrale fra le funzioni di Bessel.

(1) Seduta 31 maggio 1913.
(2) Acta math., tom. 31, pag. 333.
(3) Part. Diff.-gleich. der math. Physik, 2er Bd., ediz. 1901, pag. 310.

2. L'equazione della propagazione delle onde smorzate, nella mia Nota citata, è stata considerata sotto la forma

$$(1)\qquad \Delta^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0,$$

alla quale si può sempre ridurre. E, indicando con x_1, y_1, z_1, t_1 le coordinate di un determinato punto nello spazio lineare (x, y, z, t) l'integrale generale della (1) è stato trovato sotto la forma

$$(2)\qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\Phi + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,\frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t}\,dt,$$

dove

$$(3)\qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma [\varphi D\varphi' - \varphi' D\varphi]\,d\Sigma,$$

Σ essendo la porzione di una varietà regolare, del resto, arbitraria, a tre dimensioni compresa nell'ipercono caratteristico uscente dal punto (x_1, y_1, z_1, t_1). È, inoltre, t_0 il valore di t nel punto comune a Σ ed alla parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1),

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos nz - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos nt,$$

$$\varphi' = \left(\frac{t_1-t}{r} - 1\right)\frac{I_1\left(\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}},$$

$$r = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2},$$

e, infine, è supposto t_1 più grande del valore che t assume nella porzione di Σ che compare nelle (2) e (3).

Per ottenere dalla (2) la formola del Weber, supporremo che Σ appartenga costantemente all'iperpiano $t = 0$. Bisognerà allora fare $t_0 = 0$ e porre $t = 0$ nell'espressione di φ'. Dobbiamo porre inoltre:

$$D\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad D\varphi' = -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1}\right)_{t=0},$$

per cui

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_1} r^2\,dr\int_\Omega\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Omega,$$

Ω essendo la superficie di una sfera ordinaria di raggio uno dell'iperpiano $t = 0$ col centro nel punto (x_1, y_1, z_1).

Ponendo:

$$\text{(4)} \qquad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \varphi\, d\Omega = \psi(r) \quad , \quad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, d\Omega = \Psi(r)\,,$$

possiamo anche scrivere

$$\Phi = \int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r)\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \Psi(r)\,\varphi' \right]_{t=0}.$$

Di qui abbiamo:

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t_1^2} = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\psi(t_1) +$$

$$+ 2\int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r)\frac{\partial^3\varphi'}{\partial t_1^3} + \Psi(r)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t_1^2} \right]_{t=0},$$

ed anche

$$\int_0^{t_1} \Phi\, \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt = \int_0^{t_1} r\, dr \int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\left[\psi(r)\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\,\varphi' \right] dt$$

con

$$\varphi' = \left(\frac{t}{r} - 1\right)\frac{I_1\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right),$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_0^{t_1} \Phi\, \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt =$$

$$= \int_0^{r} r\, dr\, \frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\left[\psi(r)\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\,\varphi' \right] dt.$$

Sostituendo questi risultati nella (2), e notando che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, I_0\left(\sqrt{(t^2 - r^2}\right) dt = r\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\,\varphi' dt\,,$$

si ottiene

$$\text{(5)} \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\psi(t_1) +$$

$$+ \int_0^{t_1} dr \left[\psi(r)\frac{\partial}{\partial t_1} + \Psi(r) \right]\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left[-I_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} I_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, I_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt \right].$$

Avremo ottenuto la formola di Weber se potremo dimostrare che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[-\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\right]=-\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

ossia, ricordando la relazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)=\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

che

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\right]=0.$$

3. Mostreremo, a questo scopo, che sussiste l'identità

$$\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt=\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right). \tag{6}$$

Cominciamo a far vedere che, ponendo:

$$\mathrm{A}_{n,p}=\sum_0^p{}_m\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{n+p-2m}{p-m}= \tag{7}$$

$$=\sum_0^p{}_m\frac{1}{p-m+1}\binom{2p-2m}{p-m}\binom{n-p+2m}{m},$$

è pure

$$\mathrm{A}_{n,p}=\binom{n+p+1}{p}. \tag{8}$$

Si vede subito, infatti, che, fra le $\mathrm{A}_{n,p}$, sussiste la relazione

$$\mathrm{A}_{n+1,p}=\mathrm{A}_{n,p}+\mathrm{A}_{n,p-1}.$$

D'altra parte, nella mia Nota più volte citata, è stata dimostrata la (8) per $n=p$, e, immediatamente, si mostra che essa è giusta, qualunque sia n, per $p=0,1,2,\ldots$; essa dunque resta dimostrata in generale.

Ciò posto, notiamo che, dalle relazioni:

$$\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_i\frac{(t^2-r^2)^i}{2^{2i}\,i!\,i!}\quad,\quad\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}=\sum_0^\infty{}_j\frac{(t_1-t)^{2j}}{2^{2j}\,j!\,(j+1)!},$$

abbiamo

$$\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_n\frac{1}{2^{2n}}\sum_0^n{}_m\frac{(t_1-t)^{2(n-m)}}{(n-m)!\,(n-m+1)!}\,\frac{(t^2-r^2)^m}{m!\,m!}$$

e, quindi,

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{2^{2n}} \sum_0^n {}_m \frac{1}{(n-m)!\,(n-m+1)!\,m!m!} \int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)} (t^2-r^2)^m\, dt .$$

Ponendo, nell'integrale a secondo membro,

$$t_1 - t = (t_1 - r)\,\xi ,$$

subito si trova

$$\int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)} (t^2-r^2)^m\, dt =$$

$$= (t_1-r)^{2n-m+1} \int_0^1 \xi^{2(n-m)} (1-\xi)^m \left[(t_1-r)(1-\xi)+2r\right]^m d\xi =$$

$$= (t_1-r)^{n+1} \sum_0^m {}_h \frac{m!}{h!\,(m-h)!} \frac{(2n-2m)!\,(2m-h)!}{(2n-h+1)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} .$$

Sostituendo, risulta

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}} \sum_0^n {}_h \frac{1}{h!\,(2n-h+1)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} \times$$

$$\times \sum_h^n {}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} ;$$

e, per essere

$$\sum_h^n {}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} =$$

$$= \sum_0^{n-h} {}_m \frac{1}{n-h-m+1} \binom{2(n-h)-2m}{n-h-m} \binom{n-(n-h)+2m}{m} =$$

$$= \binom{2n-h+1}{m} ,$$

può scriversi

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}\, n!\,(n+1)!} \sum_0^n {}_h \frac{n!}{h!\,(n-h)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} =$$

$$= (t_1-r) \sum_0^\infty {}_n \frac{(t_1^2-r^2)^n}{2^{2n}\, n!\,(n+1)!} = (t_1-r) \frac{I_0'\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)}{\sqrt{t_1^2-r^2}} :$$

il che dimostra completamente il nostro asserto.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. In un precedente lavoro [1] abbiamo ridotto il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali allo studio delle equazioni integrali di tipo misto; cioè le

$$\varphi(x) + \mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{1}$$

$$\mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{2}$$

che diremo rispettivamente equazioni miste (o Volterra-Fredholm) di seconda e di prima specie; λ e μ sono diversi da zero.

Per trattare la (1), assumiamo l'incognita ausiliaria $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mu \int_0^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy\,. \tag{3}$$

Di qui si trae immediatamente:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \mu \int_0^x \mathfrak{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy\,, \tag{4}$$

ove $\mathfrak{M}$ sia il nucleo risolvente di Volterra della (3), il quale dipende (come è noto) solo da M e μ.

Sostituendo, nella (1), sia la (3) per i primi due termini, sia la (4) pel terzo, si ha:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy) \left\{ \psi(y) - \mu \int_0^y \mathfrak{M}(yz\mu)\, \psi(z)\, dz \right\} dy = f(x);$$

da cui, scambiando gli integrali nell'integrazione doppia, si ricava:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \psi(y)\, dy - \lambda\mu \int_0^1 \psi(y)\, dy \cdot \int_y^1 \mathrm{M}_1(xz)\, \mathfrak{M}(zy)\, dz = f(x)\,,$$

ossia:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{N}(xy)\, \psi(y)\, dy = f(x)\,, \tag{5}$$

[1] *Sulle espressioni integro-differenziali.* Questi Rend., ser. V, vol. XXII, 2° semestre 1913, pp. 409-414.

in cui si è posto

$$N(xy) = M_1(xy) - \mu \int_y^1 M_1(xz)\, \mathfrak{M}(zy\mu)\, dz . \tag{6}$$

Dunque, la (1) è stata ricondotta, almeno formalmente per ora, ad un'equazione di Fredholm di seconda specie, mediante la soluzione d'una di seconda specie di Volterra.

Intanto, dalle (3), (4) si vede che, nel caso regolare, data la φ, la ψ esiste ed è unica; che, data la ψ, anche la φ esiste ed è unica; se una di esse è integrabile, lo è anche l'altra. Quindi il risultato ottenuto è valido.

2. Discutiamo adesso questa soluzione così ottenuta:

a) λ *non sia autovalore della* (5). Allora, per la teoria del Fredholm, la ψ esiste ed è unica; e dalla (4), formola di soluzione della (3), si ricava subito la φ; e si vede che anche essa è unica. Se $f(x) = 0$, si avrà $\psi(x) = 0$ e, quindi, $\varphi(x) = 0$.

b) λ *sia autovalore della* (5), *ed* $f(x) = 0$. Per la teoria del Fredholm, se λ è radice di multiplicità r, vi saranno per la ψ, al più, r valori linearmente indipendenti: sieno essi ϱ. Per le equazioni (4) che legano la φ e la ψ, si deducono ϱ soluzioni per la φ. Queste saranno anche esse linearmente indipendenti. Infatti, ove ciò non fosse, si dovrebbe avere:

$$a_1 \varphi_1 + \cdots + a_\varrho \varphi_\varrho = 0 ;$$

per la (3), si avrebbe poi:

$$\psi_i = \varphi_i(x) + \lambda \int_0^x M(xy)\, \varphi_i(y)\, dy ; \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

da cui:

$$\Sigma a_i \psi_i = \Sigma a_i \varphi_i + \lambda \int_0^x M(xy)\, \Sigma a_i \varphi_i(y)\, dy ;$$

ovvero, tenuto conto della relazione che intercede fra le φ, si avrebbe

$$\Sigma a_i \psi_i = 0 :$$

il che non è.

c) λ *sia autovalore della* (6) *ed* $f(x) \neq 0$. È ovvio che, se v'è una soluzione, ve ne saranno infinite, differenti fra loro per soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente.

Ora, sempre per la teoria del Fredholm, condizione necessaria e sufficiente affinchè la (5) ammetta soluzioni, è che la f soddisfi a certe condizioni di ortogonalità. Se queste sono soddisfatte, vi sarà una soluzione ψ della (5), da cui si deduce poi la φ.

Ecco discusse le equazioni miste, in base alle teorie del Volterra e di Fredholm.

3. Si può anche discutere e studiare la (1), servendosi d'un altro procedimento. Poniamo $\mu = \lambda$; il che si può sempre fare, senza ledere la generalità, ponendo, ad es., $M = \frac{\lambda}{\mu} M'$; poniamo inoltre:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = \varphi_1(x)\\ f(x) = f_1(x)\end{array}\right\} x < 0\,, \quad \left.\begin{array}{l}\varphi = \varphi_2(x)\\ f = f_2(x)\end{array}\right\} 0 \leq x \leq 1\,, \quad \left.\begin{array}{l}\varphi = \varphi_3(x)\\ f = f_3(x)\end{array}\right\} 1 < x\,.$$

Introduciamo poi una funzione $W(xy)$ così definita:

$$\left.\begin{array}{ll}W(xy) = M(xy) & y \leq x\\ W(xy) = 0 & y > 0\end{array}\right\} 0 \leq x \leq 1\,.$$

È evidente che con tali posizioni la (1) si scinde nelle tre seguenti:

$$(7)\quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 M(xy)\, \varphi_1(y)\, dy + \lambda \int_0^1 M_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy = f_1(x) \quad x < 0\,,$$

$$(8)\quad \varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 [W(xy) + M_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy = f_2(x) \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$

$$(9)\quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x M(xy)\, \varphi_3(y)\, dy$$
$$+ \lambda \int_0^1 [M(xy) + M_1(xy)]\, \mu_2(y)\, dy = f_3(x) \quad 1 < x\,.$$

Subito si noterà che, mentre la φ_2 figura ovunque, la φ_1 figura solo nella (7), e la φ_3 solo nella (9). Quindi converrà risolvere prima la (8). Essa non è altro che un'equazione di Fredholm, regolare, di seconda specie. Chiamando N la somma di W ed M_1, essa si scrive:

$$\varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 N(xy)\, \varphi_2(y) = f_2(x)\,.$$

Ora, al solito, vi sono tre casi:

a) λ *non è autovalore*. Allora la φ_2 esiste, è unica ed è data da:

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}, \lambda\right)}{D(\lambda)}\, f_2(y)\, dy.$$

La φ_1 e la φ_2 ci sono fornite allora dalle equazioni regolari di Volterra, ricavate da (7) e (9):

$$(10)\quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 M(xy)\, \varphi_1(y)\, dy$$
$$= \left[f_1(x) - \lambda \int_0^1 M_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x < 0\,,$$

$$(11)\quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x M(xy)\, \varphi_3(y)\, dy$$
$$= \left[f_3(x) - \lambda \int_0^1 [M(xy) + M_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x > 1\,.$$

Quindi, anche φ_1 e φ_3 esistono, e sono uniche. In particolare, se $f(x)=0$, sarà anche $\varphi(x)=0$.

b) λ *autovalore*, $f_2(x)=0$ (equazione omogenea). Supposto λ autovalore, la (8), ove $f(x)=0$, avrà r soluzioni linearmente indipendenti; da ciascuna di esse si ricava una φ_1 ed una φ_3 per mezzo delle (10), (11). In virtù di ciò, si vede che le diverse soluzioni sono esprimibili con combinazioni lineari di r soluzioni linearmente indipendenti.

c) λ *autovalore*, $f_2(x) \neq 0$. Allora: o la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità, e vi sono infinite soluzioni; o non vi soddisfa, e non vi sono soluzioni. Dire che la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità equivale a dire che la f le soddisfa pure, come è evidente.

4. Resta da trattare la (2), equazione mista di prima specie. Ma essa, seguendo il procedimento da me indicato altrove ([1]), si può ridurre ad equazione di prima specie del Fredholm.

Oppure, servendosi del metodo ora esposto, essa si può scindere nelle tre altre:

$$(12)\qquad -\lambda\int_x^0 \mathrm{M}(xy)\,\varphi_1(y)\,dy = \left[f_1(x)-\lambda\int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\,\varphi_2(y)\,dy\right] \quad x<0\,,$$

$$(13)\qquad \lambda\int_0^1 [\mathrm{W}(xy)+\mathrm{M}_1(xy)]\,\varphi_2(y)\,dy = f_2(x) \quad 0\leq x\leq 1\,,$$

$$(14)\qquad \lambda\int_1^x \mathrm{M}(xy)\,\varphi_3(y)\,dy = \left[f_3(x)-\lambda\int_0^1 [\mathrm{M}(xy)+\mathrm{M}_1(xy)]\,\varphi_2(y)\,dy\right] \quad x>1\,,$$

di cui la (13) deve essere, come la (8), risolta dapprima.

5. Riassumendo i risultati ottenuti in questa e nella precedente Nota, possiamo dire:

I. *Le equazioni lineari integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere si riducono ad equazioni integrali dello stesso tipo e di seconda (o terza specie).*

II. *Quelle tipo Volterra di terzo genere, ad equazioni dello stesso tipo e di prima specie.*

III. *Quelle tipo Fredholm e miste di primo e secondo genere in generale ad equazioni integrali miste (in particolare di Fredholm) di seconda (o terza) specie.*

IV. *Quelle tipo Fredholm e miste di terzo genere, al tipo misto di prima specie.*

([1]) *Sulle equazioni integrali*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, tom. XXXVII, 1° semestre 1914, pp. 72-109.

V. *Le equazioni integrali miste di seconda specie, si riducono alla soluzione successiva d'una integrale di Volterra o d'una di Fredholm, di seconda specie.*

VI. *Quelle di prima specie, ad equazioni di prima specie.*

Quindi, tutta la discussione delle integro-differenziali si può ricondurre, in modo semplice ed uniforme, alle teorie di Volterra e Fredholm.

Vi sarà quindi da attendersi l'esistenza di autovalori e di tutte le singolarità inerenti a tal caso; tratteremo in seguito qualche esempio.

Così, subito si vede che:

VII. *Le integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere sono sempre risolubili con sviluppi tipo Volterra.*

VIII. *Quelle dello stesso tipo, ma di terzo genere, sono soggette, per la risolubilità, a condizioni derivanti da quelle di risolubilità delle equazioni di Volterra di prima specie.*

Infine, se supponiamo di dover trattare una integro-differenziale lineare del Volterra, i cui nuclei sieno del tipo $F(xy)$: se cioè ci troviamo di fronte ad un problema ereditario (in cui la legge d'ereditarietà sia invariante attraverso il tempo), per quanto precede si vede che la sua riduzione ad equazione integrale di Volterra è esclusivamente operata con la composizione dei nuclei dati con le potenze $(x-s)^{\alpha}$.

E ricordando [1] che la composizione (secondo Volterra) di nuclei del *ciclo chiuso* (cioè funzioni di $x-s$) dà ancora nuclei dello stesso tipo, si può enunciare il teorema:

IX. *Ogni equazione lineare integro-differenziale di Volterra, i cui nuclei sieno del tipo* $F(x-s)$, *è riducibile ad un'equazione integrale di Volterra il cui nucleo è dello stesso tipo.*

Ovvero, in altre parole:

Le integro-differenziali lineari del ciclo chiuso si riducono ad equazioni integrali del ciclo chiuso.

E se l'equazione cui si giunge, è di seconda specie, si può subito dire che:

X. *La soluzione delle integro-differenziali del ciclo chiuso si effettua con operazioni dello stesso ciclo.*

[1] Volterra, *Leçons sur les éq. int. ed int.-diff.*, pp. 52 ecc.; 148; 150 ecc.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Effusso da un recipiente forato lateralmente.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una precedente Nota [1] ebbi a considerare il problema dell'efflusso permanente di un liquido attraverso un foro piccolissimo, praticato nel mezzo del fondo di un recipiente a sezione rettangolare. Ponendomi ora in condizioni analoghe, mi propongo di studiare il caso in cui il foro B è scolpito su una parete laterale ad una altezza h sul fondo.

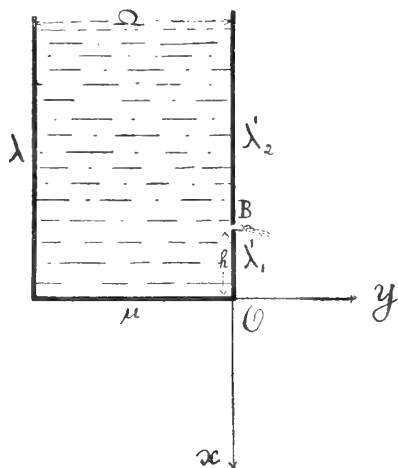



Fig. 1.

Ancor qui, come nel problema già studiato, si ha il regime uniforme in ocalità abbastanza lontana dall'orifizio. Ma, come è ben naturale, quando il foro è scolpito su parte laterale, la quota discriminante N dipende, oltre che dalla larghezza Ω del recipiente, anche dall'altezza h del foro sul fondo; in modo preciso basta assumere:

$$\frac{N}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7} \log_{10} \cosh \frac{\pi h}{\Omega} ,$$

per essere lecito ritenere sensibilmente in regime uniforme il liquido che si trova nel recipiente ad una quota non inferiore ad N.

I. Assunta una coppia di assi Oxy, come è indicata in figura, si ha sul fondo μ: $x = 0$ e $-\Omega \leq y \leq 0$; sulle pareti λ' e λ: $y = 0$, $y = -\Omega$

[1] *Efflusso da un recipiente forato sul fondo* (Questi Rendiconti, vol. XVII, 23 novembre 1913, pp. 473-478).

e $x \leq 0$; mentre il foro B ha per coordinate $x = -h$, $y = 0$. Diciamo λ'_1 e λ'_2 i due tratti, limitato ed infinito, in cui rimane divisa λ' dal foro B.

Siano al solito u e v le componenti della velocità, φ e ψ il potenziale di velocità e la funzione di corrente, e facciamo le consuete posizioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + iy = z \ , \\ u - iv = w \ , \\ \varphi + i\psi = f \ . \end{cases}$$

Rammentiamo ancora che w ed f, funzioni di z, sono legate fra loro dalla relazione:

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w \ .$$

La funzione $w(z)$ dev'essere regolare nel campo del moto, mentre sul contorno ed all'∞ la sua parte reale u, ed il coefficiente $-v$ dell'immaginario, devono soddisfare alle seguenti condizioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sul fondo} \quad \mu \ , \\ v = 0 \quad \text{sulle pareti } \lambda \text{ e } \lambda' , \\ \lim\limits_{x=-\infty} u = \dfrac{q}{\Omega} \ , \ \lim\limits_{x=-\infty} v = 0 \ , \end{cases}$$

avendo indicato con q la portata (costante) dell'efflusso, ed avendo ammesso che la densità costante del liquido sia $=1$.

Anche la funzione $f(z)$ dev'essere regolare entro il campo del moto, e la sua parte immaginaria $i\psi$ deve assumere valori costanti sul contorno. Se si attribuisce a ψ la determinazione che gli compete assumendo $\psi = 0$ in O, si dovrà avere

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi = 0 \quad , \quad \text{sopra } \lambda , \mu , \lambda'_1 , \\ \psi = q \quad , \quad \text{sopra } \lambda'_2 . \end{cases}$$

2. Converrà operare un cambiamento di variabile, il quale permetta di rappresentare il campo del moto in un semipiano. Designi ζ la nuova variabile complessa; vogliamo legare ζ a z mediante una relazione che permetta di rappresentare il campo del moto nel semipiano ζ di ordinate positive, in guisa che al contorno del campo z corrisponda l'asse reale del piano ζ, e precisamente λ, μ, λ'_1, λ'_2 vengano rappresentati rispettivamente dai tratti: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \zeta')$, $(\zeta', +\infty)$ dell'asse reale, il foro B avendo per corrispondente nel piano ζ il punto $\zeta' \geq 1$.

La teoria della rappresentazione conforme ci assicura la esistenza di una relazione tra z e ζ, la quale realizza l'accennato cambiamento di variabile. Prima di determinarla è lecito quindi sfruttarne l'esistenza.

Si considerino allora w ed f come funzioni della nuova variabile ζ nel semipiano ausiliare, esse vi devono essere regolari al finito e di più, a norma delle (3) e (4), si dovrà avere:

$$(3') \quad \begin{cases} u = 0 & \text{per} \quad 0 \leq \zeta \leq 1\,, \\ v = 0 & \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq 0\,,\ 1 \leq \zeta \leq +\infty\,, \\ w = \dfrac{q}{\Omega} & \text{all'}\ \infty\,; \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} \psi = 0 & \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq \zeta'\,, \\ \psi = q & \text{per} \quad \zeta' \leq \zeta \leq +\infty\,. \end{cases}$$

3. Facilmente si accerta che tutte qneste condizioni sono soddisfatte, ponendo:

$$(5) \qquad w = \frac{q}{\Omega}\,\frac{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}{\zeta-\zeta'}\,,$$

$$(6) \qquad f = iq - \frac{q}{\pi}\log(\zeta-\zeta')\,,$$

avendo adottato pel radicale $\sqrt{\zeta(\zeta-1)}$ la determinazione che è positiva per ζ reale e >1. Per queste, la (2) dà luogo a:

$$dz = \frac{1}{w}\,df = \frac{1}{w}\,\frac{df}{d\zeta}\,d\zeta = -\frac{\Omega}{\pi}\,\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}\,,$$

dalla quale, integrando e tenendo presente che a $\zeta = 1$ deve corrispondere $z = 0$, si ricava la relazione;

$$(7) \qquad z = -\frac{\Omega}{\pi}\int_1^\zeta \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\zeta-1)}} = \frac{\Omega}{\pi}\log\left\{2\left[\zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right] - 1\right\},$$

che è appunto quella che deve legare le variabili z e ζ nelle circostanze supposte.

4. Le (5) e (6) dànno w ed f in funzione di ζ; ci converrà esprimere le stesse funzioni per z. A tal uopo risolviamo la (7) rispetto a ζ. Per raggiungere l'intento nel modo più spiccio, scriviamo la (7) nel modo seguente:

$$(7') \qquad \zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{\frac{\pi z}{\Omega}}\right\},$$

e notiamo che la identità

$$\left\{\zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right\}\left\{\zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right\} = \zeta ,$$

permette, per la precedente, di scrivere:

$$(7'') \qquad \zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{2\zeta}{1+e^{\frac{\pi z}{\Omega}}} .$$

La eliminazione del radicale tra (7') e (7'') dà luogo ad una relazione lineare in ζ, che risoluta rispetto a ζ stessa dà infine l'espressione semplice:

$$(8) \qquad \zeta = \cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} .$$

Abbiamo chiamato ζ' il punto corrispondente a $z = -h$. Per la (8) avremo:

$$(9) \qquad \zeta' = \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega} .$$

Ora possiamo dare le espressioni definitive di w e di f in termini di z. Tenute presenti le (8) e (9), le (5) e (6) diventano infatti [1]:

$$(10) \qquad w = -\frac{q}{2\Omega} \frac{\operatorname{senh} \frac{\pi z}{\Omega}}{\cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega}} ,$$

$$(11) \qquad f = iq - \frac{q}{\pi} \log \left\{\cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega}\right\} .$$

5. Per $h = 0$, essendo $\cosh \frac{\pi h}{2\Omega} = 1$, le precedenti divengono rispettivamente:

$$(10') \qquad w = -\frac{q}{\Omega} \coth \frac{\pi z}{2\Omega} ,$$

$$(11') \qquad f = iq - \frac{2q}{\pi} \log \operatorname{senh} \frac{\pi z}{2\Omega} .$$

Queste relazioni coincidono (salvo la inessenziale costante additiva iq e il

[1] Nel fare le debite riduzioni per arrivare all'espressione di w, si tenga presente che per $z = -\infty$ dev'essere $w = \frac{q}{\Omega}$.

cambiamento di q e di Ω in $2q$ e 2Ω) colle (5) e (7) della Nota citata [1]. La coincidenza non è occasionale, anzi era prevedibile *a priori*, se si pensa che per $h = 0$ il foro è sul fondo e che è lecita *la riflessione* rispetto all'asse reale: si ha allora l'efflusso permanente di portata $2q$, da un recipiente largo 2Ω e forato nel mezzo del fondo.

6. Supponiamo $h > 0$, e ricaviamo da (11) le equazioni $\psi =$ costante, dei filetti liquidi. Si ottiene

$$\psi = q - \frac{q}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{\Omega}}{\coth \frac{\pi x}{\Omega} \cos \frac{\pi y}{\Omega} - \frac{\cosh \frac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh} \frac{\pi x}{\Omega}}} . \tag{12}$$

Sappiamo già che se $h = 0$, cioè quando il foro è scolpito sul fondo, il regime è sensibilmente uniforme per $x \leq -2\Omega$ [2]. Proponiamoci ora di determinare un numero $N \geq 2\Omega$ tale che anche per $h > 0$ si possa ritenere il regime uniforme quando $x \leq -N$.

Poichè $e^{-\pi} = 0.04\ldots$, avremo

$$0 \leq e^{\frac{\pi x}{\Omega}} \leq e^{-\frac{\pi N}{\Omega}} = (0.04\ldots)^{\frac{N}{\Omega}} ,$$

per $x \leq -N$. Ne segue che per tali valori di x,

$$-\frac{1}{\operatorname{senh} \frac{\pi x}{\Omega}} = \frac{2e^{\frac{\pi x}{\Omega}}}{1 - e^{\frac{2\pi x}{\Omega}}} ,$$

sarà compreso tra 0 e $\dfrac{2e^{-\frac{\pi N}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi N}{\Omega}}} = \dfrac{2(0.04\ldots)^{\frac{N}{\Omega}}}{1 - (0.04\ldots)^{\frac{2N}{\Omega}}}$; anzi poichè per $N \geq 2\Omega$ è

$$(0.04\ldots)^{\frac{2N}{\Omega}} \leq (0.04\ldots)^4 = 0.000002\ldots ,$$

[1] Nella (7) rilevo un errore tipografico: invece di $\frac{q}{\Omega}$ si deve leggere $\frac{q}{\pi}$. Durante la correzione delle bozze ho avuto occasione di leggere il recentissimo trattato di idrodinamica di Ramsey [*A Treatise on Hydrodynamics*, Part II; London, Bell, 1913] in cui a pag. 124 trovasi definita, a meno della costante iq, la formula (11').

[2] Cfr. la Nota citata.

si può ritenere senz'altro che $-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}}$ sia compreso tra 0 e $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}}$.

Dopo ciò siamo autorizzati a scrivere la seguente limitazione:

$$(13)\qquad 0 \leq -\frac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}} \leq 2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega}, \qquad (x \leq -N).$$

D'altra parte per $x \leq -N \leq -2\Omega$, è con grande approssimazione [1]

$$\coth\frac{\pi x}{\Omega} = -1.$$

Ciò posto, se si assume N in guisa che $-\dfrac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{h}}$ sia trascurabile, la (12) diviene:

$$(14)\qquad \psi = q + \frac{q}{\Omega} y,$$

dalla quale si desume che per $x \leq -N$ le linee di flusso sono a ritenersi parallele alle pareti, ed il regime uniforme.

Ora, avuto riguardo alla (13), se si assume N in guisa che la quantità $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}$ sia dell'ordine dei millesimi, ad es. ponendo

$$(15)\qquad (0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega} = 0.001,$$

siamo fatti certi che per un tale N e per $x \leq -N$ vale la (14), con molta approssimazione.

Da (15) ricavando $\dfrac{N}{\Omega}$ si ha, prendendo, per maggior comodità di calcolo, i logaritmi volgari, ed arrotondando lievemente le cifre:

$$(16)\qquad \frac{N}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7}\log_{10}\cosh\frac{\pi h}{\Omega}.$$

[1] Cfr. la Nota citata.

7. Nel caso particolare in cui il recipiente diviene infinitamente largo è $\Omega = \infty$, allora con un passaggio al limite, si ricava da (10) senza difficoltà:

$$w = \frac{2q}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2} . \tag{17}$$

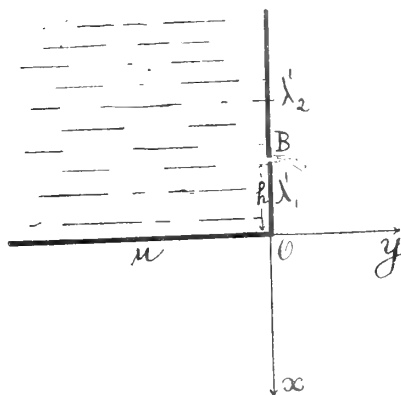



Fig. 2.

È facile ora esaurire la discussione, una volta in possesso dell' integrale (17) del movimento della massa liquida.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota I del dott. ing. Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sur certaines équations intégrales.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Geometria. — *Sulla equivalenza per traslazione.* Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

Grazie ad alcune osservazioni del prof. Eugenio Elia Levi, posso esporre per una via più semplice e più breve gli stessi risultati contenuti nella Nota del 9 novembre 1913 (vol. XXII, pag. 417), e togliere la condizione restrittiva che allora era occorsa nelle dimostrazioni.

Aggiungerò in fine la estensione ai poliedri della *equivalenza per traslazione*, chiamando, per brevità, *equivalenti per traslazione* due poligoni rettilinei in uno stesso piano, ovvero due poliedri rispettivamente, quando si possono decomporre in un numero finito di poligoni, ovvero di poliedri, parziali, sovrapponibili per traslazione.

1. Dato un insieme di vettori, si può considerare una nuova specie di somma, che chiameremo *somma orientata* dell'insieme. Essa coincide con la somma ordinaria, soltanto se i vettori considerati hanno la stessa direzione, ma se non l'hanno, la somma orientata dei vettori è il complesso dei vettori che si ottengono, dopo aver eseguito tutte le possibili somme di vettori aventi la stessa direzione, ed appartenenti all'insieme considerato.

L'operazione di *somma orientata*, eseguita sopra un insieme di vettori, riproduce quindi un insieme di vettori (che può ridursi talvolta ad un vettore unico, od anche essere nulla).

2. Si ha allora il teorema [1]:

Perchè due dati poligoni di egual area, nello stesso piano, siano decomponibili in un numero finito di parti eguali per traslazione, è necessario che sia eguale la somma orientata dei vettori dei lati dei due poligoni, quando questi lati siano immaginati percorsi nello stesso senso.

Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, la decomposizione dei due poligoni dati, ed immaginati tutti i contorni dei poligoni parziali, percorsi nello stesso senso, in ognuna delle due decomposizioni, sarà nulla la somma dei vettori dei lati interni ai due poligoni dati, poichè ogni lato di un poligono parziale è percorso in due versi opposti, secondo che lo si consideri come appartenente all'uno o all'altro dei due poligoni parziali adiacenti. Quindi la somma orientata dei vettori di tutti i lati di tutti i poligoni parziali (immaginati tutti percorsi nello stesso senso per ogni poligono), in ciascuna delle due decomposizioni, si riduce a quella dei vettori dei lati dei due poligoni dati; c. v. d.

3. Quindi è possibile, applicando questo teorema, decomporre due parallelogrammi equivalenti in un numero finito di parti eguali per traslazione,

[1] È questo il teorema comunicatomi, sotto altra forma, dal prof. Levi.

perchè la somma orientata dei vettori dei lati di qualsivoglia parallelogrammo è nulla.

È invece impossibile il decomporre in tal modo un triangolo ed il suo simmetrico rispetto al vertice, perchè, immaginandoli entrambi percorsi nello stesso verso, la somma orientata dei vettori dei lati dell'uno non è nulla, ed è essenzialmente diversa (anzi l'opposta) da quella dell'altro [1].

4. Possiamo ora estendere allo spazio queste considerazioni, osservando che ai lati di un poligono corrispondono, in certo modo, le faccie di un poliedro.

Converrà dapprima, dato un poliedro, distinguere per ogni sua faccia il verso, che sarà quello della normale interna al poliedro, ed attribuire poi ad ogni faccia un segno, in modo tale che due faccie parallele, ma di verso opposto, abbiano segno contrario. Ciò può farsi ad arbitrio. Per fissar le idee, supporremo positive le faccie tali che la loro normale interna faccia un angolo acuto con una direzione fissa; negative quelle che fanno un angolo ottuso, ecc.

Potremo allora considerare un certo ente, che chiameremo *somma orientata* delle faccie di uno o più poliedri, il quale coincide coll'insieme delle faccie stesse, col loro segno, quando nell'insieme non vi siano faccie parallele. Ma quando esso contiene più faccie parallele, ad esse sostituiremo un poligono avente la stessa giacitura ed avente per area la somma algebrica delle aree delle faccie parallele, considerate col loro segno.

Così, ad esempio, la somma orientata delle faccie di un parallelepipedo è sempre nulla.

5. Abbiamo allora il teorema:

Condizione necessaria affinchè due poliedri di egual volume siano decomponibili in poliedri parziali eguali per traslazione, è che sia eguale la somma orientata delle loro faccie.

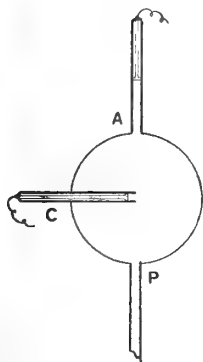
Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, in ciascuno dei due poliedri, la decomposizione in poliedri parziali, la somma orientata di tutte le faccie di tutti i poliedri parziali, in ciascuno dei due poliedri dati, si riduce a quella delle faccie del poliedro totale, essendo nulla quella delle faccie (o parti di faccie) comuni a due poliedri parziali adiacenti. c. v. d.

Applicando questo teorema, si vede che, mentre è possibile di decomporre in un numero finito di parti eguali per traslazione due parallelepipedi, è invece impossibile di far ciò per due piramidi simmetriche rispetto alla base; ecc.

[1] Con lo stesso metodo il prof. Levi ha altresì osservato che due pentagoni simmetrici non sono equivalenti per traslazione, ecc.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Socio A. RÒITI.

Nella Nota precedente [1] comunicavo alcune esperienze, con le quali la scomposizione di alcune righe spettrali dell'idrogeno, nella regione precatodica, scomposizione considerata come effetto del campo elettrico, veniva osservata secondo una direzione visuale perpendicolare al campo stesso.

La riga H_γ risultava scomposta in cinque elementi, con polarizzazione rettilinea, aventi i due esterni il piano di vibrazione parallelo, e i tre interni perpendicolare al campo.

Era da aspettarsi che, ove fosse riuscito di osservare la luce secondo una linea visuale parallela al campo elettrico, i due primi elementi necessariamente sarebbero mancati e gli altri tre sarebbero stati ancora osservabili. Per quanto tale osservazione presentasse speciali difficoltà, pure mi è parso che la mia disposizione potesse permettere di superarle; infatti sono riuscito ad ottenere alcuni resultati abbastanza chiari per formarne oggetto della presente Nota.

Ho sperimentato in due modi diversi. Nelle prime esperienze un palloncino di vetro, poco fusibile, porta saldate tre tubulature, di cui la P serve per mantenere l'idrogeno alla pressione opportuna coi soliti mezzi, la A porta saldato l'anodo, rivolto in basso, e la C, che penetra fino in prossimità del centro, regge il catodo in forma di disco, con la sua superficie a circa 5 mm. dall'estremo.

[1] Pervenuta alla R. Accademia nella seduta del 21 dicembre 1913.

In un tubo di tal forma, con una rarefazione opportuna, la luce anodica rimane nella tubulatura A; la luce negativa costituente il terzo strato secondo Hittorf è diffusa a cono nell'interno del palloncino, ed è assai poco intensa. Di modo che la parte più splendente viene ad essere costituita dalla luminosità dello strato immediatamente avanti al catodo.

L'asse del tubo C coincideva approssimativamente con quello del collimatore dello spettrografo; una lente convergente projettava su la fenditura di questo la detta luminosità precatodica, che era circondata da una debole aureola. Tra la lente e il palloncino poteva inserirsi un prisma birifrangente, il quale all'unica imagine sostituiva due imagini distinte una dall'altra, ma sempre allineate su la fenditura; e avanti al prisma si poteva mettere ancora una lamina di mica $^1/_4$ d'onda per una delle righe studiate.

Tale disposizione si presentava molto vantaggiosa quando non si volesse spingere troppo la rarefazione, poichè in quest'ultimo caso il riscaldamento intenso e concentrato, prodotto dai raggi catodici su la parete del tubo, ne cagionava la rottura.

Adottai quindi, in una seconda serie di esperienze, un'altra disposizione, che consisteva semplicemente nell'usare uno degli stessi tubi che avevano servito per l'osservazione trasversale, inclinato di un piccolo angolo su l'asse del collimatore, e facendo in modo che su la fenditura cadesse la projezione della sola luminosità precatodica.

Ho fatto diverse fotografie, nelle quali si osserva, secondo le previsioni, per la H_γ una tripla, che devesi considerare come originata dalle stesse oscillazioni che producono la tripla interna nell'effetto trasversale. Per assicurarmene, ho eseguito due prove con uno stesso tubo e con uguale caduta di potenziale, intensità di corrente e lunghezza dello spazio precatodico, ed ho trovato che la tripla osservata trasversalmente, e quella osservata longitudinalmente, comprendono lo stesso intervallo.

C'era da aspettarsi che nelle osservazioni longitudinali l'effetto Doppler dei raggi positivi diretti e retrogradi, cioè del movimento di una parte dei centri di emissione verso il catodo o nel verso contrario, potesse complicare il fenomeno in istudio, tanto più che l'ordine di grandezza degli spostamenti risulterebbe lo stesso. Ma la coincidenza avanti accennata, e la circostanza che le righe spostate per effetto Doppler nei gas rarefatti sono sempre molto sfumate e accompagnate da una più forte riga proveniente dai vibratori fermi, fanno concludere che colle durate di esposizione da me adoperate, le quali davano per la H_γ impressioni assai leggiere, lo spettrogramma di questa riga non fosse notevolmente perturbato da effetto Doppler.

Invece, questo sembra essere la causa di un'aureola diffusa, alquanto oscura nei negativi, la quale per ora offusca la H_β, e che probabilmente si potrà eliminare abbreviando opportunamente la esposizione e variando la dispersione.

Gli apparecchi di polarizzazione che erano stati inseriti solo per il sospetto che vi potesse essere una polarizzazione circolare, parendomi che il campo presentasse una sufficiente dissimmetria, non hanno modificato sensibilmente gli spettrogrammi.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe di Baumer presentano diverse forme di scomposizione.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Dispositivo herziano per osservazioni meteorologiche e previsioni di temporali.* Nota di A. TOSI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Un'antenna radiotelegrafica, un trasformatore di Tesla ad essa opportunamente collegato ad un *detector* riunito ad un telefono, questi ultimi applicati al trasformatore, costituiscono i principali apparati che permettono di accertare la presenza di onde herziane emesse da una stazione a portata dell'antenna. L'impiego ordinario di tali apparati è quello delle segnalazioni a distanza, la ricezione cioè di radiotelegrammi, consistente nell'assieme di rumori brevi e lunghi uditi nel telefono del *detector*; rumori che corrispondono ai punti e alle linee coi quali si formano le lettere e, quindi, le parole secondo l'alfabeto Morse.

Questi rumori che si manifestano nel telefono del *detector*, sono generati, nel caso generale, allorchè delle onde herziane, dovute a scariche oscillanti artificialmente, prodotte in una stazione, vengono a colpire l'antenna; ed i rumori brevi o lunghi corrispondono a scariche brevi o lunghe, create a volontà dall'operatore.

Il tòno dei rumori uditi nel telefonò dipende dalla frequenza, dai *periodi* dell'alternatore che si impiega per ottenere la scarica oscillante alla stazione trasmettente; di modo che, variando i periodi degli apparati generatori di onde herziane, varierà il tòno del rumore al telefono ricevitore, e potremo ottenere in esso una nota musicale, se la stazione trasmettente impiegherà un alternatore a un tale numero di periodi che diano le vibrazioni corrispondenti a quelle che occorrono per dare una nota musicale.

Ricordiamo che il *do* più grave del violoncello, che corrisponde a quello più basso di un piano a sei ottave, fa 66 vibrazioni al secondo. Questa Nota, che si otterrebbe da un alternatore a 33 periodi, sarebbe troppo bassa; e, siccome, per contraddistinguere le stazioni l'una dall'altra e per essere

sicuri di ricevere al telefono del *detector* i segnali herziani in qualsiasi condizione atmosferica, si è riconosciuta l'utilità di impiegare note musicali *alte*, così gli alternatori per onde herziane si fanno a partire da un numero di periodi che dia il *la* del *diapson*, il *la* della 4ª ottava del piano, e più in su. Ricordando che le vibrazioni di questo *la* sono circa 880, e che circa 1000 sono le vibrazioni del *si* della 4ª ottava del piano, un tipo comnnissimo di alternatore radiotelegrafico è quello a 500 periodi, che dà un bellissimo si_3 al telefono. Alternatori a 1000 periodi dànno il *si* dell'ottava sopra (si_4) molto acuto.

Un semplice dispositivo permette di variare le oscillazioni prodotte dallo stesso alternatore: e quindi, volendo, una stazione può generare varie note musicali; fino a riuscire a far sentire a centinaia di chilometri, senza filo, sui telefoni degli apparati ricevitori, una melodia, semplice sì, ma intonatissima.

Mentre l'uomo può creare delle scariche oscillanti e farle variare entro limiti estesissimi, ottenendo come conseguenza una vibrazione dell'antenna e la ricezione di note musicali qualsiansi al telefono del *detector*, la natura ci fornisce delle scariche oscillanti le quali fanno egualmente vibrare la antenna e che egualmente producono dei rumori nel telefono del *detector*. Queste scariche sono quelle elettriche atmosferiche, visibili od invisibili, le quali però sono a bassa frequenza; e la loro presenza è manifestata, al telefono del *detector*, con un rumore sempre molto grave, completamente diverso da quello della nota musicale radiotelegrafica. Di conseguenza, se una stazione radiotelegrafica riceve un radiotelegramma mentre l'atmosfera è carica di elettricità, si udiranno contemporaneamente, al telefono, rumori di tonalità completamente diversa i quali si percepiranno distintamente gli uni dagli altri. Se quindi una stazione meteorologica è munita di un'antenna e di un apparato ricevente radiotelegrafici, l'osservatore sarà sempre in grado di conoscere, anche in condizioni di tempo apparentemente calmo, se l'atmosfera è carica o no di elettricità, e così avere segni precursori di prossimi uragani.

Però l'antenna ordinaria ad irradiazione circolare, usata in radiotelegrafia, non risolve esaurientemente il problema, giacchè essa percepisce uniformemente le scariche da qualsiasi punto esse provengano; il che fa sì che il telefono del *detector* ci accuserà la presenza di scariche atmosferiche, senza però poterci dire la *direzione* in cui esse si manifestino, mentre la conoscenza di ciò è di somma importanza per gli scopi meterologici.

Ad ottenere tale *desideratum*, si presta in modo pratico ed esatto un semplice dispositivo basato sull'impiego, nelle stazioni meteorologiche, di una antenna a circuito oscillante chiuso, di forma poligonale qualsiasi, contenuta in un piano verticale: antenna dirigibile, la quale, come si sa, ha la proprietà di oscillare al massimo, secondo il suo piano, e nulla rigorosamente

nel piano perpendicolare. Questa antenna speciale, convenientemente unita al *detector* dà quindi ricezione o ricezione massima al telefono allorchè essa è orientata nella direzione da cui provengono le scariche, mentre nessun rumore è percepito al tetefono quando è orientata nella direzione perpendicolare; in altre parole, messo il telefono all'orecchio, facendo lentamente rotare l'antenna fino ad avere ricezione o ricezione massima, l'orientazione dell'antenna che dà tale ricezione indicherà la direzione da cui provengono le scariche atmosferiche.

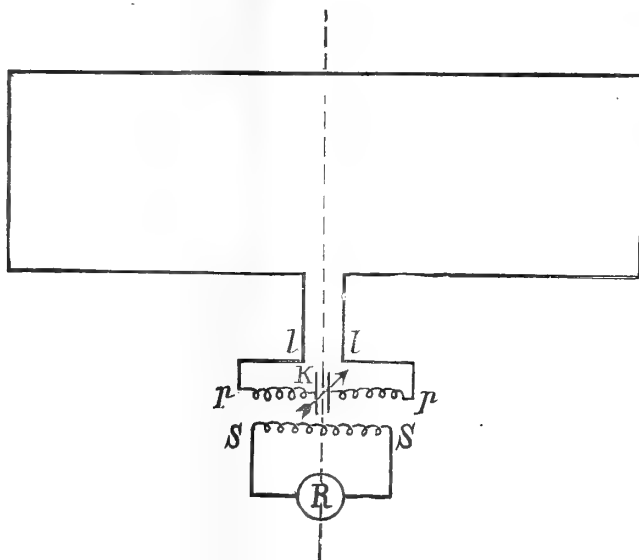



Fig. 1.

Il dispositivo più semplice è dato da un'antenna costituita da un conduttore di rame piegato a forma di rettangolo, giacente in un piano verticale, isolato, reso rigido in modo che possa rotare attorno alla mediana (fig. 1). Gli estremi *l l* di tale antenna sono fissati agli estremi *p p* del primario di un trasformatore mediante uno speciale contatto, a mercurio o di altro tipo, che permetta la rotazione degli estremi dell'antenna; il primario del trasformatore è interrotto al centro da un condensatore variabile K. Al secondario SS del trasformatore sono collegati i soliti apparati di ricezione telefonica, il cui complesso si indica con R.

Se quest'antenna, girevole attorno al suo asse, viene rigidamente collegata, debitamente isolata, all'apparato rotante che serve ad indicare la direzione del vento, l'osservatore, notando l'orientazione dell'antenna e mettendo il telefono all'orecchio, conoscerà la direzione del vento e la presenza di scariche atmosferiche in quel piano, se ve ne sono [1].

[1] Il dispositivo può essere, naturalmente, anche indipendente dal mostravento.

L'antenna rotante, di cui sopra, non può avere grandi dimensioni; ma, data la potenza delle scariche oscillanti atmosferiche, anche in scala limitata tale antenna permetterà di conoscere l'esistenza di scariche atmosferiche a distanze rilevanti, quando esse non sono percettibili nè all'occhio nè allo orecchio dell'osservatore.

Se poi l'osservatorio deve essere munito di un dispositivo il quale possa far conoscere a centinaia di chilometri la presenza e la direzione di scariche atmosferiche, allora la sistemazione da usarsi è la seguente:

Tenendo presente che, nella pratica, quello che occorre è la conoscenza o la previsione di venti o di temporali dai quattro punti cardinali e dai quattro intercardinali, in luogo di un'unica antenna mobile attorno al suo asse, se ne sistemeranno quattro fisse, come ora viene indicato: Le quattro antenne ognuna costituita da un filo di rame di una forma poligonale qualsiasi, sono tutte rigorosamente eguali l'una all'altra, contenute ognuna in un piano verticale, angolarmente equidistanti, simmetriche ognuna rispetto all'asse verticale che le divide in due parti e i quattro assi di simmetria si confondono in uno solo. Per quanto precede, dando ad ogni antenna la forma p. es. di un triangolo o di un rettangolo, il complesso delle quattro, isolate l'una dall'altra, formerà le costole di una piramide retta o di un prisma retto a base ottagonale. Le quattro antenne sono orientate nei piani N-S, E-W, NE-SW, NW-SE. Il primario di un trasformatore, interrotto al centro da un condensatore, ha i suoi estremi fissati su una coppia di contatti, diametralmente opposti, che possono rotare nel senso dell'*azimut*; questa coppia di contatti scorre a dolce frizione sulle coppie di estremi delle antenne, in modo tale che una sola antenna per volta possa essere unita al primario del trasformatore. Il secondario del trasformatore è identico a quello precedentemente indicato.

Ciò posto, per riconoscere se vi sono scariche atmosferiche ed in quale direzione, l'osservatore metterà il telefono all'orecchio e farà rotare il contatto mobile del primario del trasformatore sulle coppie di estremi delle antenne fino a percepire rumori o i massimi al telefono. L'orientamento della antenna che, a contatto col primario, ha permesso la ricezione dei rumori al telefono, indicherà la direzione da cui provengono le scariche.

Nei due tipi di dispositivi descritti, un commutatore che permette di mettere a terra separatamente l'uno o l'altro estremo del primario del trasformatore, isolando contemporaneamente l'estremo di antenna unito all'estremo del primario messo a terra, farà conoscere il senso da cui provengono le scariche; giacchè le antenne a circuito chiuso irradiando nel loro *piano*, vi sarebbe eguale ricezione al telefono tanto se le scariche venissero da N, quanto se venissero da S, p. es., e vi sarebbe il dubbio, senza il commutatore anzidetto. La differenza di suono nel telefono, a seconda che è isolato l'estremo anteriore o quello posteriore dell'antenna, permette di conoscere il

senso delle scariche; avendosi suono più forte allorchè è isolato l'estremo opposto al senso delle scariche.

I dispositivi descritti, semplici come parte aerea e come istrumenti herziani, sono poco ingombranti e di poco costo. Essi rappresentano la riunione di cose note formanti un tutto che risolve un problema nuovo e di grande importanza per la meteorologia, quale è quello di conoscere con molto anticipo l'approssimarsi di temporali e la loro provenienza; il che non permettono sempre di conoscere i mezzi di cui finora dispongono gli osservatori meteorologici.

Ben lieto se questa mia Nota porterà ad una installazione di prova in un osservatorio, mi metto a disposizione per collaborare alla sistemazione del dispositivo per la migliore riuscita.

Chimica-fisica. — *La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione* [1]. Nota di M. Padoa e G. Tabellini, presentata dal Socio G. Ciamician.

La questione dell'associazione fra solvente e corpo sciolto, per quanto sia stata attaccata con mezzi varî, può dirsi ancora controversa, almeno dal punto di vista quantitativo. Mendelejeff [2] ammise che le molecole *intere* potessero dare un certo numero di idrati, ben definiti, ed in generale con poche molecole d'acqua. Appena sorta la teoria della dissociazione elettrolitica, Ciamician [3] ebbe primo l'idea della idratazione degli ioni, che, come egli dice, doveva sorgere quasi come conseguenza della teoria della dissociazione.

Nei tempi più recenti, fra i più caldi fautori di una teoria degli idrati, troviamo Washburn, l'Armstrong e collaboratori, e soprattutto il Jones [4] che vede nelle deviazioni dalle leggi delle soluzioni diluite, nelle anomalie dell'assorbimento della luce, ed in altri fenomeni, altrettante prove rigorose dell'idratazione di molecole e ioni sciolti, non solo, ma vuol trarne deduzioni quantitative, calcolando il numero di molecole d'acqua combinàte nei varî *solvati*. Non occorre dire che questi risultati quantitativi variano assai secondo il metodo seguìto; così mentre Jones [5] trova, in base ai punti di congelamento, che in una soluzione circa $^1/_4$ molecolare di bromuro di litio ogni

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Zeitschr. für Physik. Chemie (1887), I, 273.

(3) Questi Rendiconti, 1891, I, 16.

(4) Vedi ad es. Am. Chem. Journal, *23*, 89 (1900) (Jones e Chambers); Jones, Journal de Chimie Physique (1905), 455; (1912), 217.

(5) Journal de Chimie Physique (1903), 489.

molecola del sale è associata con 17,8 molecole d'acqua, Riesenfeld e Reinhold [1] da misure della mobilità degli ioni e di numeri di trasporto trovano che, a diluizione infinita, ogni ione litio trasporta 150 a 158 molecole d'acqua ed ogni ione bromo 20, talchè ogni grammimolecola dissociata dovrebbe assumere circa 170 molecole d'acqua. Neppure la considerazione che i dati del Jones si riferiscono ad una soluzione non diluitissima, bastano a giustificare l'enorme diversità dei risultati; si consideri del resto che alla concentrazione detta, il sale è dissociato per $^3/_4$ e quindi non molto lontano dalla condizione limite. Si noti ancora che secondo il Jones l'idratazione in soluzione talvolta aumenta e talvolta diminuisce coll'aumentare della concentrazione, e talvolta ancora presenta un massimo ad una certa concentrazione, mentre secondo Riesenfeld e Reinhold l'idratazione massima si ha sempre a diluizione infinita. Ma forse la grande diversità dei risultati ha in parte la sua ragione nella natura stessa del fenomeno per la grande instabilità dei complessi idrati, e forse non vi ha un altro ordine di fatti in cui si debba rimanere maggiormente incerti fra la qualità fisica o chimica dell'attrazione esercitata fra le molecole del solvente e quelle del corpo sciolto. Certamente l'esistenza di sali cristallizzati con un numero più o meno grande di molecole d'acqua parla in favore dell'esistenza di veri composti anche in soluzione, almeno per ciò che riguarda alcune delle molecole di solvente congiunte a quelle disciolte. Se però si considera che la stabilità di molti composti (corpi racemici, composti fra metalli ecc.) è quasi completamente legata allo stato solido, viene fatto di pensare che nelle soluzioni il numero di molecole di solvente così combinate non debba essere tanto grande come certi calcoli potrebbero far credere. Il fatto che gli ioni nel migrare attraverso il solvente ne possano trascinare una forte quantità, non sembra costituire una prova che tutte le molecole di solvente trascinate siano veramente combinate.

Un'altra questione strettamente connessa a quella degli idrati in soluzione è la seguente: in qual misura il potere d'idratazione competa alle molecole intere ed agli ioni. Nessuno può dubitare che l'idratazione sia possibile in entrambi; ma sembrerebbe che i più volessero ammettere che la tendenza a combinarsi col solvente fosse maggiore per gli ioni. Tuttavia vi sono certe esperienze le quali farebbero piuttosto pensare, secondo il nostro avviso, ad un potere d'idratazione uguale: il colore delle soluzioni di cloruro e bromuro di rame e di cobalto [2] non varia sensibilmente coll'ag-

(1) Zeitschrift für Physik. Chemie (1909), *66*, 672.

(2) Lewis, Zeitschrift für Physik. Chemie, *52* (1905), 224; *56* (1906), 223. Vedi anche Washburn, *Hydrates in solution* (1909), *66*, 513. Che il colore delle soluzioni non abbia a che fare con la ionizzazione, almeno nella più parte dei casi, come voleva Ostwald, lo ha fatto notare per primo Magnanini (Gazz. Chim. ital., 1893; vedi anche Mem. R. Acc. Scienze Modena, 1912). Ciò è stato confermato poi in modo esauriente dai recenti lavori di Hantzsch (vedi ad es., Berichte, 1911, 44, 1783).

giunta di sali contenenti rispettivamente ione cloro e ione bromo; varia invece se il corpo aggiunto è avido d'acqua, e ciò indipendentemente dalla qualità e dal grado di ionizzazione. Le variazioni di colore sono dunque dovute almeno in gran parte a variazioni nel grado d'idratazione, e su quest'ultima, come sul colore, non avrà dunque influenza la retrocessione della dissociazione prodotta da un eccesso di un ione comune.

Finalmente, di un'altra proprietà dei solventi non ci sembra abbiano tenuto conto tutti gli autori che si sono occupati di questo argomento: e cioè dell'associazione. Non può negarsi che la polimerizzazione del solvente possa avere un'influenza nelle sue relazioni col corpo sciolto, e ciò, sia che si consideri la questione dal punto di vista della mole dei complessi formati, sia che si voglia indagare l'origine delle variazioni di contenuto di energia durante la soluzione. Ora il solvente più comune, l'acqua, è indubbiamente polimerizzato; e ci sembra, in accordo in questo con H. E. Armstrong [1], che le molecole del corpo che si scioglie, per combinarsi con l'acqua, debbano prima di tutto depolimerizzarla; avvenuto ciò, non è detto che non si possano formare anche dei grossi complessi, ma intanto bisogna por mente al fatto, che se si considera, ad esempio, l'acqua in condizioni usuali come costituita in media da complessi $(H_2O)_3$ per arrivare nelle soluzioni ad un *grado d'associazione medio* uguale a quello del solvente puro, bisogna che ogni molecola o ione del corpo sciolto assuma qualche molecola semplice d'acqua.

Misure di tensione superficiale sopra delle soluzioni acquose sono state fatte in precedenza da Quincke [2], Traube [3], Buliginsky [4] ed altri; sopra miscele di acqua ed alcool sperimentò Grunmach [5] e sopra soluzioni saline in alcool Cederberg [6]. Inoltre Whatmough [7] determinò il valore della tensione superficiale in molte miscele binarie. Le costanti di Eotvös vennero determinate per soluzioni acquose di cloruri, solfati e nitrati da Grabowski e Paun secondo i quali il grado di associazione non varia nel processo di soluzione; altre determinazioni sono dovute a Zemplèn [8] secondo il quale devesi tener conto della dissociazione dei sali sciolti. Più interessanti per noi sono alcune misure di Linebarger [9] sopra soluzioni acquose di acido solforico, dalle quali l'A. conclude che si ha forte associazione.

[1] Chemical News, *39*, 28.
[2] Poggendorf Ann., *160*, 565 (1877).
[3] Journal f. Prakt. Chemie, *31*, 197 (1885).
[4] Poggendorf. Ann., *134*, 440.
[5] Annalen d. Physik, *38*, 1018.
[6] Journal de Chimie Physique, 1911, 3.
[7] Zeitschrift für Physik. Chemie *39*, 129.
[8] Ann. d. Physik. *20*, 873, *22*, 390.
[9] Centralblatt 1900, I, 580.

Il metodo di misura da noi adottato è quello di Morgan e Higgins [1] che ha dato buoni risultati anche a M. Padoa e F. Bovini [2] nelle misure riguardanti i racemi liquidi ed i relativi componenti attivi, che vennero poi confermate perfettamente da altre misure compiute, forse nello stesso tempo, e certamente senza sapere delle nostre, da Duncan Mitchell e Clarence Smith [3] sulle medesime sostanze, col metodo dell'ascensione capillare.

Il metodo Morgan consiste nella determinazione del peso delle goccie che si staccano dall'estremità di un tubo di vetro di forma e dimensioni opportune. In realtà si misura, per mezzo di un lungo capillare preventivamente tarato, il volume di ogni goccia, e, per mezzo della densità data da un picnometro, il peso delle goccie. Tutto l'apparecchio deve essere chiuso ed immerso in un termostato, che in questo caso sarà un grande recipiente di vetro. L'agitazione dell'acqua si può fare con un molinello ad aria calda; noi abbiamo anche pensato di sospendere il molinello sopra il recipiente per mezzo di scatole a sfere come si usano per le biciclette, e ciò per evitare l'ingombro di un albero che discenda in fondo al recipiente ed il pericolo che il peso possa romperlo.

Dopo aver costruito un apparecchio adatto con un tubo d'efflusso del diametro esterno di circa mm. 6, abbiamo verificato il suo funzionamento sopra un liquido a comportamento conosciuto, cioè il benzolo. I risultati sono i seguenti:

Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia (mm.)	Peso della goccia mg.	K
20°	35,5	31,169	
			2,68
30	34,5	29,592	
			2,61
40	33,5	28,078	

Da questi si calcola una costante media K = 2,64 che corrisponde molto bene al valore di Morgan [4] K = 2,57.

Ciò posto siamo passati al solvente che più c'interessava, l'acqua:

Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia	Peso della goccia mg.	K
20°	77,4	77,262	
			1,42
30	76,3	75,064	
			1,32
40	75,3	72,984	
			1,33
50	74,3	70,847	

(1) Zeitschrift für Physik. Chemie, *64*, 170.
(2) Vedi F. Bovini, *Sull'esistenza dei racemi allo stato liquido*, tesi di laurea (1912).
(3) Journal of the Chemical Society (1913), 489.
(4) Zeitschrift für Physik. Chemie, *63*, 163.

Il valore medio è K = 1,35; esso è soddisfacente se si considera che per mezzo dell'ascensione capillare altri autori dànno un valore medio di 1,12, e che i valori ottenuti con le goccie sono sempre un po' più elevati di quelli ottenuti con l'altro metodo.

In seguito noi abbiamo eseguito delle misure sopra soluzioni mono- e triplomolecolari di cloruro ammonico; con soluzioni monomolecolari di cloruro di cobalto; con soluzioni monomolecolari di bromuro di sodio; con soluzioni monomolecolari di cloruro di magnesia e finalmente con soluzioni mono-, bi- e triplomolecolari di acido cloridrico ([1]). I risultati ottenuti sono i seguenti:

	Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia	Peso delle goccie in mg.	K
I NH_4Cl sol. N.	20°	80,0	83,632	1,27
	30	79.3	81,848	1,25
	40	78,5	80,004	1,21
	50	77,8	78,282	
II NH_4Cl sol. 3 N.	20	79,9	81,194	1,80
	30	78,3	78,542	1,76
	40	76,7	75,975	1,67
	50	75,2	73,519	
III $CoCl_2$ sol. N.	30	78,5	86,180	1,71
	40	77,3	83,846	1,71
	50	76,1	81,522	
IV NaBr sol. N.	30	79,4	83,128	1,50
	40	78,3	80,869	1,44
	50	77,3	78,712	
V $MgCl_2$ sol. N.	30	23,0	80,362	1,65
	40	21,4	78,045	1,62
	50	20,8	75,769	
VI HCl sol. N.	30	23,5	80,884	1,20
	40	23,0	79,059	1,17
	50	22,5	77,277	
HCl sol. 2 N.	30	23,0	80,444	0,73
	40	22,7	79,342	0,93
	50	22,3	77,932	
HCl sol. 3 N.	30	22,4	79,828	0,73
	40	22,1	78,690	0,72
	50	21,8	77,590	

([1]) Si noti che non potemmo ottenere, per cause non determinate, risultati costanti con soluzioni 2 N e 4 N di NH_4Cl; con soluzioni $\frac{1}{2}$ N, 2 N, 3 N di $CoCl_2$, con soluzioni 2 N di NaBr ed $MgCl_2$, con soluzioni di HCl oltre il triplonormale. Così pure non si prestarono alle misure il cloruro d'alluminio, l'allume, gli acidi bromidrico e iodidrico.

I gruppi V e VI di misure furono esegniti con un apparecchio diverso da quello impiegato in precedenza. Ogni dato è la media di molte misure.

Il valore della costante K è calcolato mediante la formula

$$K = \frac{p\left(\frac{M}{d}\right)^{\frac{2}{3}} - p_1\left(\frac{M}{d_1}\right)^{\frac{2}{3}}}{t_1 - t}$$

dove p e p_1 sono i pesi delle goccie (¹) alle temperature t e t_1, d e d_1 sono le densità delle soluzioni a quelle stesse temperature, ed M il *peso molecolare medio* del liquido. Solitamente, trattandosi di un solvente puro, M sarebbe il peso molecolare del solvente stesso, $\frac{M}{d}$ ed il volume ed $\left(\frac{M}{d_1}\right)^{\frac{2}{3}}$ la superficie molecolare. Noi abbiamo creduto lecito estendere il concetto di superficie molecolare anche ad una miscela liquida, e perciò in luogo del peso molecolare del solvente abbiamo introdotto il peso molecolare medio, ottenuto prendendo in considerazione i numeri di molecole e le grandezze molecolari del solvente e del corpo sciolto.

Si noti però che questa variazione non implica, per soluzioni poco concentrate come le nostre (nei riguardi dei rapporti molecolari), che piccole differenze nei valori di K; e se si volesse obbiettare che la superficie di una soluzione potrebbe essere costituita da puro solvente, si può mostrare facilmante che mantenendo ad M il valore del solvente, K varia assai poco; così nel gruppo I scenderebbe soltanto da 1,24 a 1,155 (²). Ed ora veniamo a considerare i risultati; nel gruppo I abbiamo per soluzioni monomolecolari una costante leggermente superiore a quella dell'acqua, e per soluzioni trimolecolari una costante leggermente inferiore, ciò che starebbe ad indicare che nel primo caso sarebbero combinate poche molecole d'acqua, e che la associazione si farebbe più sensibile nelle soluzioni triplomolecolari, così da formare complessi di mole un po' maggiore di quelli dell'acqua pura.

Nei gruppi II, III e IV abbiamo ottenuti con soluzioni monomolecolari valori di K leggermente più alti di quelli dell'acqua, ciò che starebbe ad indicare una limitata associazione fra solvente e corpo sciolto, per quanto

(¹) Si noti che il peso delle goccie indica direttamente il valore relativo della tensione superficiale, riferendosi naturalmente ad un medesimo apparecchio di deflusso; essa ci risulta, come ai precedenti sperimentatori, superiore per le soluzioni rispetto al solvente puro.

(²) Guye, in una recente pubblicazione [Journal de Chimie Physique (1911), 505], sostiene che non si può dar fede alle misure della tensione superficiale nei riguardi della costituzione *interna* di un liquido; in altri termini, un composto che può esistere all'interno, potrebbe non esistere, secondo Guye, alla superficie, o viceversa. Noi crediamo che per giudicare su tale questione occorrano degli studî piezochimici; in ogni caso sarà sempre interessante accertare lo stato molecolare alla superficie dei liquidi.

riesca difficile comprendere da qual causa provengano gli aumenti nei valori di K rispetto all'acqua.

I migliori risultati, secondo il nostro avviso, li abbiamo ottenuti nel gruppo V con soluzioni di acido cloridrico; risultati che crediamo ci autorizzino a dare alle misure di tensione superficiale il valore di un criterio, almeno qualitativo, per giudicare della quantità di solvente combinata al soluto. È indubitato che l'acido cloridrico si combina con l'acqua: la sua grande solubilità l'innalzamento del punto d'ebullizione rispetto all'acqua, l'assenza di proprietà acide in soluzioni non acquose, ne sono altrettante prove. Ora ciò è rivelato chiaramente anche dai valori di K che per soluzioni normali sono di 1,17 a 1,20, per soluzioni doppio normali variano da 0,73 a 0,93 e per soluzioni triplonormali da 0,72 a 0,73. Per quanto noi sappiamo, non sono mai state trovate per altri liquidi, costanti così basse, che indicano fortissima associazione. Dalla diminuzione, prima rapida, poi più lenta dei valori di K sembra si possa arguire che nelle soluzioni triplo normali il massimo dell'associazione è quasi raggiunto; si noti che il rapporto molecolare corrispondente è per soluzioni normali $1\,HCl : 54{,}3\,H_2O$; per soluzioni doppio normali $2\,HCl : 53{,}2\,H_2O$; e per soluzioni triplo normali $3\,HCl : 52{,}2\,H_2O$.

Le presenti esperienze non ci hanno dato risultati esaurienti, sia perchè non tutte le sostanze prese in esame si prestavano a misure con questo metodo, sia ancora perchè le misure stesse non potevano estendersi entro larghi limiti di concentrazioni. Tuttavia ci sembra che i dati esposti sieno tali da rendere abbastanza promettente un'estensione delle ricerche in questo senso.

Chimica fisica. — *Solubilità e attività.* Nota di G. Pellini e A. Coppola, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Calori di combustione di sostanze fototrope.* Nota di M. Padoa e B. Foresti [1], presentata dal Corrispondente G. Ciamician.

Per l'incertezza che regna tuttora sulla natura delle trasformazioni fototropiche, non ci è dato di fare *a priori* previsioni sulle variazioni del contenuto di energia che potrebbero verificarsi durante tali trasformazioni; tuttavia, la prontezza con la quale la luce provoca le modificazioni di colore, in parecchie sostanze sensibili, faceva pensare che il lavoro eseguito in queste trasformazioni dovesse essere minimo.

Poichè per ispiegare la fototropia sembra si debba ricorrere a fenomeni di polimerizzazione o di isomerizzazione, è bene citare alcuni degli esempî più importanti in cui sono state osservate delle differenze nei calori di combustione. Così, per un gr. delle seguenti sostanze sono stati ottenuti i seguenti sviluppi di calore [2]:

	calcolato	differenza
Alcool propilico	8311	89
Alcool isopropilico	8222	
Metilnitrile	7613	157
Metilisonitrile	7770	
Azossibenzolo	7725	106
p-Ossiazobenzolo	7619	
Eugenolo	7840	54
Isoeugenolo	7786	
α-Ionone	9551	22
β-Ionone	9573	
Nitrito di etile	4456	50
Nitroetano	4506	
Etere α-formilfenilacetico	6868,3	16,4
Etere β-formilfenilacetico	6851,9	

Circa l'etere formilfenilacetico [3], bisogna osservare che la forma α è liquida, mentre la β è solida: e quindi, per confrontare i due dati termici, occorre aggiungere al calore di combustione di quest'ultima il relativo calore di fusione. Questo non è ancora noto: ma, osservando che, fra i corpi orga-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
[2] Phys. Chem. Tabellen Landolt. Bornstein, 1912. Si tratta di piccole calorie.
[3] Wislicenus, Liebigs Ann. *291*, 147 (1896).

nici, quello che ha il calore di fusione minimo è il bibromoetilene (calorie 13,2 per grammo), mentre tutti gli altri presentano calori di fusione molto più elevati, e cioè circa 30 cal. come valore medio, non saremo lontani dalla realtà aggiungendo 30 cal. al calore di combustione della forma β, che è 6851,9; in tutto, sarebbero cal. 6881,9, e cioè 13,6 in più rispetto alla forma α.

Più interessante per noi, dato il risultato di alcune esperienze eseguite in questo laboratorio [1] sulla velocità di trasformazione di sostanze fototrope, è il considerare i calori di combustione dell'antracene e del diantracene che, come è noto, possono costituire un equilibrio fotochimico [2]. F. Weigert [3] ha trovato per il primo cal. 9541, e pel secondo 9500: la differenza è piccola, considerando anche l'elevatezza di questi calori di combustione.

Per ciò che riguarda le sostanze fototrope è noto che si è tentato, invano finora, di osservare un'emissione di radiazioni durante il processo di scoloramento.

Noi ci siamo dunque proposti di misurare direttamente il valore relativo del contenuto d'energia in sostanze fototrope, prima e dopo l'esposizione alla luce, eseguita a mezzo della bomba calorimetrica. L'apparecchio da noi adoperato era una bomba di Mahler con rivestimento in platino iridiato; la determinazione del valore in acqua del calorimetro venne fatta bruciando zucchero ed acido benzoico purissimi, ed i risultati da noi ottenuti sono i seguenti:

	Acido benzoico (cal. 6325,4)		Saccarosio (cal. 3952)
	330,9		333,3
	335,2		332,7
	333,2		336,0
Valore medio	333,2	Valore medio	334,0

La media generale ci dà, per l'equivalente in acqua, il valore 333,6.

In tutte le nostre misure tenemmo conto: *a*) del calore di combustione del filo di ferro che serviva per l'accensione; *b*) della quantità di calore svolta nella formazione di acido nitrico (cal. 227 per g.) dall'ossigeno e dall'azoto sempre contenutovi, o proveniente dalle sostanze azotate che venivano bruciate; *c*) degli scambî di calore che avvengono con l'esterno, servendoci della formula di Regnault-Pfaundler che venne usata da F. Stohmann e C. Elaber [4] nelle loro misure sotto la forma:

$$\Sigma\Delta t = \frac{v - v_1}{\tau_1 - \tau}\left(\sum^{n-1}\delta v + \frac{\delta_n + \delta_1}{2} - n\tau\right) - (n-1)\,v.$$

(1) M. Padoa e Teresa Minganti. Questi Rendiconti, 1913, II, 500.

(2) Luther e Weigert, Zeitschrift für physikalische Chemie, 1905 (*51*), 297.

(3) Zeitschrift für Physik. Chemie, *63*, 458.

(4) Journal für prakt. Chemie [1889] 518.

$\Sigma \Delta t$ sarebbe la quantità di calore irraggiato, che viene poi addizionata allo sviluppo osservato nel calorimetro; v è la media differenza di temperatura per ogni minuto delle osservazioni preliminari: v_1 è la stessa grandezza per le osservazioni finali; τ è la media temperatura delle prime; τ_1 è la media temperatura per le seconde; n è il numero delle letture termometriche dell'osservazione principale; e δ_1, δ_n sono le temperature relative.

Le letture termometriche dell'osservazione preliminare non si cominciavano a fare se non quando il termometro segnava incrementi di temperatura di un millesimo di grado circa, uguali per ogni minuto. Per avere questo lento innalzamento della temperatura dell'acqua del calorimetro, occorreva che quella del recipiente esterno si trovasse ad una temperatura superiore di un grado circa.

I. Fra le sostanze fototrope ci preoccupammo di scegliere quelle che presumibilmente potevano ottenersi allo stato *puro* nella forma colorata, e che non retrocedevano con velocità tale da non consentire l'esecuzione delle misure. Prima fra queste è indubbiamente la saliciliden-β-naftilamina che può ottenersi a mezzo dei solventi nelle due forme e che ha già servito ultimamente per le citate misure di velocità di trasformazione. Per garantirci che la sostanza fosse esente da impurità, siamo partiti da aldeide salicilica e naftilamina purissime, e le abbiamo fatte combinare in quantità perfettamente equivalenti; quest'ultima precauzione è necessaria soprattutto per ottenere la forma rossa, poichè questa non può venire ricristalizzata a scanso di vederla trasformarsi nella forma gialla; del resto, per ottenerla pura, nelle condizioni predette, è sufficiente di lasciare soggiornare a lungo la sostanza sotto alcool, avendo cura di tenere bene rimescolato il prodotto della reazione; quando il colore ha assunto la sua intensità massima, si filtra e si lava più volte con alcool. Per entrambe le modificazioni avevamo il punto di fusione a 125°.

I risultati ottenuti nelle combustioni furono i seguenti [1]:

Forma gialla	Forma rossa
cal. 8290,0	cal. 8291,0
» 8280,0	» 8311,9
» 8291,2	» 8278,9
» 8305,4	» 8295,8
Valore medio: cal. 8291,5	Valore medio: cal. 8294,4

La differenza è di sole calorie 2,9.

II. Dato questo risultato, rimaneva da vedere se una sostanza fototropa d'altro tipo si sarebbe comportata similmente: finora non sono note altre sostanze di cui si possano isolare le due modificazioni, come per la prece-

[1] I nostri dati si riferiscono tutti a calori di combustione a volume costante.

dente: siamo allora ricorsi al fenilidrazone della benzaldeide (opportunamente purificato), che può essere colorato alla luce in modo per noi praticamente stabile. Ecco i risultati termici che da esso abbiamo ottenuti:

Forma stabile all'oscuro	Forma stabile alla luce
cal. 8674,2	cal. 8663,4
" 8661,2	" 8654,9
" 8664,8	" 8661,0
" 8663,4	" 8665,4
" 8676,4	" 8687,0
" 8673,4	" 8683,0
Valore medio: cal. 8668,8	Valore medio: cal. 8669,1

Anche qui la differenza è minima: 0,3 calorie. Queste differenze sono imputabili ad errori di misura, i quali, per quante precauzioni si prendano, sono sempre superiori assai alle differenze da noi ottenute; per citare un parere autorevole in proposito, ricordiamo che il Nernst [1] non ritiene sicura neppure la differenza, riscontrata dagli autori, di 57 cal. per grammo fra l'acido maleico ed il fumarico, per quanto ammetta che, per un medesimo sperimentatore, l'errore possa essere ridotto. Comunque sia, è certo che oggigiorno i chimici si trovano di fronte a trasformazioni di cui il valore energetico non è apprezzabile coi mezzi di misura, ancora grossolani di cui disponiamo: e così probabilmente avverrà per le numerose sostanze cromoisomere che oggi si conoscono.

Cristallografia. — *Bournonite della miniera di Brosso* (Piemonte) [2]. Nota di E. Grill, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

Debbo alla squisita e ben nota cortesia del capitano Alberto Pelloux, appassionato collezionista e valente mineralogo, al quale esprimo anche qui tutta la mia viva riconoscenza, l'aver potuto studiare alcuni buoni cristalli di bournonite, provenienti dalla miniera di Brosso e raccolti dal Pelloux stesso in una faglia del cantiere Fortune.

In Italia, com'è noto, la bournonite in distinti cristalli è piuttosto rara. Finora è stata trovata solo in alcune poche località: A val di Castello (Pietrasanta) [vedi, A. D'Achiardi, Boll. R. Comm. geol. ital., pag. 164 (1871); Mineralogia della Toscana, II, pag. 335 (1873); U. Panichi, Rend.

(1) Theoretische Chemie, VII ediz. (1913), 632.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia di Firenze.

R. Accad. d. Lincei, vol. XIX, pag. 690 (1910)]; al Sarrabus (Sardegna) [vedi, F. Millosevich, Rend. R. Accad. d. Lincei, vol. XV, pag. 457 (1906)]; quindi mi è sembrato non privo d'interesse il far conoscere la paragenesi e l'abito dei cristalli di questa nuova località.

È anche noto che in Piemonte la bournonite in stato cristallino venne trovata già da parecchio tempo in diversi luoghi (vedi G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia: regione delle Alpi*, 1873): a Gravere (Val di Susa), insieme con galena; a Ceresole Reale, con tetraedrite; a Testa della Deserta e Sutore presso Noasca (Val Locana), con pirite e tetraedrite; ad Antey St. Andrè (Val Tournanche), con calcopirite e galena; e ancora, sempre secondo Jervis, a Brosso, con pirite e calcopirite.

La bournonite di questa ultima località, mandatami dal Pelloux, si presenta sopra una ganga di quarzo ove è accompagnata, oltrechè da pirite e calcopirite, anche da cristalletti di quarzo, galena, mesitina e dolomite. La maggior parte di essa è in masserelle cristalline, con lucentezza sub-metallica alquanto iridescente; in veri e proprî cristalli d'una lucentezza metallica vivissima si trova soltanto in alcuni punti, meno compatti, della ganga quarzosa.

I cristalli sono relativamente piccoli, con la maggior dimensione per lo più inferiore ai 2 mm.; e si presentano con un abito generalmente tozzo, alquanto irregolare e complesso. Tale complessità è dovuta alla associazione di due o più individui uniti parallelamente fra loro oppure in geminazione, nonchè alla distorsione delle facce. Anche nei singoli individui l'abito non è mai tabulare, conservando esso in tutti una tendenza più o meno marcata alla forma prismatica quasi isodiametrica o con una maggior dimensione secondo l'asse [z].

Le forme osservate sono le seguenti 18:

$a\{100\}$	$m\{110\}$	$o\{101\}$	$n\{011\}$	$y\{111\}$
$b\{010\}$	$e\{210\}$	$x\{102\}$		$u\{112\}$
$c\{001\}$	$l\{320\}$			$g\{221\}$
	$f\{120\}$			$v\{211\}$
	$\vartheta\{430\}$			$\theta\{212\}$
	$K\{540\}$			$\varrho\{121\}$

Relativamente ai cristalli di bournonite italiana, quelli di Brosso risultano, fino ad oggi, i più ricchi di forme. Infatti al Sarrabus (loc. cit.) ne furono osservate 9, cioè: a, b, c, m, l, n, y, u, ϱ; e a Val di Castello (loc. cit.) 14, cioè: a, b, c, m, e, f, ϑ, ω, o, x, n, y, u, s; tra le quali la piramide $s\{212\}$ e il prisma verticale $\omega\{340\}$, non trovate, per ora, nè al Sarrabus, nè a Brosso.

Delle combinazioni, riporto solo le seguenti, poichè vennero osservate su cristalli semplici:

1°) *a c m y o u x* ϑ,

2°) *y c o a m e l u* **v**,

3°) *o n b u a e l m* **K** ϑ *f y*.

Le forme vi sono ordinate secondo il loro sviluppo decrescente, e quindi si può subito constatare che il pinacoide *c*}001{ non è mai la forma dominante. Manca perciò l'abito tabulare vero e proprio, così ben marcato invece per i cristalli dei giacimenti di Val di Castello e del Sarrabus. Nella 3ª combinazione, detto pinacoide non esiste, e il cristallo ove fu osservato è depresso e quasi come appiattito (vedi fig. 1) secondo le facce di *o*}101{ e di *n*}011{.

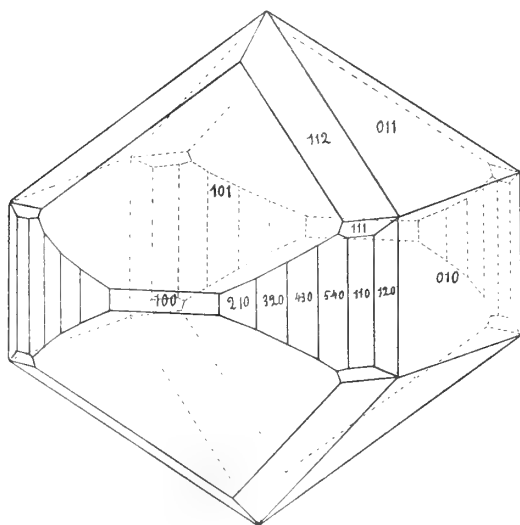



Fig. 1.

Un tale abito sembra rarissimo nella bournonite in genere, infatti nei moltissimi. (se pur non in tutti) cristalli fin qui studiati, compare sempre la forma *c*}001{ più o meno sviluppata, come risulta anche dai numerosi disegni raccolti nell'*Atlas der Krystallformen von Victor Goldschmidt*, Heidelberg 1913, Bd. I, Tafeln 219-230, fig. 1-174.

Del resto, la stentata formazione di *c*}001{ anche negli altri cristalli di Brosso sembra già accennata dall'aspetto fisico delle facce del pinacoide basale, le quali si presentano sempre poco lucenti e poco piane per una leggera ondulatura che ne deforma e talvolta maschera completamente le immagini luminose.

Tutte le altre forme hanno invece facce piane, liscie, speculari, dalle quali si ottengono buone misure. Solo il prisma verticale *m*}110{ si presenta per lo più striato parallelamente all'asse [*z*]: e ciò è dovuto, nel maggior numero dei casi, ad una associazione di più cristallini uniti fra loro in combinazione oscillatoria.

Nel quadro seguente sono riportati tutti i valori angolari da me osservati:

Angoli	N.	Valori estremi	Medie	Valori calcolati $a:b:c = 0,93797:1:0.89686$ (Miller)	Differenza fra media e calcolo
$a:o = (100)(101)$	4	46°17′ - 46°12′	46°14′	46°17′	— 3
$a:x = (100)(102)$	2	64 30 - 64 26	64 28	64 27	+ 1
$a:l = (100)(320)$	2	31 50 - 31 46	31 48	32 1	— 23
$a:e = (100)(210)$	1	—	24 52	25 8	— 16
$a:u = (100)(112)$	1	—	66 26	66 26	0
$a:y = (100)(111)$	2	54 33 - 54 31	54 32	54 33 1/2	— 1 1/2
$a:m = (100)(110)$	4	43 24 - 43 0	43 12	43 10	+ 2
$a:c = (100)(001)$	1	—	89 50	90 0	— 10
$a:\vartheta = (100)(430)$	2	35 13 - 35 11	35 12	35 8	+ 4
$b:f = (010)(120)$	1	—	28 10	28 4	+ 6
$b:m = (010)(110)$	1	—	46 55	46 50	+ 5
$b:K = (010)(540)$	2	52 40 - 52 20	52 30	53 7	— 37
$b:\vartheta = (010)(430)$	1	—	54 54	54 52	+ 2
$b:l = (010)(320)$	3	57 53 - 57 45	57 51	57 59	— 8
$b:e = (010)(210)$	1	—	64 35	64 52	— 17
$b:n = (010)(011)$	3	48 7 - 48 4	48 6	48 6 3/4	— 0 3/4
$c:m = (001)(110)$	1	—	89 55	90 0	— 5
$c:y = (001)(111)$	1	—	52 53	52 40	— 17
$c:u = (001)(112)$	1	—	32 58	33 15	— 17
$m:m = (110)(1\bar{1}0)$	6	86 20 - 86 12	86 18	86 20	— 2
$m:l = (110)(320)$	2	11 25 - 11 22	11 23 1/2	11 9	+ 14 1/2
$m:e = (110)(210)$	1	—	17 45	18 2 1/2	— 17 1/2
$m:y = (110)(111)$	3	37 19 - 37 2	37 9	37 20	— 11
$m:u = (110)(112)$	3	56 42 - 56 30	56 40	56 45	— 5
$m:g = (110)(221)$	1	—	20 56	20 52 1/2	+ 3 1/2
$o:x = (101)(102)$	1	—	18 20	18 10	+ 10
$o:\theta = (101)(213)$	1	—	17 40	17 58 1/2	— 18 1/2
$o:v = (101)(211)$	3	29 25 - 29 3	29 9	28 59	+ 10
$o:n = (101)(011)$	2	57 31 - 57 29	57 30	57 27	+ 3
$e:v = (210)(211)$	2	25 22 - 25 18	25 20	25 20	0
$e:\theta = (210)(213)$	1	—	54 57	54 51	+ 6
$f:\varrho = (120)(121)$	2	26 8 - 26 4	26 6	26 12	— 6
$y:u = (111)(112)$	1	—	19 25	19 25	0

Dei 63 spigoli misurati, solo alcuni si scostano di parecchi minuti primi dal valore teorico: e ciò è dovuto o alla imperfezione delle facce, o alla loro piccolezza; tutti gli altri concordano abbastanza bene con i valori calcolati dalle costanti di Miller per la bournonite di Cornovaglia. Infatti, 23 medie su 33 non differiscono più di 10′ dai valori teorici: e, di queste, molte differiscono anche assai meno. Nella colonna delle differenze del quadro precedente risulta, ancora, che le medie hanno una leggera tendenza a mantenersi inferiori ai valori ottenuti col calcolo.

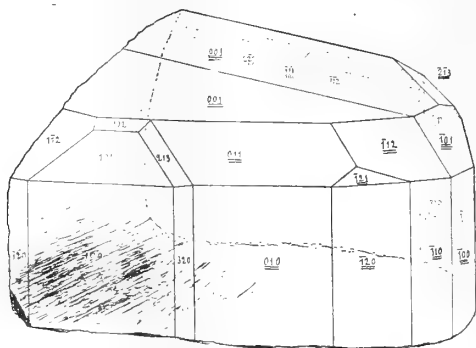



Fig. 2.

Salvo i tre cristalli di cui ho riferito più sopra le combinazioni cristalline, e alcune scheggie di cristallo che mi hanno pure servito per la misura di alcuni angoli, tutti gli altri cristalli si presentano multipli per associazione parallela, per geminazione, o per l'una e l'altra assieme. La geminazione avviene sempre secondo una faccia di *m* }110{: e con l'unione di altri cristalli paralleli al primo individuo o al secondo, si ha un complesso alquanto rotondeggiante o leggermente cuneiforme (fig. 2). Non ho osservato complessi con la ben nota e caratteristica forma a croce o a stella o a ruota dentata (i *Rädelerz* di Kapnik in Ungheria).

Nella fig. 2 ho disegnato una delle geminazioni di Brosso. Si vedono 3 cristalli, di cui 2 più grandi uniti fra loro parallelamente e geminati col 1° secondo la legge comune. Il complesso dei 3 individui presenta le seguenti forme: }001{ }100{ }010{ }101{ }110{ }120{ }112{ }111{ }121{ }320{ }210{ }221{ }Ī11{ }213{ }211{ }102{. Anche qui la faccia (001) è ondulata e poco lucente, mentre tutte le altre, all'infuori di (110) e (Ī12) fortemente striate, sono lucidissime e dànno quindi delle buone immagini.

Per decifrare il complesso in questione, misurai i seguenti angoli calcolati sempre in costanti di Miller:

(100) (010) =	mis.	3°45′	calc.	3°40′
(100) (Ī20) =	»	31 50	»	31 44
(100) (Ī10) =	»	50 50	»	50 30
(100) (Ī00) =	»	94 9	»	93 40

$(100)\ (\bar{2}\bar{1}0) =$	mis.	119°10′	calc. 118°48′
$(100)\ (\bar{3}\bar{2}0) =$	»	125 33	» 125 41
$(100)\ (\bar{1}\bar{1}0) =$	»	136 55	» 136 50
$(101)\ (011) =$	»	3 9	» 3 1
$(101)\ (\bar{1}12) =$	»	32 10	» 32 12

Dal calcolo, le facce (320) e $(\bar{1}20)$ risultano fra loro parallele: e, infatti, anche alla misura, esse sono tali, dando, assieme, un'immagine unica, nettissima. L'individuo posteriore, cioè il 3°, non è unito in posizione esattamente pa rallela al 2°, poichè le immagini delle sue facce verticali sono alquanto spostate rispetto a quelle date dalle facce verticali del 1° e del 2° e quindi gli assi [z] fanno fra loro un piccolo angolo.

Geologia. — *La penisola Valdéz, e le forme costiere della Patagonia settentrionale.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Corrispondente A. Issel.

Una esplorazione che ho fatta, per il gentile aiuto del direttore del Museo de Historia Natural di Buenos Aires, il dott. Angel Gallardo, nel mese di dicembre del 1912, della penisola Valdéz, mi ha permesso di riconoscere che tale interessante aggetto delle coste della Patagonia settentrionale è un grande frammento del tavolato patagonico, che gli sprofonpamenti verticali — quelli stessi che in un'altra mia Nota, inserita in questi *Rendiconti*, ho invocato per spiegare l'origine della morfologia dei dintorni di Bahía Blanca e del golfo di San Matias — hanno isolato dal continente; però non del tutto, perchè l'istmo che lo unisce alla terraferma, non è di formazione posteriore, ossia *aggiunto*, come di frequente si osserva nelle penisolette costiere, ma sì bene un residuo dello stesso altipiano, rimasto interchiuso fra i due grandi archi di sprofondamento cui sono dovuti il golfo Nuevo e il golfo di San Josè, i quali si interpongono fra la penisola e il continente.

Questa affermazione si basa, non solo sulla forma singolare di questi golfi o, meglio, baie, che sono semicircolari, a fondo piatto e non eccessivamente profondo, circuiti da una costa a falesie; ma anche sulle condizioni morfologiche e tettoniche dell'interno della Penisola. Quivi, difatti, si osservano due grandi conche chiuse, incavate interamente nel tavolato, che hanno nome di Salina Grande e di Salina Chica, la prima di kmq. 31.51, la seconda di kmq. 22, circuite quasi interamente da versanti a picco o assai ripidi, con un fondo piatto e salino (perchè furono laghi salati ancora in tempi relativamente recenti), situato a 48 m. sotto il livello del mare; per modo che è certo che se si fosse potuta aprire una breccia nell'altipiano

che le circonda, sino a dare ingresso al mare, esse sarebbero diventate baie morfologicamente identiche, salvo le dimensioni, ai golfi ora ricordati.

Ora, che esse siano dovute a movimenti tettonici di sprofondamento, è facile constatarlo, coordinando lo studio delle condizioni morfologiche con quello delle strutturali: lo sprofondamento sino a 48 m. sotto il livello del mare, ha prodotto un dislivello di 118 m. in media, perchè l'altitudine media della Penisola è da calcolarsi in m. 70; però, avendosi alture che attorno alla Salina Grande raggiungono i 130 m., tale dislivello sarebbe localmente di m. 178: il salto che ne risulta non è mai vinto da una sola parete a picco, ma sì da un a picco basale di 60-70 m. di altezza, cui succedono pendìi poco inclinati, oscuramente terrazzati a due livelli: la serie dei terreni costituenti in modo uniforme la Penisola, perchè a strati perfettamente orizzontali, consiste in un banco affiorante, per pochi metri di altezza, alla base delle falesie (a San Josè, a Punta Norte, a Punta Delgada), avente una fauna fossile eguale a quella che gli Ameghino hanno riscontrata nella Patagonia meridionale e che hanno provvisoriamente indicata con il nome di superpatagoniano, riconoscendola una *facies* marina del più noto santacruziano; a questo superpatagoniano, per uniformità di nomenclatura, suggerirò di dare il nome di *aonikense* (da *Aóniken* altro nome dei Tehuelches): sull'aonikense si basa in perfetta concordanza la serie degli strati entrerriani, con i fossili più caratteristici della lontana provincia di Entrerrios, ed ha una potenza di circa 60 m.: con lieve trasgressione, non sempre avvertibile, succede un cappello di strati marini e terrestri alternati, fra cui l'arenaria azzurra fosfatica collegata a marne gessose, e raramente solfifere, con strati di ghiaiuzze, da riferirsi all'araucano.

In complesso si ha, quindi, una serie ainokense-entrerriana-araucana, avente in media 70 m. di spessore, che non potrebbe da sola costituire le pendici attorno alle Saline che raggiungono, in cifra tonda, i 180 m. di altezza; ma essa vi si vede ripetuta a tre livelli differenti, ben riconoscibili per avere ciascuno a cappello la formazione araucana; per cui è indiscutibile, e graficamente risulta chiarissimo, che le depressioni chiuse, ricettanti la Salina Grande e la Salina Chica, sono dovute a sprofondamenti circolari, verticali, coadiuvati da *faglie ausiliarie* che hanno ridotto a gradinata la parte periferica. E se insisto molto su queste osservazioni, si è perchè assai pochi sono i casi di sprofondamenti simili che siansi potuti accertare mediante constatazioni stratigrafiche.

Si può all'incirca stabilire l'età di questi sprofondamenti, considerando che il più recente terreno interessato dalle faglie è l'araucano inferiore, ossia il pliocene inferiore, e, inversamente, che attorno al golfo Nuevo ho riconosciuto un terrazzo del quaternario medio; per cui gli sprofondamenti sarebbero avvenuti, o durante il pliocene medio e superiore, oppure durante il quaternario inferiore.

Di più, se si vuol dare valore ad un fatto negativo, il quaternario inferiore sarebbe da escludersi, poichè mancano nella Penisola le ghiaie fluvio-glaciali del tehuelchense, ossia del più antico quaternario, mentre esistono sulla costa di contro, a Punta Ninfa che interchiude il golfo Nuevo; per cui questo golfo già sarebbe esistito nel quaternario inferiore per potere impedire all'alluvione tehuelchense di raggiungere la Penisola.

Il tehuelchense è stato segnalato solo per errore nella Penisola, perchè ad esso si riferirono le ghiaiette che dovunque prendono parte alla costituzione del suolo, e che sono il prodotto del disfacimento, in posto, della formazione araucana.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli.* Nota I di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

La misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli, i quali, di solito, hanno piccole dimensioni, richiede metodi e strumenti più precisi di quelli che servono per le verghe o fili. Per la misura della dilatazione termica dei cristalli, il miglior e quasi unico metodo finora seguìto è quello di Fizeau, che potrebbe anche servire per la misura della dilatazione elastica [1].

Il metodo seguente, fondato sulla proprietà dei reticoli di diffrazione, parmi di applicazione piuttosto facile, e parmi anche non meno esatto di quello di Fizeau.

Se sulla faccia piana, riflettente o trasparente, d'un cristallo, si traccia un reticolo di diffrazione, o se ne produce una copia fotografica aderente, e coi soliti modi si produce con esso e si osserva uno spettro d'ordine tanto alto quanto è possibile, compatibilmente colla necessaria luminosità, la posizione delle righe di questo spettro sarà determinata dalla solita relazione:

$$\text{sen}\, i + \text{sen}\, e = m\lambda/s\,, \tag{1}$$

essendo i ed e gli angoli d'incidenza e d'emergenza, contati nello stesso verso, dei raggi considerati, λ la loro lunghezza d'onda, m l'ordine dello

[1] Se nel cristallo si tagliano due larghe faccie piane e parallele e, per quanto è possibile, distanti, e nel mezzo perpendicolarmente ad esse, si fa un foro attraversante; se inoltre in questo si colloca un cilindretto di prova, di vetro o quarzo, colle basi quasi parallele e distanti poco meno della distanza delle faccie suddette; collocando il tutto fra due robuste lamine piane e trasparenti orizzontali, fra la base superiore del cilindretto e quella inferiore della lamina adiacente potranno osservarsi le solite frange di interferenza delle lamine sottili, ed esse si sposteranno (e deformeranno) per effetto d'una pressione esercitata sulle lamine, e non sul cilindretto, e potrà dedursene la diminuzione di spessore del cristallo.

spettro, s la larghezza d'un elemento (cioè d'uno spazio oscuro, più l'adiacente spazio brillante) del reticolo.

Se il cristallo si dilata o si contrae per effetto d'una variazione di temperatura o di pressione, si dilaterà o contrarrà nella stessa proporzione s; e per la (1), essendo i ed m costanti, se è costante anche λ, varierà e, l'angolo d'emergenza, ossia la direzione dei raggi producenti una determinata riga dello spettro; se invece è costante e, varierà λ, la lunghezza d'onda dei raggi che cadono sul filo mediano dell'oculare fisso.

Così, riscaldando di 100° un cristallo il cui coefficiente di dilatazione sia 10.10^{-6}, le righe del sodio nello spettro normale di 3° ordine si sposteranno di $3.589.10.10^{-6}\,\mu\mu$, ossia di 0,1767 unità Angström per grado, 17,67 per 100°, quantità facilmente osservabile e misurabile esattamente.

Comprimendo invece nella direzione di s un cristallo il cui coefficiente di allungamento per trazione sia 100.10^{-6} per kgr. e mm², lo spostamento delle suddette righe sarà di 1,77 u. A. per kgr. e mm²; mentre, se la compressione avvenisse in senso perpendicolare alla direzione di s, lo spostamento sarebbe di circa 0,6 u. A. per kgr. e mm², in senso opposto al precedente.

Allorchè si riscalda il reticolo, per effetto dell'ugual riscaldamento dell'aria o gaz che lo circonda, oltre s, vengono a variare, sebbene molto meno, anche le altre variabili, cioè, variano i ed e per effetto della rifrazione dei raggi incidenti e di quella dei raggi emergenti nel passaggio dell'aria ambiente all'aria calda, o viceversa; e varia altresì λ, la lunghezza d'onda dei raggi che producono una determinata riga, per effetto della diminuita densità dell'aria adiacente al reticolo.

Indicando con n l'indice di rifrazione dell'aria, con T la temperatura assoluta, e considerando e come funzione di i, λ, e T, mentre i e λ sono funzioni di n, ed n ed s sono funzioni di T, potrà porsi:

$$(2) \qquad de = \frac{\partial e}{\partial i}\frac{di}{dn}\frac{dn}{dT}dT + \frac{de}{dn}\frac{dn}{dT}dT + \frac{\partial e}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dn}\frac{dn}{dT}dT + \frac{\partial e}{\partial s}\frac{ds}{dT}dT$$
$$= d'e + d''e + d'''e + d^{\text{iv}}e\,.$$

Si può notare che, sebbene le variazioni di n ed s, e quindi quelle di i e di e, siano così piccole che possono esser trattate, senza errore apprezzabile, come infinitesime, ciò tuttavia non è ammissibile per le variazioni di T, che non sono neppure piccole; ma la relativa integrazione non altera essenzialmente la suddetta uguaglianza. Difatti:

La legge della variazione dell'indice di rifrazione dell'aria colla temperatura può esser espressa, almeno approssimativamente, da:

$$(n-1)\,T = C \text{ costante,}$$

donde si ricava:

$$dn/dT = -(n-1)/T\,;$$

quindi:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{n-1}{T}\, dT = +\int_{T_2}^{T_1} C\,\frac{dT}{T^2} = -C\,\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

$$= -(n_1 - 1)\,\delta T/T_2 = -(n_2 - 1)\,\delta T/T_1 = \delta T \sqrt{(n_1 - 1((n_2 - 1)/T_1 T_2} \,.$$

Ponendo

$$n_1 = n_m + \varepsilon ,\; n_2 = n_m - \varepsilon \quad , \quad T_1 = T_m - t ,\; T_2 = T_m + t ,$$

trascurando ε^2 ed eseguendo l'estrazione approssimata della radice, si ricava

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = -\,(1 + t^2/2T_m^2)\,\frac{n_m - 1}{T_m}\,\delta T ,$$

essendo δT la differenza delle due temperature, ed n_m e T_m l'indice di rifrazione medio e la temperatura media. Trascurando $t^2/2T_m^2$ si ha, approssimativamente,

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = \frac{n_m - 1}{T_m}\,\delta T \quad \text{ossia} \quad = \frac{dn}{dT}\,\delta T \,.$$

Similmente, ma con maggiore approssimazione, potrà porsi

$$\int_{T^1}^{T_2} \frac{ds}{dT}\, dT = \frac{ds}{dT}\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{ds}{dT}\,\delta T \,;$$

ossia dn/dT e ds/dT, nel caso attuale e prendendone il valor medio, possono esser considerati come costanti, e l'integrazione si effettua su dT, che diviene perciò una differenza finita.

1. *Spostamento delle righe prodotto dalla variazione, per rifrazione, dell'angolo d'incidenza.*

$$d'e = (\partial e/\partial i)\,(di/dn)\,(dn/dT)\,\delta T \,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial i = -\cos i/\cos e \,.$$

La legge di rifrazione dà:

$$n \operatorname{sen} i_1 = \text{costante},$$

indicando con i_1 l'angolo che fa il raggio incidente colla normale alla superficie di separazione dell'aria ambiente dall'aria calda; differenziando, poichè gli indici di rifrazione dei due mezzi differiscono di pochissimo si ricava:

$$di_1/dn = -\operatorname{tang} i_1/n \,,$$

che ci dà anche la deviazione di_1 che subisce il raggio. Si ha dunque:

$$d'e = -(\cos i/\cos e)\,(\operatorname{tang} i_1/n)\,(n - 1)\,\delta T/T \,.$$

2. *Spostamento delle righe prodotto dal variare, per rifrazione, dell'angolo di emergenza.*

$$d''e = (de/dn)\,(dn/dT)\,\delta T\,.$$

La legge di rifrazione, indicando con e_1 l'angolo che fa il raggio proveniente dal reticolo colla normale alla superficie di separazione dell'aria calda dall'aria ambiente, dà:

$$n \operatorname{sen} e_1 = \text{costante}\,.$$

Se ne ricava:

$$de_1/dn = -\operatorname{tang} e_1/n\,,$$

quindi, poichè dn qui è negativo,

$$d''e = +\operatorname{tang} e_1 \frac{n-1}{n}\frac{\delta T}{T}\,.$$

3. *Spostamento delle righe prodotto dalla variazione della lunghezza d'onda nell'aria.*

$$d'''e = (\partial e/\partial\lambda)\,(d\lambda/dn)\,(dn/dT)\,\delta T\,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial\lambda = m/s \cos e$$

Inoltre si ha:

$$n\lambda = \text{costante} \quad , \quad dn/d\lambda = -\lambda/n\,;$$

quindi:

$$d'''e = -\frac{m\lambda}{s\cos e}\frac{n-1}{n}\frac{\delta T}{T}\,.$$

4. *Spostamento delle righe prodotto dalla dilatazione del reticolo.*

$$d^{\text{IV}}e = (\partial e/\partial s)\,(ds/dT)\,\delta T\,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial s = -m\lambda/s^2 \cos e\,;$$

inoltre, dalla legge di dilatazione,

$$\partial s/\partial T = Ks_0\,;$$

quindi:

$$d^{\text{IV}}e = -m\lambda K\delta T/s \cos e\,.$$

5. *Spostamento complessivo delle righe.* — Può essere osservato e misurato con un oculare mosso (esso o il filo oculare) con una vite micrometrica; oppure, più semplicemente, con un oculare a scala fissa nel piano focale.

Se δa è lo spostamento assoluto d'una riga (non deviata dall'oculare), e p' la sua distanza dal reticolo, sarà $de = \delta a/p'$.

È più comodo evitare la misura assoluta di δa e di p', osservando in quali divisioni a_1 e a_2 dell'oculare cadono due righe comprese nel campo oculare e di lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 note; si avrà così:

$$d\lambda/da = (\lambda_1 - \lambda_2)/(a_1 - a_2)\,;$$

e siccome $de/\delta a = (de/d\lambda)\,(d\lambda/\delta a)$, sarà:

$$de = (m/s \cos e)\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,\delta a/(a_1 - a_2)\,.$$

Si avrà dunque, per la (2),

$$\frac{m}{s\cos e}\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2}\,\frac{\delta a}{\partial \mathrm{T}} = \frac{n-1}{\mathrm{T}}\left(\frac{\cos i}{\cos e}\,\frac{\operatorname{tang} i_1}{n} - \frac{\operatorname{tang} e_1}{n} - \frac{m\lambda}{ns\cos e}\right) - \frac{m\lambda}{s\cos e}\,\mathrm{K}\,,$$

e considerando n isolato come uguale ad 1, si ricava:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2}\,\frac{\delta a}{\delta \mathrm{T}} + \frac{n-1}{\mathrm{T}}\left(\frac{s\cos i}{m\lambda}\operatorname{tang} i_1 - \frac{s\cos e}{m\lambda}\operatorname{tang} e_1 - 1\right)\,.$$

In molti casi la correzione complessiva suddetta è identicamente nulla come si vedrà nella Nota seguente.

Patologia vegetale. — *Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili* [1]. Nota di Leopoldo Granata, presentata dal Socio B. Grassi.

In una Nota precedente [2] ho esposto i primi risultati delle mie ricerche sullo sviluppo degli Aplosporidi; credo ora opportuno di ritornare brevemente sull'argomento per accennare ai punti più caratteristici del processo cariocinetico, che costituisce l'unico modo di divisione dei nuclei nella forma da me studiata.

Dovrò necessariamente limitarmi, per ora, ad una descrizione sommaria ed oggettiva dei fatti, riservandone per un prossimo lavoro d'insieme la trattazione completa. Le mie figg. 1-11 dànno una rappresentazione semi-schematica dello svolgimento del fenomeno.

[1] Lavoro eseguito in Firenze nel Laboratorio di Zoologia degli invertebrati. 1913.
[2] Rend. R. Accad. dei Lincei (5), vol. XXII, fasc. 12°, 2° sem. 1913.

Il nucleo, allo stato di riposo (fig. 1), ha forma regolarmente ovale ed è limitato da una membrana ben visibile che persiste durante l'intero processo di divisione. L'area nucleare è completamente occupata da un reticolo di sottili filamenti acromatici, sui quali è sparsa, a granuli od a catenelle di granuli, la cromatina.

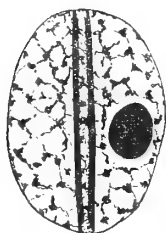
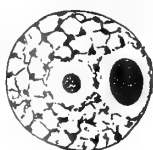
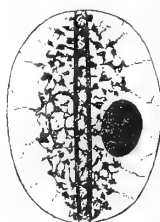
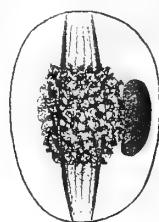



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

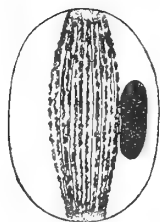
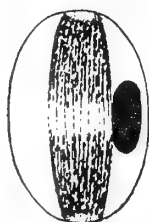
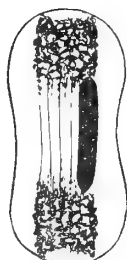



Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

In seno al reticolo, generalmente in una posizione laterale determinata, si trova un grosso corpo che assume fortemente i colori basici. La sua colorazione non è però uniforme: presenta talvolta uno spesso strato esterno avvolgente uno spazio che assume più debolmente i coloranti; tal'altra presenta una struttura spugnosa a grosse maglie avvolgenti spazî più chiari.

È questa una costituzione comune dei nuclei dei protisti con cariosoma e cromatina periferica. Ma vi è altro che contribuisce a dare ai nuclei di

Haplosporidium un aspetto del tutto caratteristico: La cavità nucleare è attraversata, nel senso della lunghezza, da una sorta di asse cilindrico, costituito di una sostanza apparentemente omogenea, che assume elettivamente i colori acidi; ed è circondato da uno strato che si colora intensamente in nero con l'ematossilina ferrica. Questo strato non si estende per tutta la lunghezza dell'asse, ma si arresta a breve distanza dalle due estremità.

In sezione trasversale noi vediamo il reticolo diffuso, in seno al quale sono limitate due zone: l'una periferica, nella quale è il cariosoma; l'altra mediana, nella quale è la sezione dell'asse centrale (fig. 2).

Lo strato periferico cromatico di quest'ultimo è messo in evidenza nettamente con la sola ematossilina ferrica, almeno per quanto a me risulta; così che, osservando i nuclei a fresco, o pure in preparati non colorati con l'*Heidenhain*, la parte centrale appare solo come una zona chiara, e si hanno allora immagini perfettamente identiche a quelle rappresentate nella fig. 49 *b* (pl. XII) di Caullery e Mesnil [1] per *Haplosporidium Vejdovskii*.

L'inizio della profase è segnato semplicemente da un addensamento del reticolo intorno all'asse centrale (fig. 3) il quale si allarga poi sino ad acquistare forma di fuso troncato alle due estremità. All'equatore di questo si addensa quindi la cromatina, a costituire una sorta di piastra equatoriale nella quale, piuttosto che veri cromosomi, si trovano granuli o piccoli ammassi e catenelle di granuli, che sembrano ancora sostenuti dalle maglie del reticolo (fig. 4). Il cariosoma rimane addossato, ma esterno alla cromatina, e conserva forma irregolarmente rotonda.

All'inizio dell'anafase, il fuso si allarga sino ad assumere la forma di una specie di bariletto, terminato ai due poli da corpi chiari, omogenei, di forma ovale. La cromatina si diffonde su tutta la superficie del fuso, in catenelle longitudinali, lungo le fibre (fig. 4), e si divide poi in due zone (fig. 6) che vanno a mano a mano addensandosi ai due poli rispettivi, dove ben presto appare chiaramente ricostituito il reticolo (figg. 7-8).

Il cariosoma conserva, fino nell'anafase avanzata, forma rotondeggiante; quindi rapidamente si allunga e si suddivide fra i due nuclei figli (figg. 7-8-9).

La ricostituzione del nucleo si compie con un lento processo le cui tappe principali sono rappresentate dalle figg. 9-10-11.

Anzitutto, il reticolo cromatico viene a formare una sorta di calotta attorno al corpo acromatico polare (fig. 9); quindi questo si allunga (figg. 10 e 11) a costituire un asse longitudinale che attraversa il nucleo nella sua lunghezza e attorno al quale la cromatina forma una sorta di fuso allungato. Indi incomincia l'accrescimento; ed il reticolo viene ad occupare tutta l'area nucleare, mentre il cariosoma guadagna la sua posizione laterale.

[1] *Arch. de zool. expérim. et génér.*, (IV), tom. IV, 1905.

La fig. 11 rappresenta il più comune aspetto dei nuclei, ed è in tale stadio che si compie la cariogamia: le due masse cromatiche si accollano l'una all'altra lateralmente, e si fondono in un'unica massa ovale, con cromatina sparsa su un reticolo a maglie minute e regolari, e due cariosomi situati alle due estremità.

Noi abbiamo già notato l'analogia evidente tra la costituzione dei nuclei di *H. limnodrili* con quelli di *H. Vejdovskii*.

Il confronto tra le immagini fornite dai miei preparati e le figure di Caullery e Mesnil [1] mi permette di credere che anche il comportamento durante la divisione sia uguale nelle due forme.

La fig. 48 *d* (Pl. XII) dei suddetti autori mostra due nuclei in anafase il cui aspetto può ricondursi facilmente a quello delle mie figure 5 e 6.

Le figure 48 *a b c*, 50 *a b*, e 51, mostrano dei nuclei nei quali « la sostanza cromatica si accumula lungo i due meridiani, su uno dei quali si dispone il nucleolo » (C. e M., pag. 119).

Non ostante la differenza apparente credo di potere asserire che questi stadii corrispondono esattamente a quello della mia figura 11. Nelle preparazioni imperfettamente fissate la cromatina tende appunto a raggrupparsi in due bande longitudinali separate da uno spazio chiaro nel quale l'asse centrale è assai difficilmente visibile.

I dati sulle altre specie di *Haplosporidium* sono troppo limitati per permettere confronti. Notiamo tuttavia in tutti i casi la presenza di una membrana nucleare ben distinta che persiste durante la divisione, la persistenza del cariosoma e la mancanza di centrioli ai poli e di cromosomi distinti nelle piastre equatoriali.

[1] Loc. cit.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Perotti R. *Studi di biologia sopra l'Agro romano, in rapporto al suo bonificamento agrario*. Pres. dal Socio Cuboni.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Volterra fa omaggio di un volume del prof. Le Bon, contenente la biografia e la bibliografia analitica di Albin Haller, e ne discorre.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXI. (1892-1913). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IX. Fasc. 17°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 gennaio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Tedone. Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate . . . Pag. 63
Bompiani. Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ispersuperficie (pres. dal Corrisp. *Castelnuovo*) (*) . . . » 72
Cisotti. Efflusso da un recipiente forato lateralmente (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . » 73
Colonnetti. Esperienze sulla elasticità a trazione del rame (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . » 79
Soula. Sur certaines équations intégrales (pres. *Id.*) (*) . . . » »
Vacca. Sulla equivalenza per traslazione (pres. *Id.*) . . . » 80
Lo Surdo. Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale (pres. dal Socio *Ròiti*) . . . » 82
Id. Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe di Baumer presentano diverse forme di scomposizione (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) (*) . . . » 84
Tosi. Dispositivo herziano per osservazioni meteorologiche e previsioni di temporali (pres. dal Socio *E. Millosevich*) . . . » »
Padoa e *Tabellini.* La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . » 88
Pellini e *Coppola.* Solubilità e attività (pres *Id.*) (*) . . . » 94
Padoa e *Foresti.* Calori di combustione di sostanze fototrope (pres. *Id.*) . . . » 95
Grill. Bournonite della miniera di Brosso (Piemonte) (pres. dal Corrisp. *F. Millosevich*). » 98
Rovereto. La penisola Valdéz, e le forme costiere della Patagonia settentrionale (pres. dal Corrisp. *Issel*) . . . » 103
Guglielmo. Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . » 105
Petri. Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite (pres. dal Socio *Cuboni*) (*) . . . » 109
Granata. Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili (pres. dal Socio *Grassi*) . . . » »

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Perotti. Studi di biologia sopra l'Agro romano, in rapporto al suo bonificamento agrario. Pres. dal Socio *Cuboni* . . . » 112

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Volterra. Fa omaggio di un volume del prof. *Le Bon* e ne discorre. . . . » »

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 1° febbraio 1914.* **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° febbraio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 3°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° febbraio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXVIII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Autossidazioni VII.

La presente Nota fa seguito alla nostra 25ª (1) Comunicazione, in cui abbiamo trattato dell'autossidazione di alcuni acidi organici.

Acido acetico. — Vennero esposti 4 gr. di questo acido in 200 d'acqua in un pallone di 4 litri pieno d'ossigeno, dall'aprile al novembre. Il prodotto è poco modificato, non precipita con la fenilidrazina, nè dà la colorazione colla naftoresorcina, osservata da C. Neuberg coi sali d'uranio (2). Precipitando frazionatamente il liquido neutralizzato, con nitrato d'argento, si osserva, peraltro, che l'ultima frazione e l'ultimo filtrato anneriscono per riscaldamento: indizio, questo, della presenza di *acido formico.* In una analoga esperienza fatta al bujo, non si ebbe nessuna riduzione. L'acido acetico dunque si autossida lentamente alla luce, con formazione di acido formico.

Acido glicolico. — Una soluzione di 3 gr. in 100 d'acqua rimase esposta alla luce, in un matraccio di un litro, dall'aprile al novembre. Aprendo il matraccio, si notò una forte pressione positiva, con svolgimento di anidride carbonica; ed il liquido aveva l'odore dell'*aldeide formica.* Questa venne

(1) Questi Rendiconti, vol. 22, I, pag. 539 (1913).
(2) Biochemische Zeitschrift, vol. 13, pag. 308.

riconosciuta trattando la metà del liquido col cloridrato di p-difenildiidrazina, secondo C. Neuberg (1). Il precipitato fondeva a 220°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{14}N_4$
N	23,75	23,53

L'altra metà, portata a secco a b. m., lasciò indietro un lieve residuo, per cui l'acido glicolico si autossida alla luce quasi completamente, dando anidride carbonica ed aldeide formica, analogamente all'acido lattico, che dà invece l'aldeide acetica (2).

Acido ossalico. — È noto che l'acido ossalico (3) si autossida, alla luce, in soluzione acquosa, producendo acido carbonico; noi abbiamo voluto accertare, per certe nostre ulteriori esperienze, in qual misura si compia l'ossidazione. A tale scopo, abbiamo esposto dall'aprile al novembre, in alcuni matracci da un litro pieni d'ossigeno, 2 o 5 gr. di acido ossalico cristallizzato, in 100 d'acqua. Le soluzioni vennero prima sterilizzate.

Dopo l'insolazione, si notò nei matracci forte pressione: il gas venne raccolto ed esaminato Esso non conteneva, conformemente alle esperienze di Richardson, ossido di carbonio (4), ma soltanto anidride carbonica, insieme coll'eccesso dell'ossigeno commerciale adoperato.

Il liquido nei palloni non dava la reazione dell'acqua ossigenata. La soluzione al 2 % avea reazione neutra: e però, in questo caso, tutto l'acido ossalico era stato ossidato.

Nei matracci contenenti le soluzioni al 5 % venne dosato l'acido carbonico e l'acido ossalico rimasto inalterato. Si ebbe, dai 5 gr. d'acido ossalico, un residuo di 1,1 gr. e la quantità corrispondente di anidride carbonica.

Acido malonico. — Venne esposta una soluzione di 3 gr. d'acido malonico in 100 d'acqua, in matracci di 3 litri, dall'aprile al novembre. Aprendo i matracci, si svolse poco acido carbonico. Il contenuto venne distillato a vapore: e da 12 gr. d'acido malonico si ebbe un liquido, a saturare il quale occorsero 36 cc. di carbonato sodico normale. Il distillato odorava di aldeide formica. La soluzione venne precipitata frazionatamente con nitrato argentico; e tutte le frazioni dettero numeri, corrispondenti al sale dell'acido acetico. Cristallizzate dall'acqua, dettero lieve riduzione.

Analisi:

	Trovato				Calcolato per $C_2H_3O_2Ag$
Ag	64,23	63,88	64,08	64.27	64,66

(1) Berichte, vol. 32, pag. 1961.

(2) Vedi la citata nostra 25a Nota, a pag. 540.

(3) Vedi in proposito la Memoria di W. P. Jorissen e L. Th. Reicher, Zeitschrift für physikalische Chemie, vol. 31, pag. 142.

(4) Centralblatt, anno 1904, I, pag. 1144.

Gli altri omologhi successivi della serie ossalica, vengono, come il malonico, alterati dall'ossigeno, alla luce, in piccola misura.

Acido succinico. — La soluzione acquosa contenente 5 gr. di acido su 100 d'acqua per ogni matraccio capace di 5 litri d'ossigeno, restò esposta alla luce dall'aprile al novembre. Nell'aprire i matracci, si notò lieve pressione dovuta allo sviluppo di *anidride carbonica.*

Il liquido, che aveva l'odore della *aldeide acetica*, venne distillato: e dai primi 25 cc. di distillato raccolto, si ebbe, con la p-nitrofenilidrazina, il caratteristico composto (0,3 gr.) che fondeva a 128-129° [1].

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_9O_2N_3$
N	23,33	23,46

La parte ulteriore del distillato, saturata con carbonato sodico, dette, col nitrato d'argento per precipitazione frazionata, le due seguenti frazioni:

Analisi:

	Trovato		Calcolato per $C_2H_3O_2.Ag$	e per $C_3H_5O_2.Ag$
Ag	64,42	62,50	64,66	59,66

che dimostrano la presenza di acido acetico, e forse, pure di quello propionico.

Il liquido rimasto indietro fornisce, per concentrazione, notevoli quantità di acido succinico inalterato; dalle acque madri di questo si ebbe, coll'acetato di fenilidrazina, un precipitato (0,1 gr.), che, purificato dal benzolo, fondeva a 169°. Esso era insolubile nei carbonati alcalini e si dimostrò identico col fenilosazone del *gliossale.*

L'acido succinico viene ossidato assai parzialmente, ma, quel poco, profondamente per azione della luce.

L'*acido pirotartrico* viene alterato in assai piccola misura dall'ossigeno alla luce, per cui non abbiamo studiato in modo esauriente i prodotti dell'autossidazione.

Acido glicerico. — Come s'è detto, l'acido lattico dà, per autossidazione, aldeide acetica ed anidride carbonica e però ci apparve desiderabile di conoscere il contegno dell'acido biossidrilato.

Vennero esposti, dall'aprile al novembre, due matracci da 3 litri, contenenti ciascuno 4 gr. d'acido glicerico in 100 d'acqua.

Aprendo i matracci, si notò lieve aspirazione; nel contenuto gassoso dei medesimi era presente l'*anidride carbonica.* La soluzione aveva odore d'*aldeide formica*, che venne dimostrata nei primi 25 cc. del distillato per mezzo della p-difenildiidrazina. L'idrazone relativo (0,9 gr. da 8 gr. d'acido glicerico) fondeva a 224°.

(1) Vedi Hyde, Berichte, vol. 32, pag. 1813.

Dal residuo della distillazione si ebbe, colla fenilidrazina, l'osazone del *gliossale*, dal punto di fusione 175°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{14}N_4$
N	23,53	23.53

Acido saccarico.— Abbiamo adoperato una soluzione al 4 % (Kahlbaum), che venne esposta a 100 gr. per volta in matracci da 3 litri o 4 litri, dall'aprile al novembre.

Aprendo i matracci, si sviluppò una grande quantità di anidride carbonica. L'acido era stato in gran parte scomposto, perchè dallo svaporamento di un matraccio (4 gr.) non si ebbe che un piccolo residuo (0,4 gr.). Il distillato conteneva acido formico; il residuo dette, colla fenilidrazina, un lieve precipitato rosso, che non potè essere analizzato.

C. Neuberg [1] ottenne, coi sali d'uranio, acidi chetonici e forse l'aldeide dell'acido tartrico.

Abbiamo notato che l'acido saccarico si ossida anche all'oscuro, sebbene in minore misura; nella soluzione conservata al bujo s'erano peraltro sviluppate delle muffe.

Cumarina. — Nella nostra VI Nota [2] abbiamo dimostrato che la cumarina si trasforma, per azione della luce, tanto allo stato solido, quanto in soluzione, in un polimero, nella cosiddetta idrodicumarina di Dyson [3]. Era però interessante l'esaminare il suo contegno alla luce in presenza di ossigeno.

A tale scopo vennero esposti in matracci di 3 litri, dall'aprile al novembre, 3 gr. di cumarina con 100 d'acqua per volta. Durante l'insolazione, s'era formata una specie d'emulsione di colore brunastro: e, aprendo i matracci, si notò aspirazione.

Il contenuto dei medesimi aveva l'odore dell'*aldeide salicilica*, ed era acido. Per neutralizzarlo, si richiesero 22,5 cc. di soluzione normale di carbonato sodico (per il prodotto ottenuto da 9 gr. di cumarina). Il liquido, in cui era sospesa la materia solida ed in parte cristallina, cedette all'etere uno sciroppo, che poi cristallizzò (0,9 gr.) in modo non completo, contenente la cumarina inalterata ed un po' di aldeide salicilica. La materia, insolubile nell'acqua e nell'etere, era la suaccennata *diidrocumarina* di Dyson. Raccolta e seccata, pesava 4,8 gr., corrispondente circa al 50 % della cumarina adoperata. Purificata dall'acido acetico glaciale, fondeva a 258°.

Dal liquido alcalino, così trattato, si ebbe, per aggiunta di acido solforico diluito, un precipitato fioccoso, brunastro, in gran parte insolubile nell'etere. La parte che si sciolse, purificata dall'acqua, si dimostrò essere

(1) Biochemische Zeitschrift, vol. 13°, pag. 308.
(2) Questi Rendiconti, vol. 12, II, pag. 530.
(3) Beilstein, vol. II, pag. 2026.

formata dall'*acido salicilico*, e da una sostanza che fondeva a 163°, di cui, per la sua piccola quantità, non potemmo determinare la composizione.

Per azione della luce sulla cumarina in presenza di ossigeno, si forma, come si vede, prevalentemente il suo polimero e, ciò che è notevole, in quantità assai maggiore che non in assenza di ossigeno. Nella nostra vecchia esperienza del 1903, da 10 gr. di cumarina ottenemmo soltanto 1,1 gr. di diidrocumarina. Noi abbiamo osservato anche in altre occasioni, con sostanze contenenti doppî legami (come il safrolo, l'eugenolo) che l'ossigeno, in presenza della luce, non favorisce sempre l'ossidazione, perchè, invece di prodotti bene bene definiti, abbiamo ottenuto materie resinose.

Sarà però necessario di esaminare altri casi per poter accertare se realmente le polimerizzazioni di composti olefinici alla luce vengano favorite dalla presenza di ossigeno.

Acido oleico (¹). — L'autossidazione dell'acido oleico è un processo assai complicato per il notevole numero di prodotti che si ottengono. Esiste in proposito una ricerca dello Scala la quale, peraltro, non è esauriente (²).

Vennero esposti alla luce, dall'aprile al novembre, 10 matracci da 5 litri, contenenti ciascuno 5 gr. di acido oleico e 100 d'acqua. Aprendo i matracci, si notò forte aspirazione; il prodotto d'un odore rancido, è formato, da una massa semisolida sospesa nella soluzione acquosa, che ha reazione acida.

Per ottenere una prima separazione, si distillò il tutto col vapore acqueo per eliminare la parte volatile. Questa venne neutralizzata adoperando 140 cc. di carbonato sodico normale (dai 50 gr. di acido oleico). Estraendo il liquido neutro, che aveva un odore aldeidico, con etere, si ebbe una piccola quantità di prodotto, che dette un semicarbazone fusibile a 87°, ma in quantità insufficiente per un ulteriore esame.

Dalla soluzione sodica concentrata ed acidificata, si ricavarono, per estrazione con etere, 8,3 gr. di acidi grassi che furono sottoposti alla distillazione frazionata. Si raccolsero separatamente quattro porzioni, che alla lor volta vennero singolarmente frazionate per precipitazione con nitrato d'argento. La prima, che passava fra 100 e 145°, era formata prevalentemente da *acido formico*, come venne accertato dal suo contegno col nitrato d'argento. La seconda, che venne raccolta fra 145 e 235°, dette le seguenti frazioni di sali argentici:

Analisi:

	I	II
Ag	44,32	48,87

(¹) Questa esperienza fa parte di una estesa ricerca sull'autossidazione delle materie grasse alla luce, a cui stiamo attendendo; la pubblichiamo staccata, perchè nell'ultimo fascicolo della Gazzetta chimica è annunciata una Memoria di F. Canzoneri e G. Bianchi, dal titolo: *Sull'irrancidimento dell'olio di oliva e sull'ossidazione dell'acido oleico in presenza della luce solare.*

(²) Alberto Scala, *Le stazioni sperimentali agrarie italiane,* vol. 30°, pag. 629; Centralblatt, anno 1898, parte I, pag. 440.

La terza, che passava fra 235° e 246°, venne suddivisa nelle seguenti porzioni:

Analisi:

	I	II	III	IV	V	VI
Ag	41,36	41,54	42,85	43,23	44,50	46,67

Finalmente, l'ultima, che passò fra 246° e 258°, e segnatamente intorno al punto di ebollizione dell'*acido nonilico*, 253°-254°, si solidificò ponendola nel ghiaccio, e fuse a 12°.

Da questa ottenemmo le due frazioni seguenti:

Analisi:

	I	II
Ag	41,16	42,12

Tutti questi numeri sono compresi fra quelli richiesti dai sali argentici dell'acido capronico e dell'acido nonilico,

	Calcolato per $C_9H_{17}O_2Ag$	e per $C_6H_{11}O_2Ag$
Ag	40,75	48,43

per cui si deve ammettere che nell'autossidazione dell'acido oleico alla luce, oltre all'acido nonilico, si formano acidi inferiori, con prevalenza di quelli che seguono immediatamente il primo.

Il liquido rimasto indietro nella distillazione primitiva, aveva reazione acida e conteneva al fondo un olio giallognolo vischioso, che venne separato per filtrazione. La soluzione concentrata dette un'abbondante cristallizzazione, che, purificata dall'acqua, si presentò in squamette bianche dal punto di fusione 106°, che è quello dell'*acido azelaico*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{16}O_4$
C	57,25	57,44
H	8,67	8,51

Le acque madri vennero adoperate per ottenere una serie frazionata di sali argentici, che accennerebbero alla presenza di acidi più elevati dell'acido azelaico.

Analisi di una prima serie:

Ag	49,27	51,23	52,09	52,85	53,52	54,87

Analisi d'una seconda serie:

	Trovato		Calcolato per $C_9H_{14}O_4Ag_2$
Ag	50,17	53,39	53,73

Finalmente, la parte oleosa semisolida venne trattata con etere, per cui, mentre la parte maggiore passava in soluzione, restò indietro una polvere bianca. Questa, purificata dall'alcool, si trasformò in pieghette perlacee dal punto di fusione 133°; l'*acido diossisteraico* fonde, secondo Lewkowitsch [1], a 132°-133°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{36}O_4$
C	68,10	68,35
H	11,48	11,39

La soluzione eterea suindicata lascia indietro, per svaporamento, una massa vischiosa, che, col tempo, si riempie di squamette, solubili in etere petrolico, per cui la massa potè venire esaurita con questo solvente. Non ostante il suo aspetto voluminoso, la sostanza solida era presente solo in piccole quantità: purificata dall'alcool metilico, fondeva a 56°.

La massa vischiosa giallastra, insolubile nell'etere petrolico, non conteneva acido oleico. Essa ha bisogno d'uno studio ulteriore, perchè si forma in quantità rilevante; dai 50 gr. di acido oleico, se ne ebbero 20 gr.

L'ossidazione dell'acido oleico alla luce procede in parte in modo regolare, cioè si forma l'acido diossistearico e gli acidi nonilico ed azelaico; ma questi, come s'è visto, non sono i soli prodotti che abbiamo ottenuto. All'oscuro, l'acido oleico in presenza d'ossigeno acquista soltanto una assai lieve reazione acida.

Anche in questa ricerca siamo stati assai utilmente coadiuvati dal sig. Emilio Sernagiotto, a cui esprimiamo la nostra gratitudine.

Matematica. — *Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota I del Corrispondente F. Enriques.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Chemische Technologie und Analyse der Fette, Oele und Wachse. vol. I, pag. 137 (1905).

Matematica — *Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni.* Nota del Corrisp. O. Tedone.

1. In due Note precedenti [1], sull'equazione delle onde smorzate, ho messo in luce due relazioni integrali fra le funzioni di Bessel, che mi sono parse notevoli. La maniera però con la quale queste relazioni, in quelle Note, sono state dimostrate, non è quella con la quale ad esse sono pervenuto. Della loro esistenza ero da lungo tempo convinto, basandomi, principalmente, sulla risolubilità, alla quale fermamente credevo, del problema che poi, effettivamente, ho risoluto nella prima delle due Note citate. E solo in seguito a molti tentativi sono riuscito a costruire un procedimento che è capace di fornire molte relazioni analoghe a quelle di cui parliamo e che spesso sono adatte alla risoluzione di determinate equazioni integrali del tipo di Volterra. La descrizione di questo procedimento, in un caso speciale, e l'indicazione delle equazioni integrali che di conseguenza si riesce a risolvere, saran l'oggetto della presente Nota.

2. Ricordiamo che l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \tag{1}$$

si integra completamente col metodo delle caratteristiche di Riemann [2], e che la soluzione fondamentale della (1) relativa al punto (x_0, y_0) (vogliam dire la soluzione della (1) regolare in un intorno di (x_0, y_0) e che acquista il valore uno sulle due caratteristiche uscenti dal punto stesso) è

$$\mathrm{I}_0(z) = \mathrm{J}_0(z\sqrt{-1}) = \sum_0^\infty{}_i \frac{z^{2i}}{2^{2i}(i!)^2} \quad , \quad z = \sqrt{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}\ . \tag{2}$$

Si tratti ora di costruire il più generale integrale della (1) nel campo τ formato dal quadrante positivo il cui contorno sia costituito, quindi, dalle parti positive degli assi coordinati. Se su questo contorno fossero noti i valori di u e della sua derivata normale, la formola che discende dal metodo di Riemann e che, per brevità, chiameremo, senz'altro, formola di Riemann, è capace di risolvere la quistione in modo completo, di determinare cioè, in ogni punto $0 \equiv (x_0, y_0)$ del campo, il corrispondente valore

[1] Vedi questi Rendiconti, sedute 31 maggio 1913 e 4 gennaio 1914.
[2] Vedi, p. es., Picard, Comptes rendus, vol. 117, 1893.

u_0 di u. Poniamo, per i valori che u e $\frac{\partial u}{\partial y}$ assumono sull'asse x positivo;

$$u = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = F(x); \tag{3}$$

e, per i valori che u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ assumono sull'asse y positivo;

$$u = \varphi(y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi(y), \tag{3'}$$

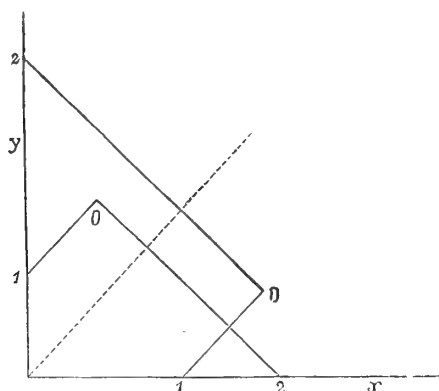
queste quattro funzioni essendo, per ragioni di continuità, soggette alle condizioni:

$$f(o) = \varphi(o) \quad , \quad f'(o) = \Phi(o) \quad , \quad \varphi'(o) = F(o). \tag{3''}$$

Conduciamo, quindi, per il punto (x_0, y_0) le due caratteristiche

$$y - x = y_0 - x_0 \quad , \quad y + x = y_0 + x_0 \tag{4}$$

dell'equazione (1), ed osserviamo che la prima di queste caratteristiche in-

contra il contorno del campo τ in un solo punto che chiameremo 1 e che potrà cadere sull'asse x o sull'asse y; mentre la seconda incontra il contorno di τ sempre in due punti di cui uno cade sull'asse x e l'altro sull'asse y, e di cui uno solo (del resto, qualunque), e che chiameremo 2 sarà estremo dell'arco a cui è esteso l'integrale che comparisce nella formola di Riemann. Abbiamo quindi due modi diversi per risolvere la nostra quistione. La porzione di contorno di τ a cui è esteso l'integrale che comparisce nella formola di Riemann, sarà sempre limitata dai due punti 1 e 2. Però, nel primo modo il punto 1 cade sull'asse y o sull'asse x, mentre il punto 2 cade costantemente sull'asse x; nel secondo modo, invece, il punto 1 può cadere sull'asse x o sull'asse y, mentre il punto 2 cade costantemente sull'asse y. In corrispondenza di questi due modi, evidentemente diversi, di

poter determinare il valore di u in uno stesso punto O del campo, abbiamo due formole che noi scriveremo, pel primo caso, nell'ipotesi $y_0 > x_0$, e, pel secondo caso, nell'ipotesi $y_0 < x_0$.

$$\text{(I)} \quad 2u_0 = \varphi(y_0 - x_0) + f(y_0 + x_0)$$
$$- \int_0^{y_0 - x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] I_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$+ \int_0^{y_0 + x_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] I_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx ,$$

$$\text{(II)} \quad 2u_0 = f(x_0 - y_0) + \varphi(x_0 + y_0)$$
$$+ \int_0^{x_0 + y_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] I_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$- \int_0^{x_0 - y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] I_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx .$$

A queste formole conviene aggiungere quelle che si ottengono derivando la (I) rispetto ad x_0 e la seconda rispetto ad y_0, e cioè:

$$\text{(I')} \quad 2 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} = - \varphi'(y_0 - x_0) + f'(y_0 + x_0) + \Phi(y_0 - x_0)$$
$$+ F(y_0 + x_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(y_0 - x_0) + \frac{y_0}{2} f(y_0 + x_0)$$
$$- \int_0^{y_0 - x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial x_0} I_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$+ \int_0^{y_0 + x_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial x_0} I_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx ,$$

$$\text{(II')} \quad 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = - f'(x_0 - y_0) + \varphi'(x_0 + y_0) + \Phi(x_0 + y_0)$$
$$+ F(x_0 - y_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(x_0 + y_0) + \frac{y_0}{2} f(x_0 - y_0)$$
$$+ \int_0^{x_0 + y_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial y_0} I_0 (\sqrt{(y - y_0)^2 - x_0^2})\, dy$$
$$- \int_0^{x_0 - y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial y_0} I_0 (\sqrt{y_0^2 - (x - x_0)^2})\, dx .$$

Col modo (I) di risolvere la quistione, $f(x)$ ed $F(x)$ si possono dare ad arbitrio. Sempre, quando il punto O si avvicina ad un punto dell'asse x positivo, di ascissa x_0, u_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$ tendono ai valori $f(x_0)$ ed $F(x_0)$ rispet-

tivamente. Se vogliamo, invece, che, anche quando O tende ad un punto dell'asse y positivo e di ordinata y_0, u_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$ tendano a $\varphi(y_0)$ o $\Phi(y_0)$, devono essere soddisfatte certe condizioni, le quali si ricavano subito dalle (I) e (I′) facendo tendere x_0 a zero e ponendo $\varphi(y_0)$ e $\Phi(y_0)$ al posto dei limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial x_0}$.

Noi ammettiamo come dimostrato (giacchè la dimostrazione si fa facilmente) che, data, oltre alle due funzioni $f(x)$ ed $F(x)$, una delle altre funzioni $\varphi(x)$, o $\Phi(y)$, è univocamente determinato u in tutto il campo τ, e quindi, anche l'altra delle due ultime funzioni. Ammettiamo inoltre come dato dall'intuizione, dall'intuizione fisica, p. es., che ad ogni sistema di funzioni $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(y)$, ovvero $f(x)$, $F(x)$, $\Phi(y)$, corrisponde una effettiva soluzione della (I) regolare in tutto il campo τ e tale, che al contorno, essa e la derivata normale acquistano quei valori che sono stati ad esse assegnati. Queste ammissioni a noi sono lecite, perchè noi abbiamo di mira di scoprire certe formole che, in ogni modo, conviene poi verificare.

Col modo (II) di risolvere il problema, le cose vanno semplicemente invertite. Le funzioni $\varphi(y)$ e $\Phi(y)$ si possono dare ad arbitrio; e delle altre due, se ne può dare ad arbitrio una sola, $f(x)$, o $F(x)$. L'altra di queste due ultime funzioni è allora determinata, e si ottengono equazioni atte ad ottenerla facendo nella (II), o (II′), $y_0 = 0$ e ponendo $f(x_0)$, $F(x_0)$ per i limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial y_0}$.

3. Andando al limite, come si è detto, nelle (I), (I′), per $x_0 = 0$, si trova:

$$
(\mathrm{III}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(y_0) &= f(y_0) - \int_0^{y_0} \Phi(y)\, I_0(y - y_0)\, dy \\
&\qquad + \int_0^{y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] I\left(\sqrt{y_0^2 - x^2}\right) dx, \\
\Phi(y_0) &= F(y_0) + \frac{y_0}{2} f(y_0) - \varphi'(y_0) + f'(y_0) \\
&\qquad + \int_0^{y_0} \varphi(y) \frac{I_1(y - y_0)}{y - y_0}\, dy \\
&\qquad - \int_0^{y_0} \left[F(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} \right] \frac{\partial}{\partial x} I_0\left(\sqrt{y_0^2 - x^2}\right) dx .
\end{aligned}
\right.
$$

Queste due equazioni non possono essere distinte rispetto alle due funzioni $\varphi(y)$ e $\Phi(y)$, a causa delle osservazioni fatte, e devono quindi essere l'una conseguenza dell'altra.

Similmente, facendo tendere y_0 a zero nelle (II), (II'), e ponendo $f(x_0)$, $F(x_0)$ per i limiti di u_0 e di $\frac{\partial u_0}{\partial y_0}$, si trova:

$$
(\mathrm{IV}) \left\{
\begin{aligned}
f(x_0) &= \varphi(x_0) - \int_0^{x_0} F(x)\, J_0(x - x_0)\, dx \\
&\quad + \int_0^{x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] J_0 (\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy, \\
F(x_0) &= \Phi(x_0) - \frac{x_0}{2} \varphi(x_0) - f'(x_0) + \varphi'(x_0) \\
&\quad + \int_0^{x_0} f(x) \frac{J_1(x - x_0)}{x - x_0}\, dx \\
&\quad - \int_0^{x_0} \left[\Phi(y) + \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \frac{\partial}{\partial y} J_0 (\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy.
\end{aligned}
\right.
$$

Anche su queste equazioni possono ripetersi osservazioni analoghe alle precedenti. In definitiva, poi, le (IV) non possono essere che le (III) stesse sotto un aspetto diverso.

4. Se, in due qualunque delle (III), (IV), riteniamo che siano diverse da zero soltanto quelle, delle nostre quattro funzioni f, F, φ, Φ, rispetto alle quali esse compaiono risolute, otteniamo una serie di equazioni integrali del tipo di Volterra, con le corrispondenti formole di risoluzione. Trascurando di riportare quelle equazioni integrali che si possono ottenere da quelle già scritte col semplice scambio delle funzioni I nelle corrispondenti funzioni J, avremo:

$$
a) \left\{
\begin{aligned}
\varphi(y_0) &= - \int_0^{y_0} \Phi(y)\, I_0(y - y_0)\, dy, \\
\Phi(y_0) &= - \varphi'(y_0) + \int_0^{y_0} \varphi(y) \frac{I_0(y - y_0)}{y - y_0}\, dy;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
b) \left\{
\begin{aligned}
\varphi(y_0) &= f(y_0) + \int_0^{y_0} f(x) \frac{\partial}{\partial y_0} I_0 (\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx \\
&= \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^{y_0} f(x)\, I_0 (\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx, \\
f(x_0) &= \varphi(x_0) + \int_0^{x_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_0} J_0 (\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{x_0} \varphi(y)\, J_0 (\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy;
\end{aligned}
\right.
$$

$$c)\quad\begin{cases} \varphi(y_0) = \int_0^{y_0} F(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,, \\ F(x_0) = \frac{x_0}{2}\varphi(x_0) + \varphi'(x_0) + \int_0^{x_0} \varphi(y) \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x_0} J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\ \qquad = \frac{\partial}{\partial x_0}\int_0^{x_0} \varphi'(y)\, J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy\,; \end{cases}$$

$$d)\quad\begin{cases} \Phi(y_0) = F(y_0) - \int_0^{y_0} F(x) \frac{\partial}{\partial x} I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx \\ \qquad = \int_0^{y_0} F'(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,, \\ F(x_0) = \Phi(x_0) - \int_0^{x_0} \Phi(y) \frac{\partial}{\partial y} J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy \\ \qquad = \int_0^{x_0} \Phi'(y_0) J_0(\sqrt{x_0^2 - y^2})\, dy\,. \end{cases}$$

Possiamo subito osservare che le formole c) e d) si deducono immediatamente dalle b); sicchè, di equazioni fondamentalmente distinte, che così scorgiamo come risolubili, ve ne sono due tipi soltanto. Le funzioni date, e le funzioni incognite, soddisfano, per il valore zero dell'argomento, a condizioni che facilmente si scorgono e per cui noi non insistiamo su di esse. In questa Nota, infine, non ci occuperemo di ulteriori verifiche.

5. Dalle relazioni (III) e (IV), oltre ai precedenti risultati, si può ottenere un non piccolo numero di relazioni integrali fra le funzioni di Bessel, che possono riuscire utili in date quistioni. Se nelle (III), ad es., facciamo $f = \Phi = 0$, abbiamo:

$$\varphi(y_0) = \int_0^{y_0} F(x)\, I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,,$$

$$0 = F(y_0) - \varphi'(y_0) + \int_0^{y_0} \varphi(y) \frac{I_1(y - y_0)}{y - y_0}\, dy - \int_0^{y_0} F(x) \frac{\partial}{\partial x} I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2})\, dx\,.$$

Eliminando, quindi, la funzione φ fra queste due equazioni, troviamo:

$$\int_0^{y_0} F(x)\, dx \left\{ \int_x^{y_0} \frac{I_1(y - y_0)}{y - y_0} I_0(\sqrt{y^2 - x^2})\, dy - \left(\frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\partial}{\partial x}\right) I_0(\sqrt{y_0^2 - x^2}) \right\} = 0\,.$$

Ed essendo, in questa equazione, $F(x)$ una funzione arbitraria, siamo condotti

alla relazione fra le funzioni di Bessel che abbiamo verificata nella seconda delle Note in principio citate.

6. Dalle equazioni integrali indicate nel n. 4, altre numerose se ne possono ricavare egualmente risolubili, come le prime, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. Una di queste nuove equazioni è stata risoluta nella prima delle due Note citate. E sull'argomento dovrò ritornare in una prossima occasione per completare lo studio del problema iniziato in quella Nota. Qui vogliamo aggiungere ancora le osservazioni seguenti: È chiaro che molte sono le equazioni integrali di Volterra, risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. È anche più che probabile che non tutte queste equazioni sieno suscettibili di una tale soluzione. Si potrà stabilire un criterio per distinguere un caso dall'altro? Mi parrebbe molto interessante una risposta, in un senso qualunque, a questa domanda. Il concetto di solubilità di un'equazione integrale (e forse sarà utile di considerare insieme il caso più generale di un'equazione integro-differenziale) di Volterra, con un numero finito di derivazioni e di integrazioni, oltre, si intende, ad operazioni algebriche, costituirebbe, per queste equazioni, l'analogo del concetto di risolubilità per radicali delle equazioni algebriche e della risolubilità, per quadrature, delle equazioni differenziali ordinarie.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della deformabilità delle V_n di S_{n+1} fu esaminato per una V_3 di S_4 dallo Schur (¹) e risoluto nello stesso caso dal Bianchi (²): nell'indirizzo del Bianchi, ma con metodo diverso, lo Sbrana (³) ha trattato e risoluto il problema nel caso generale. Questi ha trovato che condizione necessaria per la deformabilità è che la V_n sia luogo di $\infty^2 S_{n-2}$ ed abbia lungo ciascuno uno S_n tangente fisso: sicchè, servendosi dell'immagine ipersferica di Gauss della V_n si è condotti a studiare un'equazione di Laplace. E la condizione necessaria e sufficiente per la deformabilità è appunto assegnata in rapporto ad un suo gruppo di soluzioni.

(¹) F. Schur, *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume*, Math. Ann. Bd. XXVIII, pp. 343-353, § II.

(²) L. Bianchi, *Sulle varietà a 3 dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, Mem. della Società ital. delle Scienze (detta dei XL), ser. III, tom. XIII (1905), pp. 261-323.

(³) U. Sbrana. *a) Sulla varietà ad n — 1 dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXVII (1909), pp. 1-45; *b) Sulla deformazione infinitesima delle ipersuperficie*, Ann. di Matem. (3), vol. 15 (1908), pp. 329-348.

Per quanto il problema possa dirsi risoluto (salvo, s'intende, l'effettiva integrazione dell'equazione detta) mi pare opportuno dare alla soluzione una forma più geometrica: al che si riesce facilmente giovandosi dei risultati recentemente acquisiti nella geometria proiettivo-differenziale degli iperspazii. E precisamente mostrerò come si giunga, con considerazioni proiettive, alla condizione necessaria e come si associ alla V_n, in modo intrinseco (cioè indipendente dalla rappresentazione di Gauss), un'equazione di Laplace: dalla rigidità degli spazii generatori di V_n dedurrò poi la condizione necessaria e sufficiente. Questa mette in luce un tipo di applicabilità che, indipendentemente dal caso attuale, mi sembra offra interesse per una ricerca di carattere generale.

2. Per non interrompermi nel seguito, ricordo un teorema sulle varietà V_k che con le coordinate proiettive omogenee dei loro punti $x_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ soddisfano ad uno o più gruppi di equazioni simultanee alle derivate parziali, lineari ed omogenee, del tipo:

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_k} + \\ + \alpha_{1k} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + \alpha_{11} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{10}\, x = 0\,,$$

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2 \partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2^2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2 \partial \tau_k} + \\ + \alpha_{2k} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + \alpha_{21} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{20}\, x = 0\,,$$

. . . .

. . . .

$$a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k \partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k \partial \tau_2} + \cdots + a_k \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_k^2} + \\ + \alpha_{kk} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} + \cdots + \alpha_{k1} \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \alpha_{k0}\, x = 0$$

(ove i coefficienti sono funzioni delle τ). Prescindendo da qualunque ipotesi sull'essere le x_i soluzioni di altre equazioni o meno, si dimostra [1] che:

Se una V_k *rappresenta* m $(< k)$ *gruppi distinti di tali equazioni, essa è luogo di* S_m *ed ammette lungo ognuno di essi lo stesso spazio tangente fisso* [2].

[1] E. Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica,* Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. IL (1913-1914), nn. 9, 13. Se invece di coordinate omogenee si adoperano coordinate non omogenee, le equazioni non debbono contenere i termini in x (cioè $\alpha_{i0} = 0$).

[2] Accenno al ragionamento semplicissimo che conduce al risultato nel caso di un

3. Veniamo ora al nostro problema.

Si abbia dunque una V_n in uno S_{n+1} euclideo: se si sceglie l'origine delle coordinate sulla varietà, e l'iperpiano ivi tangente come quello di equazione $x_{n+1}=0$, la V_n si rappresenta nell' intorno dell'origine, in coordinate non omogenee, con l'equazione:

$$x_{n+1}=F(x_1, x_2, \dots, x_n)=\tfrac{1}{2}\Sigma_{ik}\, c_{ik}\, x_i\, x_k+\cdots, \qquad (i, k=1, \dots, n)$$

ove

$$c_{ik}=\left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)_{x_1=0, \dots, x_n=0}=\left(\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)^0 .$$

Perchè la varietà sia deformabile nell' intorno dell'origine [1] debbono annullarsi tutti i minori del terz'ordine estratti dal determinante delle c [2]

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} .$$

---

sol gruppo di equazioni. Si consideri il punto $x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ (le cui coordinate omogenee x_i sono soluzioni delle equazioni scritte) e insieme ad esso il punto

$$A=a_1\frac{\partial x}{\partial \tau_1}+a_2\frac{\partial x}{\partial \tau_2}+\cdots+a_k\frac{\partial x}{\partial \tau_k}$$

(le cui coordinate si ottengono apponendo gli indici alla x). Mentre il punto x varia sulla V_k la retta xA descrive una varietà V' che ha dimensione k o $k+1$ secondo che la xA è tutta contenuta in V_k (e in tal caso $V'\equiv V_k$) oppure no. Per decidere cerchiamo la dimensione dello spazio tangente a V' in un punto qualsiasi della retta xA. Esso, come si riscontra subito, è determinato dai punti

$$x, A, \frac{\partial A}{\partial \tau_1}, \frac{\partial A}{\partial \tau_2}, \dots, \frac{\partial A}{\partial \tau_k},$$

quindi non dipende dal punto scelto sulla generatrice, ma solo da x, e coincide, in virtù delle equazioni scritte, con lo S_k tangente in x a V_k. Dunque $V'\equiv V_k$ è rigata ed ammette uno S_k tangente fisso per tutti i punti di una generatrice, c. d. d.

Si noti che nella dimostrazione non è stato necessario derivare le equazioni date, e che quindi il risultato vale per ogni singolo punto x per cui valgano quelle equazioni.

[1] F. Schur, loc. cit., pag. 345.

[2] Se fossero nulle tutte le c la V_n sarebbe uno S_n, se fossero nulli tutt'i mi- minori del 2° ordine la V_n sarebbe la (n-1)-esima sviluppabile di una curva: casi evidenti a priori.

Ciò equivale alla possibilità di scrivere gli $n-2$ gruppi di equazioni seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 c_{11}+n_1 c_{21}+p_1 c_{31}=0 \\ m_1 c_{12}+n_1 c_{22}+p_1 c_{32}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1 c_{1n}+n_1 c_{2n}+p_1 c_{3n}=0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} m_2 c_{11}+n_2 c_{21}+p_2 c_{41}=0 \\ m_2 c_{12}+n_2 c_{22}+p_2 c_{42}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_2 c_{1n}+n_2 c_{2n}+p_2 c_{4n}=0 \end{array}\right. ;\ldots;$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_{n-2} c_{11}+n_{n-2} c_{21}+p_{n-2} c_{n1}=0 \\ m_{n-2} c_{12}+n_{n-2} c_{22}+p_{n-2} c_{n2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n-2} c_{1n}+n_{n-2} c_{2n}+p_{n-2} c_{nn}=0 , \end{array}\right.$$

cioè anche:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1^2}\right)^0+n_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^0+p_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_1}\right)^0=0 \\ m_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^0+n_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2^2}\right)^0+p_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_2}\right)^0=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_1 \partial x_n}\right)^0+n_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_2 \partial x_n}\right)^0+p_1\left(\dfrac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_3 \partial x_n}\right)^0=0 \end{array}\right. ;\ldots$$

Si noti però che le equazioni stesse sono pure soddisfatte dalle altre coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, essendo nulle tutte le derivate seconde che vi compariscono. Si tratta dunque del sistema di $n-2$ gruppi di n equazioni ciascuno, soddisfatto dalle coordinate dei punti della varietà (e dall' unità) nell' intorno dell'origine: il ragionamento ricordato nel num. preced. porta a concludere che per l'origine passa uno S_{n-2} contenuto nella varietà, e che questa ha in ogni punto di esso uno S_n tangente fisso. Ma poichè l'origine è stata scelta ad arbitrio sulla varietà, si conclude che:

Condizione necessaria per la deformabilità di una V_n di S_{n+1} è che essa sia luogo di ∞^2 S_{n-2}, e che abbia uno S_n tangente fisso lungo ognuno dei suoi spazii generatori.

4. Per veder meglio la natura di una tale V_n si osservi che la sua sezione con uno S_4 generico è una congruenza di rette con carattere di sviluppabile [1], in cui ciascuna generatrice è incontrata da due delle infini-

[1] C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. XXX (1910), pp. 87-121, n. 29; e F. Schur, loc. cit., § 11.

tamente vicine: per la genericità dello S_4 si conclude che ciascuno degli S_{n-2} generatori della V_n è incontrato da due degli infinitamente vicini in S_{n-3}, o, in altre parole, gli ∞^2 S_{n-2} possono distribuirsi *in due modi*, come spazii osculatori ad ∞^1 curve. Le due superficie luoghi di questi spigoli di regresso contengono un doppio sistema coniugato di linee (*caratteristiche*) del quale quelle curve fan parte: son due superficie della specie Φ [1] cioè le coordinate proiettive omogenee dei punti (x_i) di una di esse (riferita ai parametri variabili separatamente sulle caratteristiche) sono soluzioni di un'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \, \partial \tau_2} + a \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + b \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + cx = 0.$$

Anzi le due superficie possono considerarsi ottenute, una dall'altra, applicando $n-2$ volte a ciascuna la trasformazione di Laplace (in un determinato verso) [2]; le equazioni rappresentate dalle due superficie *focali* si ottengono allo stesso modo una dall'altra.

Queste V_2 focali non sono le più generali della specie Φ (con un doppio sistema coniugato) perchè la condizione trovata è semplicemente necessaria, e le altre condizioni per la deformabilità debbono appunto riflettersi sulla natura di queste V_2. Lasciando al num. successivo il precisare queste particolarità, possiamo intanto dire che la nostra V_n ammette la generazione seguente:

Si consideri in S_{n+1} *una particolare superficie* V_2 *con un doppio sistema coniugato, rappresentante cioè un'equazione di Laplace*:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \, \partial \tau_2} + a \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + b \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + cx = 0.$$

Gli S_{n-2} *osculatori alle curve di un sistema descrivono la* V_n [3].

5. Non però ogni V_n così costruita è deformabile. Lo Sbrana ha dimostrato analiticamente (e si potrebbe confermare con ragionamenti infini-

[1] C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi, legata colle equazioni alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1047-1079.

[2] E. Bompiani, *a) Sull'equazione di Laplace*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. XXXIV (1912), pp. 383-407, n. 3; *b) Sur les configurations de Laplace*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, tom. 156 (1913), pp. 603-605, n. 3.

[3] Cfr. per $n=3, 4, 5$, Sbrana, loc. cit., *a)* § 20; *b)* § 7 in fine; per n qualunque rimane confermata una fondata supposizione dello Sbrana (loc. cit., *a)*, § 21): l'identità dei suoi enunciati con i nostri dipende appunto dalle considerazioni citate nella nota precedente, per le quali si può fare a meno di considerare le superficie intermedie fra due date in una certa successione di trasformate di Laplace. Per es. che i piani tangenti ad una superficie Φ possano considerarsi come osculatori alle caratteristiche (in un sistema) di una trasformata di Φ risulta dalla mia Nota cit. *b)*, n. 3.

tesimali) che gli S_{n-2} si mantengono rigidi nella deformazione. Vogliamo tradurre questa condizione in un'altra relativa alle superficie focali.

Intanto è chiaro che con la V_n si deformano queste V_2 lasciando coniugati i sistemi coniugati. Ma poichè gli S_{n-2} rimangono rigidi, e questi (per il num. prec.) sono osculatori ad un sistema di caratteristiche sù ciascuna V_2, di queste caratteristiche rimangono inalterati nella deformazione tutti gli elementi contenuti in uno S_{n-2}, cioè le prime $n-3$ curvature. E poichè in queste condizioni esiste effettivamente una deformazione (finita o infinitesima) della V_n (secondo che le V_2 focali sono deformabili in modo finito o infinitesimo) [1] si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la V_n costruita al numero precedente sia deformabile, è che si possano deformare (in modo finito o infinitesimo) le due V_2 focali (ciascuna $(n-2)$-esima trasformata di Laplace dell'altra) in modo che si conservino inalterate le prime $n-3$ curvature delle caratteristiche a cui gli S_{n-2} di V_n sono osculatori.

Solo per ($n=3$, cioè per) S_4 il problema di deformare, nel modo ordinario e simultaneamente, due superficie contigue in una successione di Laplace coincide con la ricerca delle V_3 deformabili [2].

La deformazione di una V_n avviene, quando sia possibile, deformando le sviluppabili formate dagli S_{n-2} e lasciando questi inalterati: ma le $(n-2)$-esime sviluppabili di due curve non sono sovrapponibili con i loro spazii generatori se le due curve non hanno le stesse prime $n-2$ curvature nei punti che verranno a sovrapporsi. Nel nostro caso questi spigoli di regresso sono le caratteristiche (in un sistema) delle superficie focali: sicchè, mentre dal teorema precedente risulta necessario che dette caratteristiche conservino nella deformazione le prime $n-3$ curvature, *esse conservano effettivamente anche le $(n-2)$-esime.*

Il problema che nasce nel caso più generale di deformare una superficie lasciando inalterate certe curvature di un suo dato sistema di linee, mi pare di per sè interessante: e mi propongo di ritornarvi altrove.

6. Ogni V_ν $(\nu < n)$ contenuta in V_n è deformabile.

[1] Analiticamente le condizioni si presentano in modo distinto: cfr. i due lavori dello Sbrana.

[2] Cfr. Sbrana, loc. cit., *a*), § 19.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota del prof. C. Severini, presentata dal Socio S. Pincherle.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur certaines équations intégrales.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Cette Note est consacrée à l'étude de quelques équations de la forme:

$$(1)\quad (a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\overset{\times\times}{K^m}(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{F_1})\overset{\times\times}{K^{m-1}}(xy) + \cdots +$$

$$+ (a_{m-1} + \overset{\times\times}{F}_{m-1})\overset{\times\times}{K}(xy) + F_m(xy) = 0\,,$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_m$ sont des fonctions données intégrables dans le champ des variables réelles $(a \leq x \leq b\,,\ a \leq y \leq b)$, où $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ sont des constantes, où $K(xy)$ est la fonction inconnue, $\overset{\times\times}{K^m}(xy)$ la puissance composée d'ordre m du noyau $K(xy)$, où enfin les symboles tels que

$$(a_{m-1} + \overset{\times\times}{F}_{m-1})\overset{\times\times}{K}(xy)$$

représentent le résultat de la composition de deuxième espèce:

$$(a_{m-1} + \overset{\times\times}{F}_{m-1})\overset{\times\times}{K}(xy) = a_{m-1}\,K(xy) + \int_a^b F(xs)\,K(sy)\,ds\,.$$

Ces équations ont été étudiées, dans certains cas, par MM. Lauricella et Volterra [1]. Je voudrais surtout montrer que les équations de la forme (1) peuvent être classées en catégories très différentes par la nature de leurs solutions.

1. Commençons par supposer $F_m(xy)$ égal à zéro et a_{m-1} différent de zéro. L'équation peut s'écrire:

$$K(xy) = -\frac{1}{a_{m-1}}\int_a^b N(xs)\,K(sy)\,ds$$

avec

$$N(xy) = (a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\overset{\times\times}{K^{m-1}}(xy) + \cdots + \overset{\times\times}{F}_{m-1}\overset{\times\times}{K}(xy)\,.$$

Admettons que $K(xy)$ soit une solution bien determinée de cette équation. En regardant y comme un paramètre fixe, on peut dire que $K(xy)$ est solution d'une équation de Fredholm sans second membre de noyau $N(xy)$ pour la constante caractéristique $-\dfrac{1}{a_{m-1}}$. Le noyau $N(xy)$ est inconnu;

[1] Lauricella, Atti della R. Accad. dei Lincei, 18 juin 1911 et 16 mars 1913; Annali di Matematica, octobre 1913. Volterra, Atti della R. Accad. dei Lincei, 23 avril 1911 et 27 juillet 1913; *Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne*, page 183.

nous savons, cependant, qu'il ne peut admettre qu'un nombre fini de solutions fondamentales linéairement distinctes pour la constante $-\dfrac{1}{a_{m-1}}$. Je désigne ces solutions fondamentales par

$$a_1(x)\,,\, a_2(x)\,,\, \dots\,,\, a_n(x)\,.$$

La solution fondamentale $K(xy)$ est une combinaison linéaire de celles-là, dont les coëfficients peuvent dépendre du paramètre y. $K(xy)$ est donc de la forme:

$$K(xy) = a_1(x)\, b_1(y) + a_2(x)\, b_2(y) + \cdots + a_n(x)\, b_n(y)\,. \tag{2}$$

2. Je me contenterai de ce résultat dans le cas général.

Supposons les fonctions $F_0, F_1, \dots, F_m$ deux à deux permutables, et ne cherchons que les fonctions $K(xy)$ permutables à $F_0, F_1, \dots, F_m$.

J'ai démontré [1] que, dans ces conditions, $a_1(x), a_2(x), \dots, b_1(y), b_2(y), \dots$ sont des combinaisons linéaires des fonctions principales de $F_i(xy)$: et cela pour toutes les valeurs de i.

Dans cette Note je n'étudierai qu'un cas particulier dont j'aurai besoin tout à l'heure: le cas où les fonctions $F_i(xy)$ sont des sommes de puissances composées, d'un même noyau $G(xy)$

$$F_i(xy) = e_{i1}\, G(xy) + e_{i2}\, \overset{\times\times}{G}{}^2(xy) + \cdots \qquad (i = 0\,, 1\,, \dots\,, m \quad 1)\,, \tag{3}$$

ces séries étant intégrables terme à terme; et encore je ne chercherai pas systématiquement toutes les solutions.

1°) Soient $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ deux solutions fondamentales de $G(xy)$ à droite et à gauche, correspondant à une même constante caractéristique de $G(xy)$, telles, de plus, que

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 1\,,$$

ce qui exige que la constante caractéristique soit simple.

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont aussi solutions fondamentales de $F_i(xy)$ et on a:

$$\int_a^b F_i(xs)\, \varphi(s)\, ds = \frac{\varphi(x)}{\mu_i}\,, \quad \int_a^b F_i(sy)\, \psi(s)\, ds = \frac{\psi(y)}{\mu_i}$$
$$(i = 0\,, 1\,, \dots\,, m-1)\,.$$

Cherchons une solution de la forme $\dfrac{\varphi(x)\,\psi(y)}{\lambda}$. On aura:

$$\varphi(x)\,\psi(y)\left[\left(a_0 + \frac{1}{\mu_0}\right)\frac{1}{\lambda^m} + \left(a_1 + \frac{1}{\mu_1}\right)\frac{1}{\lambda^{m-1}} + \cdots + \left(a_{m-1} + \frac{1}{\mu_{m-1}}\right)\frac{1}{\lambda}\right] = 0$$

[1] Atti della R. Accad. dei Lincei, 16 février 1913.

et il est toujours possible de choisir λ pour qu'il en soit ainsi (si $m > 1$).

$\varphi(x)$ étant ainsi choisi, si on remplaçait $\psi(y)$ par une fonction quelconque $\psi'(y)$ telle que

$$\int_a^b \varphi(s)\, \psi'(s)\, ds = 1\ ,$$

$\dfrac{\varphi(x)\,\psi'(y)}{\lambda}$ serait toujours une solution de (1); mais elle ne serait plus permutable à $F_i(xy)$.

2°) Supposons qu'il existe deux fonctions $h(x)\,,\,l(y)$, telles que

$$(4) \qquad \int_a^b h(s)\, l(s)\, ds = 1\ ,\quad \int_a^b G(xs)\, h(s)\, ds = \int_a^b G(sy)\, l(s)\, ds = 0\ .$$

Cherchons une solution de la forme $\dfrac{h(x)\, l(y)}{\lambda}$. On devra avoir:

$$h(x)\, l(y) \left[\frac{a_0}{\lambda^m} + \frac{a_1}{\lambda^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\lambda} \right] = 0\,,$$

et on pourra trouver λ vérifiant cette condition.

3°) Soient deux solutions $K(xy)$ et $K'(xy)$ de l'équation (1), telles que:

$$\overset{\times\times}{K}\overset{\times\times}{K'} = \overset{\times\times}{K'}\overset{\times\times}{K} = 0\ .$$

$K + K'$ est alors solution de (1). Or les solutions déjà trouvées peuvent être supposées ortogonales deux à deux.

On pourrait trouver de même des solutions formées non plus exclusivement avec des solutions fondamentales, mais aussi avec des fonctions principales.

L'équation (1), *quand les* $F_i(xy)$ *ont la forme* (3) *et quand* $F_m(xy)$ *est nul et* a_{m-1} *non nul, admet en général une infinité de solutions de la forme* (2), *et n'admet que des solutions de cette forme.*

3. Étudions maintenant l'équation:

$$(5) \quad (a_0 + \overset{\times\times}{F}_0)\, \overset{\times\times}{K}{}^m(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{F})\, \overset{\times\times}{K}{}^{m-1}(xy) + \cdots +$$
$$+ (1 + \overset{\times\times}{F}_{m-1})\, \overset{\times\times}{K}(xy) + F_m(xy) = 0\,,$$

où le coëfficient constant de $K(xy)$ est différent de zéro (nous le supposons égal à 1) et où les fonctions $F_0\,,\, F_1\,, \ldots$ sont des sommes de puissances composées d'un même noyau $zG(xy)$

$$F_i(xy) = e_{i1}\, zG(xy) + e_{i2}\, z^2 \overset{\times\times}{G}{}^2(xy) + \cdots \qquad (i = 0\,,1\,,\ldots,m)\,.$$

Supposons $G(xy)$ borné; supposons aussi, qu'il existe une série à rayon de convergence infini, a coëfficients réels positifs

$$A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots$$

telle que

$$|e_{in}| < A_n \qquad (i = 0, 1, \dots, m).$$

On aura, alors,

$$|e_{in} \overset{\times\times}{G^n}(xy)| < A_n d^n ,$$

d étant un nombre positif fixe.

Les fonctions $F_i(xy)$, et aussi les séries

$$f_i(z) = e_{i1} z + e_{i2} z^2 + \cdots + e_{in} z^n + \cdots \qquad (i = 0, 1, \dots, m),$$

sont des fonctions entières de z; de plus, $F_i(xy)$ admet une série majorante indépendante de x et de y.

Employons la méthode de M. Volterra sous la forme indiquée par M. Lebesgue ([1]). Écrivons l'équation obtenue en remplaçant, dans (5), $zG(xy)$ par z, $K(xy)$ par u et les opérations de composition par des produits. On obtient

$$(6) \qquad (a_0 + f_0(z))\, u^m + (a_1 + f_1(z))\, u^{m-1} + \cdots + \\ + (1 + f_{m-1}(z))\, u + f_m(z) = 0 .$$

La solution de cette équation algébrique en u, qui devient nulle pour $z = 0$, peut être considérée comme branche d'une fonction analytique non uniforme de z, et peut être developpée en série à rayon de convergence fini:

$$(7) \qquad u = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

Les points singuliers de la fonction analytique $f(z)$ seront désignés par $\beta_1, \beta_2, \dots$

Considérons la série:

$$(8) \qquad F(z|xy) = c_1 z\, G(xy) + c_2 z^2 \overset{\times\times}{G^2}(xy) + c_3 z^3 \overset{\times\times}{G^3}(xy) + \cdots$$

Elle peut définir une fonction analytique de z, $F(z|xy)$. Ses coëfficients sont les produits des coëfficients de même rang de la série (7) et de la série

$$(9) \qquad \mathcal{G}(z|xy) = z\, G(xy) + z^2 \overset{\times\times}{G^2}(xy) + z^3 \overset{\times\times}{G^3}(xy) + \cdots$$

Cette dernière fonction, noyau résolvant de $G(xy)$ a pour pôles les constantes caractéristiques de $G(xy)$: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

On sait, d'aprés M. Hadamard que $F(z|xy)$, a pour points singuliers les seuls points $\alpha_i \beta_j$.

([1]) Société math. de France, tome XL, 1912.

4. La fonction $F(z|xy)$ n'est pas, en général, uniforme: mais on peut obtenir une de ses déterminations par la formule de Parseval

$$F(z|xy) = \int_C \mathcal{G}(t|xy)\, f\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t},$$

(C) étant un contour du plan de la variable complexe t qui laisse à l'extérieur les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et qui entoure les points $\frac{z}{\beta_i}$ et l'origine. Un pareil contour existe toujours si z n'est pas un point d'affixe $\alpha_i \beta_j$.

Transformons cette formule en remplaçant $\mathcal{G}(t|xy)$ par l'expression qu'en donne M. Fredholm:

$$\mathcal{G}(t|xy) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} t^n D_n(xy)}{\Delta(t)},$$

dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières de t. On sait, de plus, que le numérateur admet une série majorante dont les termes sont indépendants de x et de y. L'expression $\dfrac{f\left(\frac{z}{t}\right)}{t\,\Delta(t)}$ est une fonction holomorphe de t sur le contour (C) et dans une région annulaire entourant le contour (z n'étant pas singulier). Son module admet une borne supérieure. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n f\left(\frac{z}{t}\right)}{t\,\Delta(t)} D_n(xy)$$

peut donc s'intégrer terme à terme. On a donc un résultat de la forme:

$$(10) \qquad F(z|xy) = \sum_{1}^{\infty} P_n(z) \,.\, D_n(xy);$$

et cette dernière série admet, pour une valeur déterminée de z, une série majorante dont les termes sont indépendants de x et de y. On peut donc intégrer terme à terme en x et y la série (10), et aussi les produits de séries de la forme (10) obtenues de la même manière. D'autre part, on démontre sans difficulté que les fonctions $D_n(xy)$ sont des sommes d'un nombre fini de puissances composées de $G(xy)$.

On pourra conclure, de ces remarques que les puissances composées de $F(z|xy)$ défini par l'équation (10) sont des fonctions analytiques de z; que $F(z|xy)$ est permutable à $G(xy)$ et aussi à toute fonction bornée permutable à $G(xy)$.

5. Montrons, maintenant, que $F(z|xy)$ vérifie l'équation (5). Si on remplace $K(xy)$ par $F(z|xy)$, le premier membre de l'équation (5) est d'après

ce qui précède une fonction analytique de z. Si z est inférieur au rayon de convergence de la série (8), cette fonction est nulle; les calculs qui permettront de la vérifier, correspondent à ceux qui permettent de vérifier que la série (7) est solution de l'équation (6). Si maintenant z prend une valeur quelconque, cette même fonction analytique reste nulle.

Il existe donc une solution de l'équation (5) *pour toute valeur de* z, *qui n'est pas de la forme* $\alpha_i \beta_j$.

6. Supposant que z n'est pas une de ces valeurs singulières, cherchons les autres solutions de l'équation (5) permutables à $G(xy)$.

On a vu qu'elles seront aussi permutables à la solution déjà obtenue, $F(xy)$. $K(xy)$ étant une de ces solutions, posons:

$$K(xy) = F(xy) + \Phi(xy) .$$

L'équation que vérifie $\Phi(xy)$, est de la forme:

$$(11) \qquad (a_0 + \overset{\times\times}{H_0})\,\overset{\times\times}{\Phi^m}(xy) + (a_1 + \overset{\times\times}{H_1})\,\overset{\times\times}{\Phi^{m-1}}(xy) + \cdots + \\ + (1 + \overset{\times\times}{H_{m-1}})\,\overset{\times\times}{\Phi}(xy) = 0 ,$$

où on a

$$H_0 = F_0 \; ; \; H_1 = F_1 + m\,(a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\,\overset{\times\times}{F} \; ;$$

$$H_2 = F_2 + (m-1)\,(a_1 + \overset{\times\times}{F_1})\,\overset{\times\times}{F} + \frac{m(m-1)}{2}\,(a_0 + \overset{\times\times}{F_0})\,\overset{\times\times}{F^2} \; ;$$

Ces fonctions $H_i(xy)$ peuvent donc étre developpées en séries régulièrement convergentes, dont les termes sont des sommes de puissances composée de $G(xy)$. Les considérations du paragraphe 2 sont donc applicables.

Si z n'est pas une valeur singulière, l'équation (5) *admet en général une infinité de solutions. Ces solutions s'obtiennent en ajoutant à* $F(xy)$ *des fonctions de la forme*

$$a_1(x)\, b_1(y) + \cdots + a_n(x)\, b_n(y) ,$$

les $a(x)$ *et* $b(y)$ *étant certaines combinaisons linéaires des fonctions principales de* $G(xy)$.

La même méthode peut être appliquée au cas où les fonctions enviragées dépendent non plus d'un seul noyau $G(xy)$, mais de plusieurs fonctions permutables [1].

Si la constante a_{m-1} est nulle, le problème est de nature bien différente; c'est ce que montrent les exemples traités par. M. Lauricella.

[1] Lebesgue, loc. cit.

Meccanica celeste. — *Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete.* Nota del dott. ing. G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Matematica. — *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Nota II di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* Nota di BRUNACCI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli di diffrazione nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli.* Nota II di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Per acquistar conoscenza della pratica dal metodo descritto nella Nota antecedente, ho determinato con esso il coefficiente di dilatazione termica del bronzo da telescopî d'un buon reticolo (*Best*) di Rowland, concavo, di 3 metri di raggio, lungo 8,5 cm. e con 568 linee per millimetro.

L'estensione ed il potere riflettente di questo reticolo erano certo maggiori di quelli che si potrebbero ottenere sulla faccia d'un cristallo, e quindi gli spettri erano più nitidi e brillanti; però è anche da notare che la piccola divergenza dei raggi solari coi quali ho sempre sperimentato, non mi permetteva di giovarmi di tutta l'estensione del reticolo, ma solo di pochi centimetri di esso. Inoltre l'apparecchio provvisorio, messo su con i soliti sostegni da laboratorio, comodi ma imperfetti, richiedeva molteplici adattamenti, spesso contrastanti e non molto stabili, per ottenere le migliori condizioni per l'osservazione; cosicchè spesso queste condizioni erano già inizialmente non ottime, e peggioravano nel corso dell'esperienza (tanto che, qualche volta, essa riusciva perciò vana), dimodochè è probabile che, coll'evitare queste deficienze, possa esser compensata la minor bontà del reticolo.

Due cause di spostamenti delle righe non considerate nel calcolo precedente perchè irregolari ed evitande, sono gli spostamenti del reticolo e

quelli dei raggi incidenti sulla sua superficie quando l'oculare non è bene in foco.

Non credendo di poter ottenere l'immobilità assoluta del reticolo, ho cercato di procedere in modo da poter eliminare o correggere gli effetti di questi movimenti. Prima ho disposto la fessura sul centro di curvatura del reticolo, dimodochè i raggi incidenti fossero perpendicolari alla sua superficie e producessero quindi due serie simmetriche di spettri nelle quali le righe, per effetto del riscaldamento, si spostavano in sensi opposti, mentre, per effetto dei movimenti del reticolo si spostavano nello stesso senso, quindi sulla media dei valori assoluti degli spostamenti d'una riga in due spettri simmetrici i piccoli spostamenti del reticolo non influivano.

In seguito, poichè gli spettri simmetrici avevano luminosità molto diverse, volli osservare nel modo indicato dal Rowland e generalmente seguìto: cioè scambiai le posizioni della fessura e dell'oculare, che quindi era diretto perpendicolarmente al reticolo, e verificai la posizione di questo, per le necessarie correzioni, osservando (coll'oculare stesso) l'immagine, prodotta da esso, di un'astina o di una fessura verticale fissa all'oculare, convenientemente illuminata.

Ho usato finalmente un'altra disposizione molto comoda: collocai cioè l'oculare presso la fessura (allato o al disopra) dimodochè fosse approssimativamente $i = e$ ed ho verificato la posizione del reticolo nel modo ora detto, ma con un apposito oculare perpendicolare ad esso.

Per mettere in fuoco l'oculare, non era sufficiente di spostarlo finchè le righe dello spettro apparissero nitide, giacchè, per effetto della ristrettezza del fascio e della grande distanza focale, la posizione così ottenibile era molto incerta; invece spostavo lo specchio del portaluce in modo che i raggi incidenti si muovessero da un lato all'altro del reticolo. Se l'oculare era bene in fuoco le righe rimanevano immobili; se queste si muovevano l'oculare non era in fuoco, e dal senso del movimento si deduceva facilmente (seguendo sulla carta l'andamento dei raggi) se l'oculare era troppo vicino al reticolo, o troppo lontano.

È tuttavia da notare che, ad eccezione dello spettro normale osservato colla 2ª delle suddette disposizioni, tutti gli altri sono più o meno inclinati (tanto più, quanto maggiore è cos e) rispetto al piano focale dell'oculare: quindi una sola riga può trovarsi esattamente su di esso, e per essa sola l'oculare è esattamente in foco; per le altre a destra o a sinistra, l'oculare è o troppo lontano o troppo vicino al reticolo. Tuttavia queste differenze sono piccole.

Nelle prime esperienze, il reticolo, all'aria libera, era tenuto ad uno degli angoli inferiori con una morsa di ferro, mentre l'altro angolo riposava sopra un tubo di quarzo collocato sopra un piano molto stabile che sosteneva anche la morsa.

Il centro di curvatura del reticolo si trovava sulla fessura (verticale come le linee dello stesso); osservavo le due righe del sodio nei due spettri di 1° ordine, con due oculari di Mittenzwey (Huygens), di 20 mm. di distanza focale equivalente, provvisti di micrometri oculari (1 cm. diviso in decimi di millimetro), collocati nel piano focale fra le due lenti. Questi oculari, molto comodi per la grande ampiezza del campo, dànno presso gli orli un ingrandimento un po' diverso che al non centro. Feci le opportune correzioni osservando, coll'aiuto d'un buon obbiettivo, un oggetto lontano cilindrico e quante divisioni questo occupava al centro e presso gli orli.

Riscaldavo il reticolo passando rapidamente e ripetutamente sul suo dorso una fiamma Bunsen, e poi lo lasciavo raffreddare liberamente, cioè lentamente, grazie alla gran massa ed al piccolo potere emissivo. Determinavo la sua temperatura mediante una coppia rame-costantano premuta contro la faccia anteriore, ricoperta essa coppia da un dischetto di foglia di rame, che facilitava l'uniforme distribuzione della temperatura, e da un disco di panno spesso (sovrapposto al rame) che difendeva la coppia dall'azione raffreddante dell'aria esterna. Volevo saldare la coppia ad un lato del reticolo; ma, a contatto del saldatore ben caldo, si produsse nel bronzo una scheggia lunga 2 cm.. spessa all'incirca 1 mm., che venne proiettata parecchi decimetri lontano.

Qualche volta, giovandomi d'una profonda cavità rimasta nel getto del bronzo fuso e situata proprio nel mezzo del dorso del reticolo, collocai la coppia suddetta in questa cavità che avevo riempita di petrolio; due coppie identiche collocate simultaneamente nei due modi suddetti, davano indicazioni eguali. L'altra coppia termoelettrica, costantano-morsetto, era all'aria libera a contatto con un termometro a mercurio.

Le intensità della corrente erano misurate da un galvanometro Wiedemann, di cui avevo determinato la sensibilità in gradi termometrici collocando la coppia termoelettrica, entro un tubo di vetro, nella stufa per il punto 100° dei termometri.

Durante le esperienze osservavo successivamente la deviazione nel galvanometro, la posizione delle righe nei due spettri, e poi nuovamente la deviazione del galvanometro e la temperatura dell'ambiente; e ripetevo queste osservazioni ad intervalli di un quarto d'ora o più.

Sebbene in queste esperienze, più che altro d'orientamento, si possano essere insinuate gravi cause d'errore (alcune delle quali ho man mano riconosciuto ed eliminato), credo utile di riferire alcuni risultati. Nella seguente tabella si trovano nella prima linea le temperature medie del reticolo, e nella seconda gli spostamenti medii osservati (delle righe del sodio nei due spettri di 1° ordine), espressi in divisioni del micrometro:

Temperatura . . .	25°	40°,4	57°,5	41°,4	36°,4	32°,4
Spostamento . . .	0	3,6	6,6	3,9	2,9	2,1

La distanza delle due righe del sodio era di 9,8 divisioni.

Non ho creduto conveniente di ricavare lo spostamento più probabile per il riscaldamento di 1°, combinando due a due le suddette osservazioni, e facendo la media dei valori; e neppure ho creduto utile di applicare il metodo dei minimi quadrati. Mi è parso invece preferibile di procedere graficamente, ed ho segnato su carta millimetrata 6 punti aventi per ascisse le temperature, per ordinate gli spostamenti corrispondenti. Essi punti avrebbero dovuto trovarsi all'incirca sopra una sola linea retta; invece (così in questa, come nelle posteriori determinazioni) essi sono disposti su due o più rette parallele, molto vicine, poichè, quando il reticolo, alla fine dell'esperienza, riprendeva la temperatura iniziale, le righe invece rimanevano un po' spostate. Il valore dello spostamento per grado, che si deduce da una o dall'altra di queste rette, è lo stesso: e nella precedente esperienza era di 8,3 divisioni per 40°, cioè

$$\delta a = 83\,,\ \delta T = 40°\,,\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0{,}6\ \mu\mu\,,\ a_1 - a_2 = 9{,}8\,,\ \lambda = 589\ \mu\mu.$$

Se ne ricava dunque, trascurando le correzioni, $K = 22.10^{-6}$.

In due successive serie di determinazioni, eseguite nello stesso modo, osservai la posizione delle due righe del sodio negli spettri di 2° ordine, la loro distanza essendo, a 26°, di 13,5 divisioni oculari; nella seguente tabella, in cui sono esposti i risultati, nella prima linea trovansi le deviazioni galvanometriche, nella 2ª gli spostamenti delle righe:

δT	50,5	83,5	43,5	22,5	67,5	41,5	30,0	23,6	18,7
de	7,3	11,4	5,4	2,84	8,9	5,8	4,0	3,35	2,1

Procedendo nel modo grafico sopra indicato, per una deviazione galvanometrica di 81 divisiont, ossia per un riscaldamento di 37°, è risultato uno spostamento delle righe di 11,06 divisioni: quindi, $K = 22.10^{-6}$.

Le correzioni, per il variare di i, e, λ, sono complessivamente nulle; difatti $i_1 = i = 0$: quindi $\tan i_1 = 0$ e $d'e = 0$. Inoltre si ha:

$$d''e = \tan e_1 \frac{n}{n-1} \frac{\delta T}{T}\quad,\quad d'''e = -\frac{m\lambda}{s \cos e} \frac{n}{n-1} \frac{\delta T}{T}\,.$$

Ma dalla (1), per $i = 0$, si ricava $\operatorname{sen} e = m\lambda/s$; e poichè $e = e_1$, i valori di $d''e$ e $d'''e$ risultano uguali e di segno contrario.

In seguito ho sostenuto il reticolo mediante un doppio T orizzontale d'ottone con viti di pressione, fissato ad un'asta pure d'ottone, ed inoltre lo circondai con una scatola di lamina di rame spessa 1 mm., di $11 \times 11 \times 4$ cm³, che aveva anteriormente un taglio o finestra orizzontale, alta 1 cm., e larga 10 cm., che lasciava scoperta la parte mediana dell'intero reticolo; riscaldavo questa scatola con una serie di fiammelle e misuravo la temperatura del reticolo nel modo già indicato.

Osservai la posizione delle righe b nello spettro normale di 3° ordine; siccome la lunghezza d'onda delle righe più sottili di questo gruppo, più

comoda per l'osservazione, non mi era nota, la dedussi dalla loro posizione data dal micrometro oculare, riferendola alle righe b_1, b_2, b_4 di lunghezza d'onda nota.

Credo inutile di riferire minutamente i risultati di tre serie di determinazioni eseguite in condizioni poco diverse. Due righe aventi una differenza di lunghezza d'onda 0,97 $\mu\mu$ apparivano nel micrometro oculare distanti 33,6 divisioni; quindi 1 divisione corrispondeva a 0,029 $\mu\mu$. Un riscaldamento di 50° produsse nelle tre serie spostamenti, in media, di 19,6 divisioni; ne risulta quindi: $K = 21,4.10^{-6}$. Anche in questo caso le correzioni sono complessivamente nulle.

In seguito ho collocato il reticolo entro un bagno d'aria completamente chiuso, formato da un recipiente d'ottone a modo di campana, a doppia parete, riposante sopra un disco di rame provvisto d'un foro, per cui passava l'asta che portava il reticolo. L'intervallo fra le due pareti era aperto in alto, ma munito di coperchio; era ripieno d'acqua e conteneva un serpentino in cui facevo passare una corrente di vapor d'acqua a 100°. Un tubo orizzontale d'ottone, di 3 cm. di diametro, ad un lato del bagno, a metà altezza, ne attraversava le due pareti, alle quali era saldato; esso veniva chiuso con un disco di vetro a faccie piane e parallele, attraverso il quale entravano i raggi incidenti ed uscivano quelli emergenti, poichè, per evitare la necessità di due tubulature, orientavo il reticolo in modo che i raggi incidenti che formavano le righe da osservare avessero la stessa direzione dei raggi emergenti. Per verificare la posizione del reticolo facevo girare la campana suddetta, che ne era affatto indipendente, finchè la tubulatura fosse perpendicolare alla superficie del reticolo ed osservavo (nel modo già indicato) la posizione del l'immagine di un'astina o di una fessura.

Osservai ancora la posizione delle righe b, ma nello spettro di 4° ordine. Sarebbe stato possibile di osservarle, con aumento della sensibilità, negli spettri di 5° e di 6° ordine; ma la poca luminosità ed il sovrapporsi degli spettri rendeva più difficile di riconoscere le righe.

Nelle suddette condizioni, due righe aventi lunghezze d'onda che differivano di 1.38 $\mu\mu$ apparivano nell'oculare distanti 71 divisioni: quindi 1 divisione corrispondeva a 0,019 $\mu\mu$.

Per una deviazione galvanometrica di 100 divisioni, ossia per un aumento di temperatura di 36°,5, ottenni uno spostamento, delle righe, di 21,5 divisioni, ossia di 0,4085 $\mu\mu$. Quindi $K = 0,4085/517 \times 36,5 = 21,6.10^{-6}$, senza le correzioni.

Poichè i raggi incidenti e quelli emergenti erano perpendicolari al disco di vetro, era $i_1 = 0$ $e_1 = 0$: quindi $d'e = 0$, $d''e = 0$. Rimane $d'''e =$ $= 0,8.10^{-6}$: quindi $K = 22,4 \times 10^{-6}$.

Questi valori ottenuti pel coefficiente di dilatazione del bronzo dei reticoli, sono un po' maggiori di quelli dati dalle Tavole di costanti fisiche, pel bronzo da telescopî.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe della serie di Balmer presentano diverse forme di scomposizione.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

Le prime prove da me fatte allo scopo di osservare, secondo la direzione della forza elettrica, la scomposizione delle righe spettrali dell'idrogeno davanti al catodo, mi permisero di stabilire ben nettamente che la H_γ si presenta risolta in una tripla di luce naturale corrispondente alla tripla interna di vibrazioni perpendicolari al campo, dell'effetto trasversale (1). La H_β dava invece un risultato poco chiaro; e nasceva quindi la necessità di adattare le condizioni dell'esperienza specialmente per l'osservazione di questa riga.

Pervenni così ad un risultato inatteso. La H_β si presenta come una doppia di luce naturale; mentre era da aspettarsi che anche per questa riga si vedesse una tripla corrispondente a quella interna dell'osservazione trasversale, secondo le esperienze di Stark (2) e quelle da me pubblicate (3). Questa doppia è molto meno discosta di quello che non fosse la doppia esterna dell'osservazione trasversale.

Sorse allora in me il dubbio che le prime osservazioni dell'effetto trasversale, nelle quali avevo concentrato la mia attenzione su la H_γ, che mostra più chiaro il fenomeno essendo le sue cemponenti sulle prove assai più discoste di quelle della H_β, non fossero state sufficientemente accurate per quello che riguarda la parte interna della riga azzurra; pure sembrandomi molto strano il fatto che due righe della serie di Balmer avessero un diverso comportamento.

Effettivamente la parte interna della H_β apparisce come una tripla sulle prime prove; ma queste, che per ottenere una sufficiente luminosità sulla H_γ erano eseguite a fenditura piuttosto larga, risultavano molto sovraesposte e non era da escludersi che la centrale fosse solo apparente e dovuta al contatto dei due lembi interni di una doppia mediana.

Pensai quindi a diminuire la larghezza della fenditura, a procedere ad una speciale e accuratissima messa in foco della H_β sulla lastra e ad elevare un poco la caduta di potenziale.

Il tubo era orizzontale e parallelo al piano della fenditura e si faceva arrivare su questa la sola luminosità della sezione immediatamente avanti

(1) In questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1904.
(2) J. Stark, Sitzungsber. der K. Preuss. Ak. der Wiss. 47, pag. 937, an. 1914.
(3) In questi Rendiconti, seduta del 21 dicembre 1913.

al catodo; ladurata dell'esposizione venne ridotta da una o due ore a 15 o 30 minuti.

Ebbene, in queste condizioni più opportune la H_β si mostrò composta nettamente in due doppie: la solita doppia esterna costituita da vibrazioni parallele al campo, che per la entità dello scarto e la minore luminosità (a motivo della polarizzazione dei 4 prismi) risultava ben netta anche nelle prime prove; e una doppia interna di vibrazioni perpendicolari al campo. L'aspetto delle due righe è rappresentato dalla figura, nella quale le componenti di vibrazioni parallele al campo sono quelle spostate verso l'alto.

Il diverso comportamento di due righe della serie di Balmer mostra l'opportunità di estendere l'indagine all'intero spettro dell'idrogeno.

Chimica. — *Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati.* Nota di Livio Cambi, presentata dal Socio R. Nasini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Solubilità e attività* (1). Nota di G. Pellini e A. Coppola, presentata dal Socio P. Ciamician.

Tra i criterî per distinguere se una sostanza racemica sia, allo stato solido, un composto racemico, oppure una miscela dei due antipodi ottici, oppure uno pseudoracemo, quello fondato sulla determinazione della solubilità degli antipodi e delle loro miscele è stato usato parecchie volte da diversi autori; tuttavia, tutti i problemi inerenti a tali determinazioni, e discussi teoricamente in special modo dal Van 't Hoff, da Bakuis Roozeboom (2) e dal Meyerhoffer (3), non hanno finora ricevuto una conferma sperimentale completa.

Con la presente Nota ci proponiamo di iniziare una serie di ricerche su questo argomento; e come sostanza da esaminarsi abbiamo scelto la α-alanina $CH_3CHNH_2.COOH$ che si rinviene in tutti i prodotti di scissione delle sostanze proteiche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

(2) Z. phys. Chemie, *28*, 494 (1889).

(3) W. Meyerhoffer, *Gleichgewicht der Stereomeren*. Leipzig, 1906.

Questa sostanza non contiene acqua di cristallizzazione, ed è facilmente solubile in acqua. Il suo potere rotatorio, in soluzione acquosa, è piccolissimo. Il prodotto naturale è destrogiro. Sotto forma di cloridrato in soluzione acquosa al 10 %, il potere rotatorio specifico è (¹)

$$[\alpha]_D^{20°} = +10.3 .$$

L'alanina fonde, in tubicino chiuso, con decomposizione.

Non esiste una grande differenza fra i punti di fusione degli antipodi ottici (+ 293°) e dell'inattivo (+ 285°): l'inattivo potrebbe essere tanto un composto racemico, quanto una miscela o uno pseudoracemo.

Il metodo delle curve di fusione in questo caso non può dare indicazioni nette, perchè l'alanina fonde ad alta temperatura, con decomposizione.

La d-alanina cristallizza nel sistema rombico, e in base alle figure di corrosione (²), è sfenoide-emiedrica:

$$a:b:c = 0,9784:1:0,4924 .$$

Piano degli assi ottici $\infty:P:\overline{\infty}$ (100); sfaldabilità non osservata.

La d-l-alanina cristallizza in bipiramidi rombiche:

$$a:b:c = 0,9971:1:0,4949 .$$

Piano degli assi ottici c {001}; sfaldabilità secondo a {100} ?

Si tratta dunque di sostanze cristallograficamente diverse, nella classe e nel piano degli assi ottici: esiste pure una lieve diversità nel rapporto $a:b$ dei parametri. Questi dati inducono a ritenere che l'inattivo sia verosimilmente un composto racemico.

Il calore di combustione della d-alanina è di 387.5 Calorie; quello della d-l-alanina, 387,5 Calorie.

Anche questi dati ci lasciano incerti sulla natura dell'inattivo: ed anzi si dovrebbe indurre, per la loro concordanza, che l'inattivo è una miscela di antipodi od uno pseudoracemo, piuttosto che un composto racemico, che dovrebbe avere in generale un calore di combustione diverso.

Nelle nostre misure di solubilità vennero adoperate la d-alanina e la d-l-alanina. La prima venne ricavata dai cascami di seta italiana mediante il metodo di E. Fischer (³), con buonissimo rendimento. Dopo tre cristallizzazioni, venne ottenuta allo stato di massima purezza. La d-l-alanina era di firma « Kahlbaum », pure purissima.

Per determinare il rapporto degli antipodi nella soluzione satura si prelevavano, con delle pipette di Meyerhoffer, quantità note di soluzione

(¹) Z. für Krystallographie, 1892, *20*, 127.
(²) F. Wrede, Z. phys. Chemie, *75*, 92 (1910).
(³) Fischer E., Berichte, *39*, 459 (1906).

(2, 5, 10 cm³), e per evaporazione e per essiccamento a 105° si determinava il peso del residuo: questo veniva sciolto e trasformato in cloridrato per aggiunta, in lievissimo eccesso, di HCl normale [1] e la soluzione cloridrica si esaminava al polarimetro. Note le concentrazioni totali delle soluzioni ed il potere rotatorio, si calcolavano facilmente le quantità di d- e l- composto. Tutte le osservazioni ottiche vennero eseguite con un grande polarimetro di Schmidt & Haensch (lettura della scala $^1/_{100}$ di grado), a 20° in tubo da 100 mm.

Siccome le soluzioni esaminate avevano una concentrazione variabile di cloridrato di alanina, venne studiata la variazione del potere rotatorio della d-alanina pura entro i limiti di concentrazione adoperati. Dai dati riportati si vede che la variazione della concentrazione non provoca nessuna differenza nel potere rotatorio specifico.

1ª soluzione, gr. 10,1316 di cloridrato di d-alanina in 100 grammi di soluzione acquosa:

$$d_{4^\circ}^{20^\circ} = 1,030 \qquad \alpha = +1,07 \qquad [\alpha]_D^{20^\circ} = +10,28\,;$$

2ª soluzione, gr. 6,9753 di cloridrato in 100 gr. di soluzione:

$$d_{4^\circ}^{20^\circ} = 1,0207 \qquad \alpha = +0,735 \qquad [\alpha]_D^{20^\circ} = +10,32\,;$$

3ª soluzione, gr. 2,9385 di cloridrato in 100 gr. di soluzione:

$$d_{4^\circ}^{20^\circ} = 1,0073 \qquad \alpha = +0,305 \qquad [\alpha]_D^{20^\circ} = +10,3\,.$$

Anche l'evaporazione della soluzione ed essiccamento prolungato del residuo a 105° non provoca nessuna variazione sensibile nei valori di $[\alpha]$: gr. 9,191 di cloridrato in 100 gr. di soluzione:

$$d_{4^\circ}^{20^\circ} = 1,029 \qquad \alpha = +0,96 \qquad [\alpha]_D^{20^\circ} = +10,15\,.$$

Venne eseguito pure l'esame ottico dei cristalli al fondo di ciascuna soluzione satura.

Le isoterme di solubilità, sperimentate, furono tre: a 0°, 17°, 30°. Si determinò pure la solubilità del d-composto e dell'inattivo a 45°.

Essendo, com'è noto, la solubilità degli antipodi ottici uguale, può risparmiarsi la determinazione di metà delle isoterme. L'isoterma a 17° venne eseguita ponendo in termostato miscele a proporzioni variabili di d- e d-l-composto ed esaminando, dopo almeno due giorni, la solubilità come pure l'attività delle soluzioni e dei cristalli di fondo.

Nelle isoterme a 0° e 30° vennero aggiunte, alla soluzione satura dell'inattivo quantità crescenti di d-alanina.

[1] Fischer E., loco citato.

Sostanze adoperate	Gr. di sostanza in 100 gr. di acqua conc. totale	Gr. di d-alanina nella miscela	Gr. di l-alanina nella miscela	$[\alpha]_D^{20°}$ della soluzione di cloridrato	Natura dei cristalli al fondo
Isoterma a 0°					
d-alanina . . .	gr. 12.986	gr. 12.986	gr —	+ 10.3	attivi
d-l-alanina. . .	12.889	—	—	—	inattivi
miscela *a* . . .	14.396	8.72	5.67	+ 2.18	»
» *b* . . .	17.281 } 17.293	13.17 } 13.27	4.11 } 4.01	+ 5.40 } 5.51	in parte attivi
» *c* . . .	17.305	13.38	3.92	+ 5.63	
Isoterma a 17°					
d-alanina . . .	15.171	15.171	—	+ 10.3	attivi
d-l-alanina . .	14.9698 } 14.948	—	—	—	inattivi
	14.9263				
miscela *a* . . .	18.734	14.296	4.44	+ 5.42	»
» *b* . . .	18.651	14.51	4.14	+ 5.73	»
» *c* . . .	18.127	14.92	3.20	+ 6.56	attivi
» *d* . . .	16.356	14.76	1.59	+ 8.29	»
Isoterma a 30°					
d-alanina . . .	17.385 } 17.39	17.39	—	+ 10.3	attivi
	17.394				
d-l-alanina . .	17.675 } 17.725	—	—	—	inattivi
	17.809				
	17.693				
miscela *a* . . .	19.761	13.95	—	+ 4.25	»
» *b* . . .	21.598 } 22.037	16.80 } 17.05	4.80 } 4.99	+ 5.73	in parte attivi
» *c* . . .	22.174	17.08	5.09	+ 5.60	
» *d* . . .	22.341	17.27	5.07	+ 5.63	

Solubilità a 45° d-alanina grammi 20,545: {20,461 ; 20,630}; d-l-alanina gr. 21,576 {21,606 ; 21,485 ; 21,571 ; 21,645}.

Con i dati su riportati vennero costruiti i diagrammi delle figure 1, 2.

Nel diagramma della fig. 1 sono riportate sulle ascisse le concentrazioni della l-alanina; sulle ordinate le concentrazioni della d-alanina. Nel diagramma della fig. 2, sulle ascisse le temperature, sulle ordinate le concentrazioni della d-alanina e del racemo [1]. I dati di solubilità e di attività mostrano che nel caso della alanina l'inattivo è un vero composto racemico:

[1] Hollemann e Antusch [Rec. trav. chim., 13, 297 (1894) per la solubilità dell'alanina racemica a 25°, dànno il valore 16, 47 grammi per gr. 100 di solvente, in buon accordo con le nostre esperienze.

ciò che non era possibile decidere dai dati riportati nella prima parte della Nota.

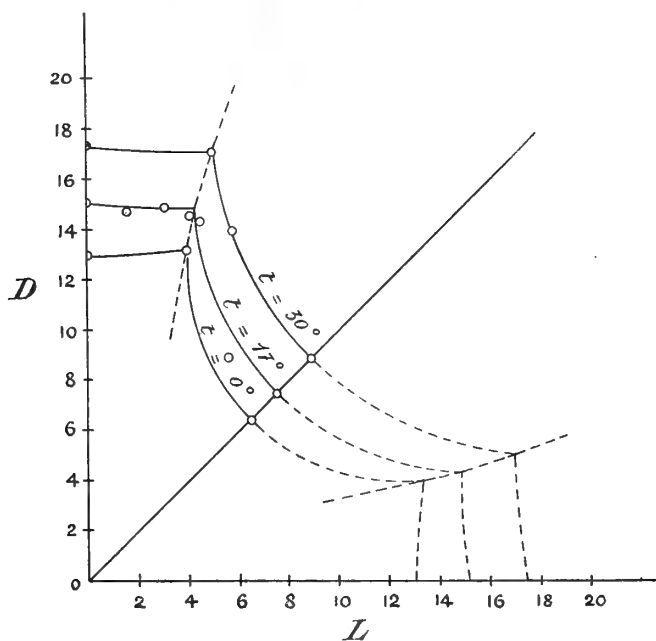



Fig. 1.

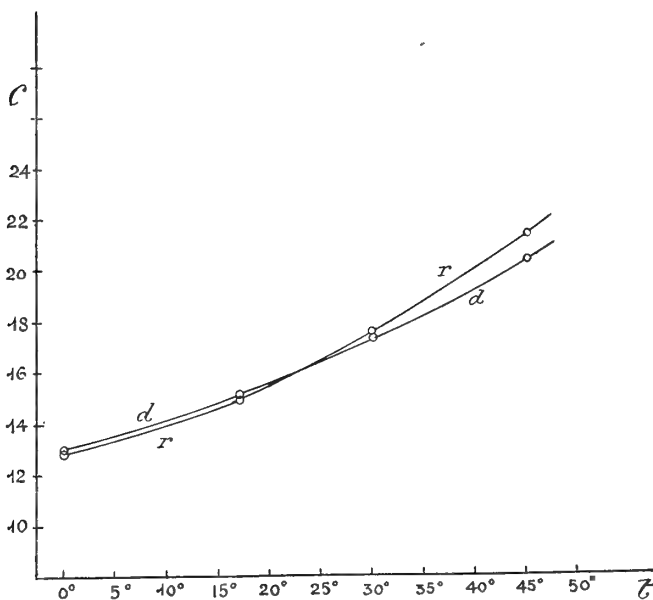



Fig. 2.

Tutte le previsioni della teoria [1] vengono completamente confermate.

[1] Zeit. phys. Chemie, *28*, 494 (1889).

Il campo di stabilità del racemo aumenta con l'aumentare della temperatura. Il punto di trasformazione del racemo nella miscela degli antipodi è verosimilmente più basso della temperatura crioidratica. Dai dati della fig. 2 si vede che la solubilità del racemo è leggermente più piccola di quella del d-composto (praticamente uguale) fino a circa 25°, e poi aumenta, col crescere della temperatura, più di quella del rispettivo d-composto. Tali curve di solubilità meritano una ulteriore discussione.

Il Meyerhoffer, in base a considerazioni teoriche, verificate con qualche dato sperimentale,[1] ha stabilito i seguenti rapporti fra la solubilità di un inattivo e di un antipodo ottico:

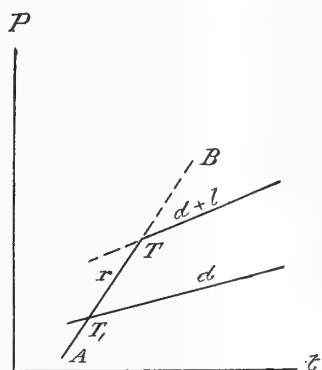



Fig. 3.

1°) Se la solubilità di un inattivo è uguale o più piccola di quella dei composti attivi, l'inattivo è un composto racemico; se la solubilità è più grande, può trattarsi tanto di un composto racemico quanto di una miscela.

2°) Se si determinano le variazioni di solubilità con la temperatura, e le solubilità dell'inattivo più solubile e di uno degli antipodi, con l'aumentare della temperatura, convergono, l'inattivo è un composto racemico; se invece divergono, rimane dubbio se si tratti di una miscela o di un racemo.

Una verifica completa sperimentale di queste regole non venne ancora fatta.

Tali regole possono comprendersi quando, con il Meyerhoffer, si consideri il diagramma pressione-temperatura del sistema racemo-antipodo ottico. Nella fig. 3 la miscela degli antipodi $(d + l)$ ha una pressione doppia che i singoli antipodi (si tratta di stereoisomeri senza acqua di cristallizzazione). La pressione del racemo può essere inferiore a quella di d (A T_r), oppure superiore (T_r T B). Alle pressioni (nel vuoto) noi possiamo sostituire le concentrazioni in un solvente inattivo. Si vede, allora, che il racemo, a seconda

della temperatura, può avere una solubilità più piccola o superiore e, al massimo, doppia del d-composto: soltanto nel caso che con l'aumentare della temperatura avvenga una racemizzazione, una aggregazione molecolare, oppure che la soluzione del racemo sia soprasatura, può verificarsi il caso di una solubilità maggiore del doppio del d-composto (curva labile T B). Una analoga figura (fig. 4) si ha nel caso che il racemo sia stabile a temperatura elevata.

Nel caso della fig. 3, $\frac{dp}{dt}$ del racemo è $> \frac{dp}{dt}$ dell'antipodo; nella fig. 4 è il caso inverso.

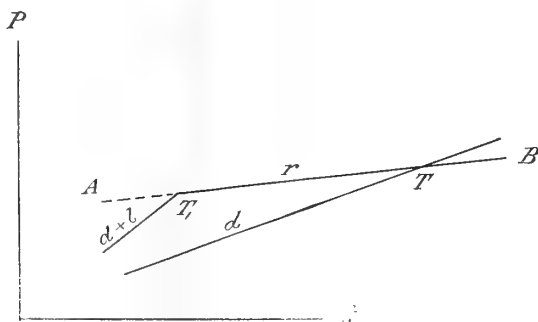



Fig. 4.

Se si osserva ora il diagramma della fig. 2, si trova che esso corrisponde al caso della fig. 3. Le regole del Meyerhoffer trovano dunque una conferma sperimentale: tuttavia non completa, perchè dalla fig. 3 si deduce che il punto di trasformazione del racemo nella miscela degli antipodi giace a temperatura elevata; invece nel caso della alanina succede il contrario, perchè aumenta la stabilità del racemo con l'aumentare della temperatura. Questa contraddizione può tuttavia essere soltanto apparente: poichè con l'elevarsi della temperatura potrebbero intervenire fenomeni di aggregazione molecolare (sulla cui natura non è possibile di pronunziarsi con sicurezza) tali da aumentare la stabilità del racemo: d'altra parte, non è poi escluso che, ad elevata temperatura, possa di nuovo diminuire la stabilità del composto racemico. Le ricerche in tale indirizzo saranno continuate [1].

[1] Queste ricerche ebbero inizio durante la mia permanenza all'Istituto di Chimica farmaceutica di Cagliari. Ringrazio il dott. Colombano per l'aiuto prestatomi.

Meteorologia. — *Sulla distribuzione mensile della frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali.* Nota di V. MONTI, presentata dal Corrisp. A. BATTELLI.

In una Nota di poco precedente a questa, consideravo la distribuzione altimetrica dell'annua nevosità relativa e dell'annua frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali.

Qui, in una tabella più avanti riportata, si trovano i valori mensili, moltiplicati per 100, della frequenza relativa F della neve, per la stessa parte delle Alpi, dedotti dalle medesime fonti.

Per ogni zona e per ogni mese, dove non è stato impossibile o illogico il farlo, ho cercato di rappresentare 100F con un'equazione del tipo

$$100F = a + bH ,$$

essendo a e b costanti relative alla zona ed al mese, ed H l'altitudine in m.

Premetto alla tabella uno specchietto delle zone e dei corrispondenti valori di a e b, determinati col metodo dei minimi quadrati.

A) *Zona pianeggiante elvetica a N delle Alpi* (Località 16).

	a	b		a	b
Gennaio . . .	+ 32	0.060	Ottobre	— 13	0.044
Febbraio . . .	+ 23	65	Novembre . . .	— 12	66
Marzo	+ 17	64	Dicembre . . .	+ 20	58
Aprile	— 18	73			

B) *Grigioni ed alta valle del Reno* (Località 5).

	a	b		a	b
Gennaio . . .	+ 50	0.034	Maggio	— 10	0.028
Febbraio . . .	+ 52	32	Ottobre	— 8	37
Marzo	+ 35	40	Novembre . . .	— 2	55
Aprile	— 6	54	Dicembre . . .	+ 40	38

C) *Valli della Linth, Reuss e Aar* (Località 11).

	a	b		a	b
Gennaio . . .	+ 51	0.032	Maggio	— 11	0.030
Febbraio . . .	+ 42	41	Ottobre	— 11	42
Marzo	+ 24	51	Novembre . . .	— 8	61
Aprile	— 7	58	Dicembre . . .	+ 28	49

D) *Engadina* (Località 2).

E) *Vallese* (Località 1).

F) *Canton Ticino* (Località 4).

	a	*b*		*a*	*b*
Gennaio . . .	+ 34	0,054	Aprile	— 11	0,046
Febbraio . . .	+ 41	47	Novembre . . .	— 7	59
Marzo	+ 2	69	Dicembre . . .	+ 37	46

G) *Vorarlberg* (Località 5).

	a	*b*		*a*	*b*
Gennaio . . .	+ 50	0.041	Ottobre	— 7	0.042
Febbraio . . .	+ 43	43	Novembre . . .	+ 11	47
Marzo	+ 23	58	Dicembre . . .	+ 39	40
Aprile	— 14	72			

H) *Tirolo* (Località 6).

	a	*b*		*a*	*b*
Gennaio . . .	+ 69	0.019	Ottobre	— 6	0.034
Febbraio . . .	+ 68	21	Novembre . . .	+ 10	47
Marzo	+ 44	32	Dicembre . . .	+ 66	20
Aprile	— 17	65			

I) *Trentino* (Località 10).

	a	*b*		*a*	*b*
Gennaio . . .	+ 43	0.036	Novembre . . .	— 3	0.047
Febbraio . . .	+ 25	56	Dicembre . . .	+ 36	42

In base a questi numeri, furono ottenuti i valori calcolati per le singole stazioni, e le differenze tra valori osservati e calcolati, il tutto come risulta dalla tabella che segue.

ZONA

A

L'errore medio fornito dalle calcolate equazioni, è dato, come si sa, da

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{m - k}}$$

dove m è il numero delle osservazioni, e k quello delle incognite, (2 nel nostro caso).

Lo specchietto seguente contiene gli errori medî per ogni zona e mese:

Zona	G	F	M	A	M	O	N	D
A	4	9	6	5		3	6	5
B	4	6	4	5	1	3	4	6
C	7	10	6	6	3	6	8	6
F	5	3	2	7			4	8
G	7	7	3	4		3	3	3
H	8	5	5	5		3	4	7
I	9	10					7	13

L'importanza di questi errori dipende dai valori di 100F. Ecco qui uno specchietto di tali valori, calcolati in base alle note equazioni per la quota di m. 1000:

Zona	G	F	M	A	M	O	N	D
B	84	84	75	48	18	29	53	78
C	83	83	75	51	19	31	53	77
F	88	88	71	35			52	83
G	91	86	81	58		35	58	79
H	88	89	76	48		28	57	86
I	79	81					44	78

Si calcolano i seguenti errori medî relativi percentuali:

Zona	G	F	M	A	M	O	N	D
B	5	7	5	10	6	10	8	8
C	8	12	8	12	16	19	15	8
F	6	3	3	20			8	10
G	8	8	4	8		10	5	4
H	9	6	7	10		11	7	8
I	11	12					16	17

Si vede che i mesi nei quali l'errore relativo, che risulta dall'impiego delle nostre equazioni, è minore, sono quelli di novembre, dicembre, gennaio, febbraio e marzo.

Limitandoci a questi mesi, e riprendendo i valori di a e di b assegnati in principio di questa Nota, si vede che, per ogni zona, l'andamento loro di mese in mese è abbastanza regolare e naturale.

a ha i suoi più alti valori in gennaio o febbraio, più spesso nel primo mese: da questi due mesi i valori di a discendono verso dicembre o novembre per una parte, verso marzo per l'altra. Nel solo caso del Canton Ticino, a ha in dicembre un valore superiore a quello di gennaio.

b, gradiente verticale della frequenza relativa della neve, ha invece il suo minimo valore nel cuore dell'inverno, e va aumentando verso l'autunno e la primavera.

L'andamento di a e b al passare dei mesi mostra così di essere strettamente collegato colla distribuzione delle temperature, e ciò mostra tutto il vantaggio che si può avere dalla considerazione dei fenomeni della neve, *in quanto son paragonati a quelli della precipitazione generale.*

Riprendendo poi in esame lo specchietto dei valori di 100F calcolati per la quota di m. 1000, si può tentare un confronto tra zona e zona.

È notevole il contegno del Canton Ticino, pel quale gli errori relativi percentuali non sono più rilevanti che altrove. Ci si aspetterebbero per questa zona valori invernali di 100F più modesti che non per le altre, date le più miti temperature invernali. Invece, per dicembre gennaio e febbraio esso viene al secondo posto; in gennaio tiene questo posto insieme col Tirolo, e segue con esso al Vorarlberg; in febbraio e dicembre vien dopo al Tirolo. Si vede che l'azione termica dei laghi lombardi e ticinesi non giunge fino alla quota di 1000 m. Che se, invece, si considera il Trentino, i minori valori di 100F, più che spiegarsi colla vicinanza del Garda (la quale perturba certamente i valori di Riva), si spiegano cogli errori percentuali più rilevanti.

Patologia vegetale. — *Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

In una recente Nota [1] si tenta di ribattere gli argomenti, da me svolti nella mia precedente replica [2], con degli artificî polemici di un'efficacia assai discutibile e che non portano nella discussione alcun elemento che abbia un valore dimostrativo degno di considerazione.

È veramente deplorevole che in mancanza di argomenti migliori si ricorra all'uso di citazioni frammentarie di mie precedenti pubblicazioni,

[1] Mameli E., Risposta alla Nota del dott. Petri: *Sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite* (Rend. Acc. Lincei, XXII, 1913, pag. 604).

[2] Petri L., *Sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite* (Ibid., pag. 174).

abilmente fra loro collegate, per presentarle al lettore come mie pretese contraddizioni. Prima di confutare quelle affermazioni che possono anche avere la parvenza di obiezioni più serie, desidero occuparmi di simili inabili espedienti.

Il periodo della mia Memoria (¹), citato nella Nota della dott. Mameli (²) si riferisce al fatto generale che nelle viti veramente sane, non danneggiate da freddi tardivi, senza accorciamento d'internodi nè deformazione delle foglie, non si trovano cordoni endocellulari (³).

Nello stesso lavoro però sono citati quei casi che si possono solo apparentemente presentare come eccezioni, e che la dott.ssa Mameli a torto crede di aver scoperto per la prima volta, ritenendoli altrettanti argomenti fon-

(¹) Petri L., *Ricerche sulle cause dei deperimenti delle viti in Sicilia. I. Contributo allo studio dell'azione degli abbassamenti di temperatura sulle viti in rapporto all'arricciamento* (Memorie della R. Stazione di Pat. veg. Roma, G. Bertero, 1912), pag. 40.

(²) Loc. cit., pag. 604.

(³) Dal dott. Mario Topi, direttore del Consorzio antifillosserico di Alice Bel Colle (Alessandria) mi è stato comunicato il resultato di alcune sue ricerche, che credo utile di riportare qui interamente: « Le mie osservazioni riguardano esclusivamente viti nostrali di *Barbera*, *Dolcetto* e *Moscato*, sane o deperite per diverse cause o cosiddette *risse* o *rapaline*. Le mie ricerche essendo state fatte per la maggior parte in inverno, mi sono quasi sempre limitato alla ricerca dei cordoni nei vasi legnosi per mezzo di sezioni trasversali. Gli scopi che mi proponevo erano: 1) vedere se nelle viti deperite per altre ragioni (fillossera principalmente) si trovassero cordoni; 2) vedere se i cordoni si trovassero anche in viti rigogliose, che non presentassero nessun carattere di *court-noué*; 3) vedere infine se questi si trovassero sempre in viti che questi caratteri presentassero.

Riguardo al 1° scopo, ho esaminato diverse viti della proprietà Bertalero (contrada Pagliaro), ed una quindicina nella proprietà Otria (contrada Bulsenga) e parecchie qua e là raccoglievo nei varî deperimenti fillosserici.

Ho trovato un solo cordone in una vite della proprietà Otria, che non sembrava affetta da *court-noué*, e numerosi cordoni in due viti della proprietà Bertalero, che però erano le più deperite della macchia e presentavano evidentemente i caratteri del *court-noué*. In tutti gli altri casi non ho trovato cordoni. Circa al 2° scopo, tutte le ricerche che ho fatto scegliendo in diverse vigne, in diverse località del comune le viti più belle e rigogliose, mi hanno sempre dato resultato negativo, cioè non ho mai trovato in modo assoluto i cordoni. Fra queste ricerche ho voluto anche esaminare la parte terminale di tralci a frutto, dove si riscontra un notevole accorciamento degl'internodi. Neanche in questi casi, in viti rigogliose, ho trovato cordoni. Ho invece quasi sempre trovato con facilità i cordoni nelle viti *risse* o *rapaline*. Una diecina di sezioni che mettevo insieme sotto il microscopio, ne presentavano quasi sempre uno, due, o più. Anche nei tralci che mi portavano da comuni vicini (p. es. Nizza) dicendomi che le viti erano deperite, ma non c'era fillossera, ho sempre trovato cordoni, trattandosi evidentemente di viti *risse*. Non sono riuscito invece a trovarne in una vite (propr. Pollaccino, contr. Bulsenga) con tutti i caratteri del *court-noué*. Li ho trovati rari in altre due viti, pure con tutti i caratteri della malattia, della proprietà Bonevolo (Marcorina). S'intende che anche in questi casi ho fatto un numero non grandissimo di sezioni ».

damentali per combattere l'interpretazione che ho creduto di dare alla presenza dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite.

La possibilità di cordoni in tralci vigorosi e con internodi di lunghezza normale è più volte ripetuta nella mia Memoria, e ciò riguardo al fatto che la formazione di queste anomalie citologiche compaiono nelle viti prima delle deformazioni esterne dell'*arricciamento* (1). E circa l'altra mia affermazione che una vite mostrante cordoni nei tralci non è sempre necessariamente ammalata o destinata ad ammalarsi di *court-noué* cronico, credo di essere stato abbastanza chiaro quando ho detto che tralci legnosi e germogli a cellule cordonate possono essere equiparati in molti casi a marze ammalate, innestate su soggetti sani; cioè è possibile la loro guarigione, e con ciò anche la cessazione della formazione dei cordoni nei periodi vegetativi successivi a quello in cui se ne verificò l'origine in seguito ad abbassamenti di temperatura (2).

Cade dunque completamente la tendenziosa accusa lanciatami, troppo leggermente, di avere con *abili* e *nuove* versioni cercato di parare le obiezioni che mi erano state mosse,

È anche evidente che la stessa fretta di concludere in senso contrario al mio tradisce la dottoressa Mameli quando vuol far credere che dalle mie affermazioni non si può dedurre altro che tutte le viti da lei esaminate e contenenti i cordoni endocellulari nei tralci dell'annata, non rachitici, dovranno necessariamente ammalarsi di arricciamento fra uno o due anni! Quale soddisfazione o quale utile essa creda di ricavare da questi deplorevoli artifici polemici, io non so, ma a me sembra che un tal sistema non sia molto vantaggioso per far trionfare quella verità della quale la dottoressa Mameli si atteggia a strenua sostenitrice.

Si vuol trovare inoltre un'evidente contraddizione fra la mia affermazione, che una vite presentante cordoni non è necessariamente destinata al rachitismo cronico, inguaribile, e l'altra, che i cordoni endocellulari possono esser riguardati come un sintomo interno di questo stesso rachitismo cronico, *accordando a questi caratteri lo stesso valore dei sintomi esterni*, cioè delle deformazioni degli organi aerei. Ho già più volte ripetuto che i cordoni en-

(1) Basterà che io citi queste parole contenute a pag. 113 della mia Memoria: « La formazione dei cordoni endocellulari precede il rachitismo e la deformazione delle foglie nei vitigni dove quest'ultimo fenomeno si presenta. Il vigore di vegetazione non impedisce la comparsa dei cordoni, anzi questi in una pianta già ammalata si trovano più frequenti nei tralci più robusti che in quelli a debole accrescimento ». A pag. 91 vi è pure un paragrafo intitolato: « Precedenza dell'alterazione del cambio sulle manifestazioni dell'arricciamento ». Come si fa dunque a sostenere che questa è una *nuova* versione dell'interpretazione dei miei resultati?

(2) Si veda a pp. 170-171 della mia Memoria. E per quanto riguarda la cessazione della formazione dei cordoni nelle marze ammalate innestate su soggetti sani vedasi a pag. 158 dove sono descritti i resultati di alcune apposite esperienze.

docellulari non possono essere riguardati come dei veri caratteri *specifici* dell'*arricciamento*, non conoscendo ancora quale rapporto genetico esista fu la loro formazione e la causa della malattia; ma essi possono essere però riguardati come caratteri che hanno un eguale valore diagnostico a quello accordato all'accorciamento degl'internodi e ad alcune modificazioni della lamina fogliare.

Nessuno potrà negare che l'accorciamento degl'internodi sia una delle caratteristiche di questa malattia, e non pertanto esso è eguale tanto in questo caso, come in quello in cui trattasi dell'effetto diretto e immediato dei freddi tardivi. Chiunque abbia letto i miei lavori non può diversamente interpretare il valore diagnostico che ho accordato ai cordoni endocellulari. Sino dal 1911 scrivevo infatti che può ritenersi specifico solo *il complesso dei caratteri con cui queste formazioni si presentano nelle viti affètte da arricciamento* [1].

Nelle viti colpite da rachitismo cronico infatti la localizzazione dei cordoni nel cilindro legnoso della pianta, sia della parte aerea che di quella ipogea, è ben diversa da quella che può verificarsi per un semplice abbassamento di temperatura che colpisca i tralci nel loro sviluppop rimaverile. Di tutto ciò la dott.^ssa^ Mameli crede di tenere il minimo conto, attribuendo un significato, del tutto opposto a quello dato da me, ai resultati delle sue ricerche, molto incomplete, sulla localizzazione dei cordoni. Sembra che essa non si sia ancora convinta che simili ricerche non si possono fare soltanto sui tralci, ma per una diagnosi sicura occorre esaminare tutta la pianta.

Essa insiste nell'attribuire alle mie parole: *parte bassa* della vite, un significato che non resulta dalle mie descrizioni. Ho già ripetuto nella Nota precedente, ed è deplorevole che debba tornare a ripeterlo, che per parte bassa della pianta si deve intendere la base del fusto e le grosse radici [2].

Circa la formazione di cordoni endocellulari negl'internodi superiori dei tralci, non ho da ripetere che ciò che ho scritto nella Nota precedente [3],

(1) Questi Rendiconti, vol. XX, 1911, pag. 156. E nella mia già citata Memoria, vedasi a pag. 195.

(2) Riguardo al metodo seguìto nell'Istituto di Pavia per la ricerca dei cordoni endocellulari sarebbe veramente desiderabile che ci si uniformasse a quelle norme che resultano dalle mie ricerche. Nella prima Nota della dottoressa Mameli, infatti si parlava di cordoni nel midollo, nella maggior parte dei casi osservati. Io mossi l'appunto, contenuto nella mia replica (pag. 178), ed ora, nella seconda Nota si legge: cordoni nel legno e nel midollo. Ciò non è ancora tutto il desiderabile, ma in una prossima controreplica vi sarà probabilmente un progresso. Quando si parla (pag. 605 della Nota Mameli) di cordoni nel *legno di due anni* occorre precisare se essi sono nell'anello legnoso ultimo formato o in quello dell'anno precedente, giacchè in viticoltura *legno di due anni* significa la porzione di tralcio che ha due anni di vegetazione. Nella mia Memoria si trovano largamente descritti i diversi casi di localizzazione dei cordoni nel cilindro legnoso, e il significato che si può accordar loro in una diagnosi dell'*arricciamento*.

(3) Cfr. pp. 178-179.

confermando l'esattezza della mia affermazione che il cambio dei giovanissimi internodi, vicini all'apice, non reagisce con la formazione di cordoni. La ragione di ciò è esposta anche nell'ultima mia Nota (pag. 175): i materiali necessarî al costituirsi di simili formazioni sono delle emicellulose, la elaborazione delle quali nel citoplasma delle cellule cambiali avviene in modo sensibile negl'internodi che più sono vicini al limite del loro accrescimento in lunghezza, nei quali è attivissimo l'ispessimento secondario delle pareti degli elementi legnosi e liberiani. Si spiega quindi come sia molto difficile che nel cambio dei giovanissimi internodi apicali possa verificarsi la formazione di cordoni endocellulari. Il loro costituirsi quindi si deve attribuire ad abbassamenti di temperatura avvenuti quando già erasi iniziato da qualche tempo l'accrescimento in spessore.

Nell'esempio riferito dalla dott.ssa Mameli, veramente manca qualsiasi dato che dimostri come durante questo periodo la pianta non abbia subìto alcun abbassamento di temperatura, sufficiente ad arrestare momentaneamente il processo di accrescimento e di moltiplicazione delle cellule, permettendo la condensazione d'idrati di carbonio per l'azione di enzimi coagulanti (citocoagulasi) preformati.

Il limite a cui la temperatura deve discendere per produrre un simile effetto non è molto basso. Nelle mie esperienze ho ottenuto la formazione di cordoni endocellulari anche con temperature di 6° C. sopra lo 0. Tutto dipende dall'ampiezza dell'escursione termica nel minimo di tempo e dalla particolare sensibilità dei tessuti per condizioni ancora non determinate.

Queste stesse considerazioni valgono per il caso, citato dalla dottoressa Mameli, di una vite, che pure stando in serra, ha formato cordoni endocellulari A tutti i floricultori è noto quanto sia difficile impedire momentanei abbassamenti di temperatura nelle serre. Basta l'incuria di un operaio o il guasto dell'apparecchio di riscaldamento per determinare uno sbalzo di temperatura simile e anche maggiore di quelli che possono verificarsi all'aria aperta [1].

Ora, per poter concludere, come fa la dott.ssa Mameli, che la formazione dei cordoni endocellulari è assolutamente indipendente dagli abbassamenti di temperatura, solo perchè il fenomeno si riscontra anche in piante coltivate in serra, occorrerebbe dimostrare che la temperatura non ha mai subìto degli abbassamenti e che neppure le piante ne avevano subìti prima di esservi poste, e ciò per i cordoni che eventualmente si trovassero nel legno vecchio.

[1] Questa stessa considerazione ho fatto riguardo alla constatazione di Müller, che il *Ginkgo biloba*, coltivato in serra, è pure provvisto di cordoni endocellulari (Cfr. la mia Memoria, pag. 150). E si rifletta anche che certi effetti del freddo sono più facilmente verificabili nelle piante cresciute in ambiente ordinariamente caldo (loco citato, pag. 177).

Nell'ultima mia Nota, a proposito della presenza di cordoni endocellulari in tralci apparentemente sani, dicevo che si deve ammettere per lo meno uno stato patologico latente negli organi (1) nei quali simili anomalie citologiche sono originate. Anche queste mie parole non sono *nuove*, ma sono una semplice ripetizione di cose dette nei miei lavori precedenti (2). In appoggio alla mia opinione io non invoco affatto quella di Raatz, che ho citato più che altro per ragione storica; la mia deduzione deriva semplicemente non solo dalle numerose osservazioni fatte nei vigneti, ma soprattutto dal resultato delle mie esperienze (3), le quali hanno dimostrato come gli stessi effetti del freddo che si manifestano con la formazione dei cordoni, determinano una diminuzione o la scomparsa dell'attività rizogena del cambio dei tralci.

La figura qui unita mostra la stentata vegetazione dell' unica talea (4) che nelle suddette esperienze, malgrado la formazione di cordoni endocellulari, potè dare origine a delle radici.

Io riconosco che un simile resultato non dimostra ancora che l'*arricciamento* si possa riprodurre sperimentalmente con il metodo da me usato, ma è certo che i tralci di vite, che hanno subìto l'azione di freddi tardivi, non sono fisiologicamente equivalenti a quelli che a tale azione sono sfuggiti. Il difficile o mancato attecchimento delle talee a cellule cordonate è senza dubbio un fatto patologico non trascurabile. Che poi l'originarsi di un cordone endocellulare rappresenti un processo anormale, patologico, dell'attività della cellula, vegetale, è un fatto che difficilmente potrà esser posto in dubbio (5). L' aver trovato dei cordoni endocellulari in 20 specie di piante dicotiledoni, prive, almeno in apparenza, di caratteri di malattia, non rappresenta niente di nuovo che a me fosse sconosciuto. Nella mia Me-

(1) Non *nelle piante*, come è scritto nella Nota della dottoressa Mameli.

(2) Cfr. il mio articolo: *Les abaissements de température et le court-noué de la vigne* (Rev. de Phytopath. appliquée, I, 1913, pag. 35); e l'altro: *Effetti durevoli degli abbassamenti di temperatura sulla vite in rapporto all'arricciamento* (Il « Coltivatore », 1912, n. 35, pag. 568) dove è detto di uno stato *latente* dell'arricciamento.

(3) Sono descritte nell'ultima mia Nota.

(4) È la talea n. 1 rappresentata nella fotografia riprodotta nell'ultima mia Nota.

(5) Anche Raatz (*Pringsheim's Jahrb.*, XXIII, 1892), in ultima analisi ritiene che il processo di formazione dei cordoni sia un fatto patologico, parlando infatti del contatto fra pareti tangenziali delle cellule cambiali, che darebbe origine ai cordoni, dice: « In solchen Fällen ist der Berührung der tangenzialen Wände augenscheinlich ein zeitweiliges *pathologisches* Collabiren vorausgegangen.

« An einigen Präparaten hatte diese Auffassung um so grössere Wahrscheinlichkeit für sich, als sich die Zellen in nächster Nähe von vernarbten Verwundungen (Wundparenchym) befanden, wie ich dies bei *Picea excelsa, Pinus excelsa* und *Thuja gigantea* gefunden habe » (pag. 583). Riguardo all'ipotesi di Raatz sull'azione del clima in rapporto all'origine dei cordoni faccio osservare alla dottoressa Mameli che l'A. ha creduto di

moria è largamente citato e commentato il lavoro di Müller [1] come quello di Raatz e tutte le altre osservazioni, fatte da autori diversi, intorno ai cordoni endocellulari, in piante diverse. Che in questi casi un vero stato di malattia non si manifestasse in concomitanza della formazione dei cordoni, mi era ben noto, giacchè ho già scritto che: *È la prima volta che in una stessa pianta si può stabilire nettamente una stretta correlazione fra la formazione di cordoni endocellulari e un manifesto stato di malattia* [2].

Fig. 1. — Unico germoglio, manifestamente rachitico, formatosi in luglio (1913) da una talea derivata da un tralcio che nella primavera 1912 fu esposto ad abbassamenti di temperatura (Fotografato il 26 ottobre 1913).

Se dunque malgrado la conoscenza di tutti questi fatti, che oggi la dott.ssa Mameli vuole fare apparire come nuovi, io ho creduto di affermare

mantenerla, pur conoscendo i resultati delle osservazioni di Müller. Dopo quanto io ho trovato, l'Influenza del clima su di un tal processo è molto indiretta. Abbassamenti di temperatura durante la vegetazione possono verificarsi sotto tutti i climi, come pure nelle serre.

(1) Ber. d. deutschen Bot. Ges., VIII, 1890.

(2) Cfr. la mia Memoria, pag. 193. Questa correlazione è pure dimostrata dalle ricerche del dott. Topi più sopra riportate.

che i cordoni endocellulari rappresentano nelle viti un sintomo patologico, vuol dire che a ciò sono stato indotto dalla constatazione di numerosi e non dubbî fatti.

Che uno stesso stimolo esterno possa determinare nelle varie piante e anche negl' individui di una stessa specie effetti patologici di gravità diversa, è una nozione così ovvia su cui non è necessario spendere molte parole, e il dire che le Conifere non sono malate, pure avendo cordoni endocellulari, non costituisce un argomento probativo della tesi sostenuta dalla dottoressa Mameli [1].

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa* [2]. Terza Nota preventiva del dott. F. Plate, presentata dal Socio R. Pirotta.

In due precedenti Note [3] ho esposto i risultati ottenuti circa l'azione di nitrati del I° e II° gruppe del sistema periodico degli elementi sul periodo germinativo dell'*Avena sativa*. Nella presente Nota vengo ad esporre i risultati ottenuti per nitrati di altri gruppi: e precisamente, del III° gruppo il solo alluminio e, del IV° gruppo lo stagno, il cerio, il torio ed il piombo.

Nitrato di alluminio. — Nella seguente tabella sono esposti i risultati delle diminuzioni o aumenti reali di peso ottenuti per ciascuna concentrazione rispetto al peso originale all'inizio dell'esperienza:

	N/50	N/100	N/200	N/400	N/800	N/1600	N/3200	Controllo in H_2O dist.
Peso gr.	—0,0074	—0,0066	—0,0018	0,0184	0,0322	0.0418	0,0492	0,2452
Radice cm.	—	—	—	2.3	2.9	3 7	4.8	11.3
Germoglio "	—	—	—	2.1	2,6	3.5	4.6	16.1
Rapporto "	—	—	—	*0.2*	*0.3*	*0.2*	*0.2*	*4.8*

Dalla tabella si rileva, anzitutto, che la media delle variazioni di peso, ottenute in ciascuna delle cinque prove eseguite per ogni concentrazione, segue una curva abbastanza regolare, benchè in generale l'aumento di peso rimanga molto al di sotto dei controlli. Per quello che riguarda poi l'accrescimento sia della radice sia del germoglio, vediamo che esso comincia a manifestarsi nella soluzione N/400, aumentando in seguito lentamente. Ma

[1] Come ho già fatto notare altra volta, noi non sappiamo se nelle Conifere, o nelle altre piante, dove i cordoni endocellulari possono formarsi, vi sia un rapporto, come nella vite, fra la presenza di queste anomalie e l'assenza o la deficienza dell'attività rizogena del cambio dei rami.

[2] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[3] Ved. questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., 11° fasc., pag. 598; 12° fasc. pag. 728.

non basta: chè se si considera la cosa sotto il punto di vista dello sviluppo correlativo, vediamo che in tutte le concentrazioni, eccetto le prime tre dove non abbiamo accrescimento, l'aumento della radice si manifesta superiore a quello del germoglio; il che corrisponde all'accrescimento normale della pianta nel suo periodo germinativo Onde il rapporto fra accrescimento della radice e quello del germoglio si mantiene positivo.

Ma vi è un altro fatto degno di nota. Il catione Al, benchè appartenga agli elementi non indispensabili per la vita delle piante, e degli organismi in genere, ha dato però luogo in questi ultimi tempi a ricerche interessanti circa certe sue azioni caratteristiche sul protoplasma, specialmente per opera del Fluri [1] e dello Szuecz [2]. Riferendomi appunto alle esperienze dei predetti autori, ho voluto, alla fine di ogni serie delle mie esperienze, rimettere le piantine in acqua di fonte, ed ho potuto constatare come esse riprendano subito il loro normale sviluppo; ben inteso, che questo vale solo per le concentrazioni da $^{N}/_{400}$ a $^{N}/_{3200}$. Dunque queste soluzioni, abbastanza concentrate, agendo per un determinato tempo, danneggiano temporaneamente le piante, perchè esse, rimesse in soluzioni e condizioni normali, riprendono il loro sviluppo regolare. Resta da vedere se una azione ancora più prolungata possa o no provocarne la morte. Vi è inoltre da notare che le piantine conservano il loro turgore e non dànno nessuna notevole diminuzione di esso. A questo proposito è da tenere presente un altro fattore importante, che cioè le soluzioni di $Al(NO_3)_3$ presentano sempre reazione acida, perchè si idrolizzano quasi completamente secondo la reazione seguente:

$$Al(NO_3)_3 + 3\,HOH = Al(OH)_3 + 3\,HNO_3\,.$$

Quindi, in definitiva, abbiamo, nella soluzione, in minima parte $Al(NO_3)_3$ e in maggior quantità $Al(OH)_3$ e HNO_3; ragione per cui nella piantina debbono influire molto probabilmente, in grado maggiore o minore, tutti e tre questi composti. I su nominati autori hanno invece trascurato di prendere in considerazione l'azione concomitante di questi diversi composti, che a me sembra invece debbano avere una non indifferente importanza su queste ricerche. Ad ogni modo io ho potuto solo in parte con queste mie esperienze confermare il fatto osservato dallo Szuecs, che l'alluminione deve avere delle funzioni proprie specifiche in quanto non riesce ad uccidere il protoplasma, in quanto che le piantine tolte dalle soluzioni di $Al(NO_3)_3$ riprendono il loro accrescimento normale; escluse però le soluzioni $^{N}/_{50}$, $^{N}/_{100}$ e $^{N}/_{200}$ che si dimostrarono sempre mortali. Intorno all'azione concomitante dei tre composti, prodotti dall'idrolisi del $Al(NO_3)_3$, tornerò a parlare prossimamente, e più *in extenso*, con nuove e diverse altre esperienze.

[1] M. Fluri, *Der Einfluss der Aluminiumsalzen auf das Protoplasma*. Flora, vol. 99.

[2] J. Szuecz, *Ueber einige charakteristische Wirkungen des Aluminiumions auf das Protoplasma*. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. 52, H. 3, pag. 269.

Nitrato di stagno. — Espongo, nella tabella che segue, i risultati ottenuti con questo elettrolite, cioè i risultati delle diminuzioni o aumenti reali di peso ottenuti per ciascuna concentrazione rispetto al peso originale allo inizio dell'esperienza:

	$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
Peso gr.	— 0.0182	— 0.0142	— 0.0044	— 0.0028	0.0114	0 0522	0.0862	0.2284
Radice cm.	—	—	—	—	2.8	3.7	5.7	
Germoglio »	—	—	—	—	4.1	5.6	5.4	
Rapporto »	—	—	—	—	*— 1.3*	*— 1.9*	*3*	

In generale, la media dei risultati ottenuti per questo catione non si discosta molto da quelli ottenuti per l'alluminio. Però lo sviluppo per le prime quattro concentrazioni non ha luogo; e le piantine, alla fine dell'esperienza, sono secche. Invece, per lo sviluppo nelle concentrazioni $^N/_{800}$ e $^N/_{1600}$ la radice si è sviluppata meno del germoglio, mentre nella $^N/_{3200}$ la radice comincia a superare il germoglio: il che lascia prevedere che con una maggior diluizione la pianta tende a riprendere il suo normale sviluppo; e, quindi, anche lo sviluppo correlativo tende a migliorare. Per la soluzione $^N/_{3200}$ si avvera lo stesso fatto osservato per le soluzioni del nitrato di alluminio: che cioè la piantina, rimessa in acqua di fonte, riprende il suo normale sviluppo; non così per quelle tenute in soluzione $^N/_{800}$ e $^N/_{1600}$, che non riprendono il loro sviluppo normale, e lentamente muoiono.

Anche nel caso dello stagno è da tenere presente che il nitrato è più o meno idrolizzato, onde, come ho già detto, è d'uopo tenere conto dei tre fattori cioè del sale, della base e dell'acido, di cui però esporrò prossimamente un'altra serie di esperienze diverse.

Nitrato di cerio. — Siccome per nessuna delle soluzioni usate si è avuto un accrescimento della piantina, ed anzi si ebbe la morte di tutte, così il detto elettrolite, per le concentrazioni usate, si dimostra sempre di effetto mortale.

Nitrato di piombo. — Questo elettrolite, di cui ho adoperato il nitrato anche della forma bivalente, mostra nel suo comportamento una certa analogia con lo stagno e con l'alluminio, più con questo che non con quello.

Nella tabella seguente sono esposti i risultati ottenuti per le concentrazioni $^N/_{400}$, $^N/_{800}$, $^N/_{1600}$ e $^N/_{3200}$, chè quelle più concentrate non hanno dato alcun sviluppo:

	$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
Peso gr.	— 0,0254	— 0,0216	— 0,0084	0,0072	0,0218	0,0532	0,0746	0,2556
Radice cm.	—	—	—	0.5	1.2	3.1	4.7	16.12
Germoglio »	—	—	—	0.9	1.4	3.2	5.3	11.3
Rapporto »	—	—	—	*— 0.4*	*— 0.2*	*— 0.1*	*— 0.6*	*4.9*

Anche per il nitrato di piombo e per le soluzioni meno concentrate, le piantine aumentano gradualmente il loro sviluppo, ma molto lentamente; lo sviluppo correlativo presenta un rapporto negativo, benchè l'aumento, sia della radice, sia del germoglio, procedano quasi di pari passo. Tutte le soluzioni, eccetto la $^{N}/_{3200}$, riescono mortali. La piantina invece coltivata nella detta soluzione, presenta una radice turgida, e nella zòna di assorbimento presenta numerosi, ma piccolissimi peli non riconoscibili però ad occhio nudo. Anche il germoglio presenta condizioni migliori di vita. Si nota anzi tutto che esso si mantiene verde e turgido, e che non dà nessun segno di notevole diminuzione di turgore. Difatti, immersa questa piantina nell'acqua di fonte, riprende anche essa il suo sviluppo normale. In questo fatto il piombo rassomiglia alla soluzione $^{N}/_{3200}$ dello stagno ed a quelle $^{N}/_{800}$, $^{N}/_{1600}$ e $^{N}/_{3200}$ dello alluminio.

Nitrato di torio. — Questo elettrolite si dimostra assolutamente dannoso e mortale per tutte le concentrazioni usate.

Concludendo da quanto ho esposto in rapporto alle ricerche finora eseguite, vediamo che l'alluminio è quello, fra i cationi qui esaminati, che presenta i migliori risultati; seguono quindi lo stagno ed il piombo, i quali fanno prevedere risultati migliori con l'aumentare delle diluizioni; il cerio ed il torio si dimostrano poi di effetto mortale in tutte le soluzioni sperimentate.

Ad ogni modo, non sono ancora in grado di dare un quadro riassuntivo definitivo sull'azione di questi diversi elementi, perchè la natura dei loro sali in soluzione è fisicamente e chimicamente molto complessa, come ho già accennato nella presente Nota. Qui entrano principalmente in discussione il processo idrolitico nel suo complesso ed i rapporti quantitativi fra l'idrolisi dei sali, la dissociazione dell'acqua ed il grado di basicità delle basi metalliche; a questi fattori poi dobbiamo aggiungere anche la legge delle masse. Onde, come si vede, andiamo incontro ad un calcolo integrale abbastanza complesso, e di cui mi occuperò estesamente quando comunicherò i risultati definitivi delle mie ricerche biologiche.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* Nota I. *La raccolta dello sperma del cane.* Nota di G. Amantea, presentata dal Socio L. Luciani.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* Nota II. *Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane.* Nota di G. Amantea, presentata dal Socio L. Luciani.

Queste Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota I di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nell'eseguire una serie di prove a trazione su fili di rame provenienti dallo Stabilimento Gio. Ansaldo & C. di Cornigliano Ligure, ho avuto occasione di rilevare che, se invece di limitarsi, com'è d'uso [1], a misurare le variazioni di lunghezza del saggio per successivi incrementi del carico, si cerca come varii quella lunghezza anche durante il periodo di scarica, si possono senza difficoltà osservare alcuni di quei fenomeni, noti sotto il nome generico di isteresi elastica, che il Wiedemann [2] dapprima, più tardi il Cantone [3] ed il Bouasse [4] hanno studiati operando per torsione e per flessione.

In considerazione del particolare interesse che presenta il caso, di tutti più caratteristico, per quanto sperimentalmente più arduo, delle sollecitazioni a semplice sforzo normale, ho allora cercato di disporre le mie esperienze per modo da rendere possibile uno studio sistematico dell'argomento. L'esiguità dei mezzi sperimentali di cui attualmente dispongo non mi ha per verità permesso di dare alle mie ricerche quello sviluppo che per ciò sarebbe stato necessario: ho dovuto limitarmi al solo studio della *forma*, dell'andamento generale dei fenomeni, rinunciando, almeno per ora, a precisare mediante costanti numeriche il comportamento specifico dei singoli campioni di materiale sottoposti alle prove.

Mi sembra ciononostante non privo di interesse il mettere in evidenza le proprietà *qualitative* che tutte le mie esperienze concordemente hanno rivelate riferendo qui con qualche dettaglio la *storia* di alcune di tali esperienze, scelte fra quelle il cui andamento mi sembra più espressivo.

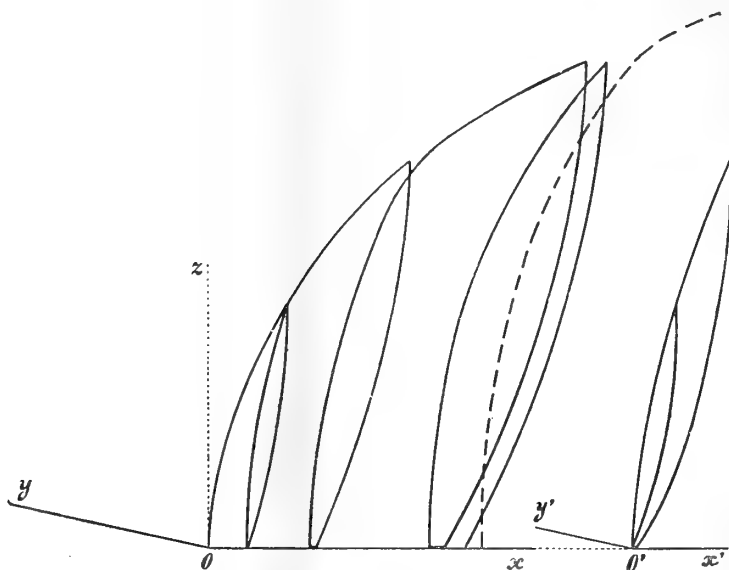
I fili, crudi, del diametro di 10 millimetri, venivano cimentati a sforzo di trazione mediante la macchina Mohr & Federhaff da 3 tonnellate appartenente al Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione della R. Scuola Navale Superiore in Genova. Le deformazioni venivano misurate, su di un tratto utile della lunghezza di 200 millimetri, mediante il noto appa-

[1] Cfr. C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Berlin, 1911.

[2] Wied. Ann., 6 (1879).

[3] Rend. R. Acc. dei Lincei, V, 2 (1893, II); Il nuovo Cimento, III, 35 (1894).

[4] Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, 12 (1898), e seg.; *Essais des matériaux*, Grenoble (Gratier & Rey), 1905.

recchio a specchi del Martens, il cui normale ingrandimento era stato alquanto accresciuto col distanziare più del consueto le scale dagli specchi [1]; ciò che non aveva però per iscopo tanto di raggiungere una maggiore approssimazione effettiva, che avrebbe anche potuto in pratica riuscire illusoria, quanto di permettere, nella misura delle rotazioni degli specchi, la sostituzione del metodo di Gauss con quello di Lord Kelvin.

Nella tabella che accompagna questo scritto trovansi raccolti i risultati ottenuti operando sopra uno spezzone di filo che non aveva ancora, dopo essere stato trafilato, subite deformazioni di sorta. Esso venne, durante cinque giorni consecutivi (15-19 febbraio 1913), assoggettato successivamente a sforzi di trazione di intensità di volta in volta crescenti: si raggiunsero così, nella prima prova, i 1000 kgr., nella seconda i 1600, nelle successive i 2000; soltanto in un'ultima prova, spinta fino a 2400 kgr., le deformazioni raggiunsero quei limiti oltre i quali l'apparecchio a specchi avrebbe cessato di essere utilmente applicabile. Tanto durante i periodi di aumento quanto durante i periodi di diminuzione del carico, questo veniva fatto variare per piccoli gradi, in modo quanto più possibile uniforme e lento (circa 25 kgr. al minuto primo).

Siccome i soliti diagrammi di deformazione, soprattutto se eseguiti in piccola scala, non si presterebbero a mettere in evidenza i fenomeni che ci

[1] A. Martens, *Traité des essais des matériaux* (trad. P. Breuil), Paris 1904. L'ingrandimento, che normalmente è eguale a 500, venne portato a 578. Le letture, eseguite apprezzando sulla scala graduata il decimo di millimetro, risultarono pertanto espresse in 1/5780 di mm.

interessano, così io adotterò, per illustrare graficamente le mie esperienze, una speciale rappresentazione in assi cartesiani *non* ortogonali, scegliendo l'obliquità degli assi x ed y, in relazione colle scale delle deformazioni e delle forze che su di essi rispettivamente si vogliono rappresentare, per modo che la tangente iniziale z alla curva di deformazione riesca normale all'asse delle x. Allora tale curva può venir tracciata agevolmente, e con tutta la desiderabile precisione, assumendo per coordinate del suo punto generico rispetto agli assi ortogonali z ed x rispettivamente le stesse forze applicate e le differenze fra le deformazioni osservate e quelle che si sarebbero dovute verificare nell'ipotesi che il materiale sottoposto ad esperienza si fosse comportato in conformità alla classica legge di Hooke, cioè con un valore del modulo di elasticità perfettamente costante ed eguale al suo valore iniziale (o più precisamente al valore che caratterizza la deformazione effettivamente osservata in corrispondenza del primo incremento del carico applicato).

Il diagramma così ottenuto, quale vien riprodotto nella nostra figura, si presta assai meglio della tabella numerica ad un'analisi qualititava dei risultati dell'esperienza di cui ci stiamo occupando: dalla quale, come del resto da tutte le esperienze eseguite in condizioni analoghe e di cui qui non si fa cenno, è risultato con rimarchevole evidenza che, per carichi crescenti, la curva di deformazione rivolge sempre la sua concavità verso l'asse delle deformazioni; mentre che, al decrescer del carico applicato, essa si presenta immancabilmente concava dalla parte dell'asse delle forze.

Ad ogni variazione ciclica del carico, il punto rappresentativo descrive un cappio, accusando, durante la scarica, deformazioni maggiori di quelle che, a parità di carico, si producono caricando il saggio. Che ciò avvenga anche per tensioni unitarie assai più piccole di quelle su cui io ho potuto sperimentare non è qui il caso di asserire: quello che si può affermare è che non si tratta di anomalie, ma di un processo perfettamente regolare, come attestano la chiusura dei cappii ottenuti operando con forze non troppo grandi ed il modo assai marcato con cui il fenomeno si manifesta sopratutto nei cicli di grande ampiezza. Questo processo ci autorizza a mettere in rilievo la non invertibilità del fenomeno della deformazione anche in quei casi in cui esso non lascia traccia di deformazioni permanenti.

Se dopo assoggettato il saggio a sforzi crescenti fino ad un determinato valore, ed operata la trasformazione inversa da quel valore a zero, si riprende a far crescere gradatamente l'intensità del carico, la nuova curva di deformazione presenta, in generale, un andamento ben distinto da quello che si è osservato la prima volta fino in vicinanza del valore dello sforzo prima raggiunto, per dirigersi poi, sotto l'azione di carichi maggiori, sensibilmente sul prolungamento della curva di prima deformazione. Ciò mostra per una parte la poca o nessuna influenza che il ciclo descritto nel frattempo ha

sull'entità delle deformazioni prodotte da carichi maggiori. Riesce per altra parte ben definito quel complesso di alterazioni nelle proprietà del materiale a cui nel linguaggio tecnico si dà il nome di incrudimento; esso consisterebbe, in ultima analisi, nella sostituzione della curva di prima deformazione con la curva relativa ai carichi crescenti nel ciclo che ha per limite superiore il massimo carico raggiunto. Fino a che tale carico non oltrepassa certi limiti, che (almeno se si opera in modo da assicurare l'accomodamento dei cicli) sono del resto tutt'altro che bassi, i varî cappii che fan capo a carichi minori si presentano infatti tutti racchiusi entro il ciclo di massima ampiezza, ed hanno tutti in comune con questo il ramo relativo alle forze crescenti, come si può facilmente rilevare dal piccolo diagramma riprodotto nella parte destra della nostra figura (nel sistema di riferimento che ha per assi x' ed y'), e che rappresenta il comportamento del medesimo spezzone di cui ci siamo fin qui occupati in una recente ripresa di esperienze della quale mi riservo di riferire i risultati in una prossima Nota.

Senonchè non risulta qui, come si ritiene generalmente, che il materiale, così incrudito, prenda a deformarsi con legge di semplice proporzionalità alle forze applicate: giacchè se è vero che, per carichi crescenti, la curva di deformazione si presenta sensibilmente indipendente dal limite di forza a cui ci si spinge, è pur vero che, nei passaggi dalle forze estreme a zero, si ottengono curve ben distinte fra loro e dalla precedente, e in ogni caso poi si ha a che fare con linee che non sono mai rette.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
15 febbraio	15 ½	0	675	—	499	—	—	0	—
»		100	801	+ 126	608	+ 109	+ 235	235	**+ 2.35**
»		200	910	+ 109	743	+ 135	+ 244	479	+ 2.44
»		400	1157	+ 247	986	+ 243	+ 490	969	+ 2.45
»		600	1415	+ 258	1228	+ 242	+ 500	1469	+ 2.50
»		800	1677	+ 262	1478	+ 250	+ 512	1981	+ 2.56
»		**1000**	1950	+ 273	1739	+ 261	+ 534	2515	+ 2.67
»		900	1830	— 120	1622	— 117	— 237	2278	**— 2.37**
»		800	1707	— 123	1505	— 117	— 240	2038	— 2.40
»		600	1454	— 253	1276	— 229	— 482	1556	— 2.41
»		400	1198	— 256	1044	— 232	— 488	1068	— 2.44
»		200	942	— 256	805	— 239	— 495	573	— 2.47
»		0	719	— 223	530	— 275	— 498	75	— 2.49
16 »	15	0	720	+ 1	529	— 1	0	75	—
»		100	817	+ 97	665	+ 136	+ 233	308	**+ 2.33**
»		200	933	+ 116	787	+ 122	+ 238	546	+ 2.38
»		400	1177	+ 244	1026	+ 239	+ 483	1029	+ 2.41
»		600	1428	+ 251	1265	+ 239	+ 490	1519	+ 2.45
»		800	1683	+ 255	1500	+ 235	+ 490	2009	+ 2.45
»		1000	1946	+ 263	1745	+ 245	+ 508	2517	+ 2.54
»		1200	2221	+ 275	2004	+ 259	+ 534	3051	+ 2.67
»		1400	2501	+ 280	2272	+ 268	+ 548	3599	+ 2.74
»		**1600**	2800	+ 299	2558	+ 286	+ 585	4184	+ 2.92
»		1500	2690	— 110	2431	— 127	— 237	3947	**— 2.37**
»		1400	2564	— 126	2318	— 113	— 239	3708	— 2.39
»		1200	2323	— 241	2073	— 245	— 486	3222	— 2.43
»		1000	2066	— 257	1840	— 233	— 490	2732	— 2.45
»		800	1819	— 247	1595	— 245	— 492	2240	— 2.46
»		600	1563	— 256	1356	— 239	— 495	1745	— 2.48
»		400	1302	— 261	1116	— 240	— 501	1244	— 2.50
»		200	1041	— 261	871	— 245	— 506	738	— 2.53
»		0	803	— 238	595	— 276	— 514	224	— 2.57
17 »	10	0	796	— 7	591	— 4	— 11	213	—
»		100	912	+ 116	705	+ 114	+ 230	443	**+ 2.30**
»		200	1022	+ 110	833	+ 128	+ 238	681	+ 2.38
»		400	1261	+ 239	1076	+ 243	+ 482	1163	+ 2.41
»		600	1516	+ 255	1310	+ 234	+ 489	1652	+ 2.44
»		800	1765	+ 249	1554	+ 244	+ 493	2145	+ 2.47

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
17 febbraio		1000	2019	+ 254	1798	+ 244	+ 498	2643	+ 2.49
»		1200	2279	+ 260	2045	+ 247	+ 507	3150	+ 2.53
»		1400	2542	+ 263	2299	+ 254	+ 517	3667	+ 2.59
»		1600	2814	+ 272	2560	+ 261	+ 533	4200	+ 2.67
»		1800	3128	+ 314	2863	+ 303	+ 617	4817	+ 3.08
»		**2000**	3466	+ 338	3197	+ 334	+ 672	5489	+ 3.34
»		1900	3355	— 111	3072	— 125	— 236	5253	**— 2.36**
»		1800	3237	— 118	2949	— 123	— 241	5012	— 2.41
»		1600	2993	— 244	2708	— 241	— 485	4527	— 2.43
»		1400	2745	— 248	2467	— 241	— 489	4038	— 2.45
»		1200	2489	— 256	2230	— 237	— 493	3545	— 2.47
»		1000	2243	— 246	1980	— 250	— 496	3049	— 2.48
»		800	1985	— 258	1737	— 243	— 501	2548	— 2.50
»		600	1725	— 260	1490	— 247	— 507	2041	— 2.53
»		400	1460	— 265	1243	— 247	— 512	1529	— 2.56
»		200	1194	— 266	993	— 250	— 516	1013	— 2.58
»		0	950	— 244	710	— 283	— 527	486	— 2.64
»	15	0	934	— 16	700	— 10	— 26	460	—
»		100	1047	+ 113	815	+ 115	+ 228	688	**+ 2.28**
»		200	1157	+ 110	940	+ 125	+ 235	923	+ 2.35
»		400	1400	+ 243	1177	+ 237	+ 480	1403	+ 2.40
»		600	1651	+ 251	1414	+ 237	+ 488	1891	+ 2.44
»		800	1898	+ 247	1657	+ 243	+ 490	2381	+ 2.45
»		1000	2152	+ 254	1900	+ 243	+ 497	2878	+ 2.49
»		1200	2414	+ 262	2150	+ 250	+ 512	3390	+ 2.56
»		1400	2676	+ 262	2403	+ 253	+ 515	3905	+ 2.58
»		1600	2944	+ 268	2663	+ 260	+ 528	4433	+ 2.64
»		1800	3214	+ 270	2929	+ 266	+ 536	4969	+ 2.68
»		**2000**	3495	+ 281	3209	+ 280	+ 561	5530	+ 2.80
»		1900	3385	— 110	3081	— 128	— 238	5292	**— 2.38**
»		1800	3264	— 121	2959	— 122	— 243	5049	— 2.43
»		1600	3020	— 244	2715	— 244	— 488	4561	— 2.44
»		1400	2771	— 249	2475	— 240	— 489	4072	— 2.45
»		1200	2521	— 250	2233	— 242	— 492	3580	— 2.46
»		1000	2268	— 253	1991	— 242	— 495	3085	— 2.48
»		800	2012	— 256	1748	— 243	— 499	2586	— 2.50
»		600	1754	— 258	1501	— 247	— 505	2081	— 2.52
»		400	1492	— 262	1254	— 247	— 509	1572	— 2.55

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
17 febbraio		200	1223	— 269	1006	— 248	— 517	1055	— 2.58
"		0	966	— 257	740	— 266	— 523	532	— 2.62
18 "		0	948	— 18	724	— 16	— 34	498	—
"		**2000**	...	...	...	...	...	...	...
"		0	...	...	...	...	...	..	...
"		**2000**	...	...	...	...	...	...	...
"		0	...	...	...	...	...	...	...
"		**2000**	...	...	..	...	...	...	...
"		0	...	...	...	...	...	...	...
"		**2000**	..	...	...	...	...	...	...
"		0	..	...	...	...	...	..	...
19 "	10	0	..	...	...	...	...	...	...
"		**2000**	...	...	...	..	...	...	..
"		0	...	..	..	...	...	...	...
"	16	0	950	..	789	...	...	565	—
"		100	1074	+ 124	897	+ 108	+ 232	797	+ 2.32
"		200	1205	+ 131	1004	+ 107	+ 238	1035	+ 2.38
"		400	1445	+ 240	1240	+ 236	+ 476	1511	+ 2.38
"		600	1694	+ 249	1472	+ 232	+ 481	1992	+ 2.41
"		800	1948	+ 254	1709	+ 237	+ 491	2483	+ 2.45
"		1000	2203	+ 255	1950	+ 241	+ 496	2979	+ 2.48
"		1200	2462	+ 259	2190	+ 240	+ 499	3478	+ 2.50
"		1400	2722	+ 260	2437	+ 247	+ 507	3985	+ 2.54
"		1600	2980	+ 258	2703	+ 266	+ 524	4509	+ 2.62
"		1800	3248	+ 268	2965	+ 262	+ 530	5039	+ 2.65
"		2000	3516	+ 268	3235	+ 270	+ 538	5577	+ 2.69
"		2200	3831	+ 315	3551	+ 316	+ 631	6208	+ 3.15
"		**2400**	4366	+ 535	4090	+ 539	+ 1074	7282	+ 5.37

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota II del dott. ing. GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei.* Nota della prof. RINA MONTI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Da qualche anno, mentre studiavo la struttura ed i vicendevoli rapporti tra gli elementi nervosi negli invertebrati ([1]), ho dedicato i miei sforzi a ricercare se nel sistema nervoso degli artropodi, e di altri animali inferiori, esistano formazioni paragonabili all'apparato reticolare interno, scoperto dal Golgi nei vertebrati.

Mentre io lavoravo, sono venute alla luce le pubblicazioni della scuola di Nusbaum sull'argomento ([2]); tuttavia credo non inutile il far conoscere i miei risultati, perchè ho ragione di crederli assai più completi, e meglio paragonabili a quelli ottenuti dal Golgi e della sua scuola.

Per oggi, intendo limitarmi a parlare di qualche classe degli artropodi, e, particolarmente, dei crostacei.

Il Poluszynski ([3]), studiando i crostacei coi metodi di Golgi e di Kopsch, non ha mai trovato un apparato reticolare; egli ha osservato sempre, nelle cellule nervose, soltanto dei corti bastoncelli, talvolta ricurvi, oppure dei granuli sempre ben separati, distanziati e disseminati nel corpo di ogni cellula gangliare: egli ritiene che questa formazione a granuli od a corti bastoncelli sia omologa all'apparato reticolare interno di Golgi.

Specialmente in base a questi risultati del suo discepolo, il Nusbaum conclude che l'apparato di Golgi può presentarsi sotto le forme più diverse, come reti, filamenti, granuli bacteriformi, anelli ecc.; perciò la denominazione di apparato reticolare non avrebbe fondamento nei gruppi inferiori, e non potrebbe generalizzarsi.

I preparati da me ottenuti forniscono risultati diversi, e mi permettono fin da ora di giungere a conclusioni, che si discostano da quelle dell'istologo di Lemberg.

([1]) Rina Monti, *Sur les relations mutuelles entre les éléments dans le système nerveux central des Insectes* Archives d'anatomie microscopique, T. XV, fasc. II e III, an. 1913.

([2]) Nusbaum, *Ueber den sogenannten inneren Golgischen Netzappärat und sein Verhältniss zu den Mitochondrien, Chromidien, und andern Zellstrukturen im Tierreich.* Archiv. für Zellforschung, Band X, 3 Heft., 1913.

([3]) Poluszynski, *Untersuchungen ueber den Golgi-Kopsch'schen Apparat und einige andere Strukturen in den ganglienzellen der Crustaceen.* Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, février 1911.

Quando la reazione è già sorpassata, si riconoscono figure in vero corrispondenti a quelle date dal Poluszynski; ma, allorquando si segue la reazione con somma cura, si possono ottenere immagini di estrema finezza, che dimostrano delicate formazioni di struttura, assai meglio paragonabili coll'apparato reticolare interno di Golgi.

I risultati migliori vennero finora da me ottenuti nelle cellule gangliari di media grandezza, ed anche nelle cellule nervose piccole delle catene gangliari di *Astacus fluviatilis*, e di *Homarus vulgaris*, facendo la reazione sui gangli isolati da animali vivi.

Aggiungo che formazioni analoghe, ma non del tutto simili, ho potuto osservare anche in altri tessuti degli stessi animali, ma di questi dirò una altra volta.

Fig. 1. — Cellule gangliari piccole di *Astacus fluviatilis* con disposizione reticolare.

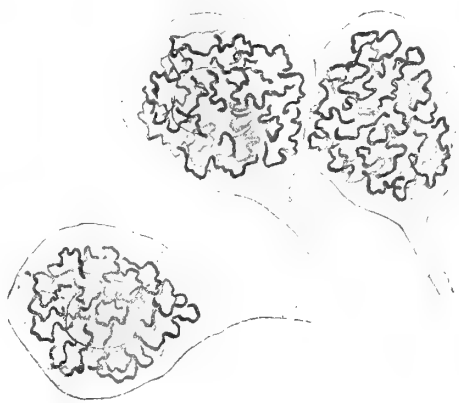



Fig. 2. — Cellule gangliari di media grandezza di *Astacus fluviatilis* con disposizione reticolare.

Nel corpo delle cellule gangliari, intorno al nucleo, che è ben riconoscibile quantunque non impregnato, quando la reazione è bene riuscita si vede un lasso gomitolo di sottili filamenti, caratterizzati dalla loro colorazione uniforme in nero intenso, dai loro contorni lisci e perfettamente regolari, dal calibro costante (fig. 1 e 2) (¹). Questi filamenti, disordinatamente ravvolti ed aggrovigliati, ma non mai fittamente addossati tra loro, occupano quasi tutto il corpo della cellula, lasciando libero soltanto un sottile orlo alla periferia; e non si estendono mai al prolungamento nervoso: anzi, là dove il prolungamento entra nella cellula, e forma la tipica piramide di espansione delle neurofibrille, la formazione gomitolare si ritira maggiormente verso l'interno, quasi fosse contenuta e respinta dal fascio delle neurofibrille che entrano

(¹) Le figure vennero eseguite con microscopio Koristka, camera chiara Abbe, imm. $\frac{1}{15}$ oc. 8 comp.

nella cellula, per poi decorrere prevalentemente nello strato più superficiale del corpo cellulare.

Come il Golgi ha già messo in evidenza ([1]) per il suo apparato reticolare interno, anche nel nostro caso la posizione, l'estensione, la forma di insieme, e la minuta struttura dell'apparato gomitolare da me descritto, non permettono di confondere l'apparato stesso colle neurofibrille, il cui aspetto ed i cui rapporti sono ben diversi, come risulta dal mio lavoro già citato.

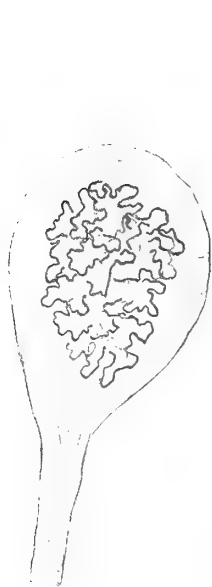



Fig. 3. — Cellula gangliare media di *Homarus vulgaris* con disposizione reticolare lassa.

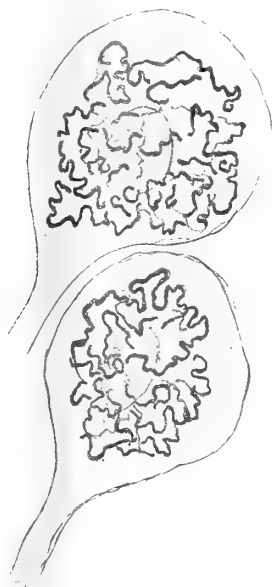



Fig. 4. — Cellule gangliari di media grandezza di *Astacus fluviatilis*, con disposizione reticolare lassa, e notevole frammentazione dei filamenti.

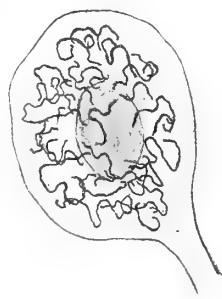



Fig. 5. — Cellula gangliare di *Homarus vulgaris*, con parziale frammentazione dei filamenti gomitolari.

Ho detto che il gomitolo filamentoso appare assai lasso (fig. 3); gli spazî che intercedono tra i singoli fili, che si ravvolgono e si aggrovigliano tra loro, sono più che sufficienti per fare posto alle neurofibrille, che si spiegano e talvolta fanno vortice nel corpo cellulare, ed anche a granuli, sostanza di riserva, a vacuoli, che non mancano nelle cellule gangliari degli artropodi. Se noi vogliamo meglio decifrare la minuta struttura dell'elegante formazione gomitolare in esame — vogliamo cioè risolvere il problema se si tratta di una vera formazione reticolare, come quella descritta dal Golgi nei vertebrati, o non piuttosto di un gomitolo o di un groviglio di fili sovrapposti senza alcuna anastomosi fra loro — giova procedere ad un paziente studio di sottili

([1]) Golgi, *Opera omnia*; vol. II, Milano (Hoepli) 1903.

sezioni coi massimi ingrandimenti. Si vedono allora i singoli filamenti variamente incurvati, talvolta lunghi, a decorso ondulato e serpeggiante, ripiegati talvolta in vario senso: se la sezione è molto sottile, i filamenti sono in parte tagliati (fig. 4 e 5). Si capisce, quindi, come le imagini osservate rappresentino soltanto dei monconi di filamenti a decorso più lungo e più vario, interrotti più o meno presto dalla sezione. I monconi più brevi sono incurvati ad ansa o a lettera S; altri hanno figure serpentine: qualcuno si divide formando una forchetta, qualche altro presenta l'aspetto di una lettera a T (fig. 6 e 7); qualcuno è come un anello chiuso, a luce abbastanza ampia: più spesso l'anello è incompleto.

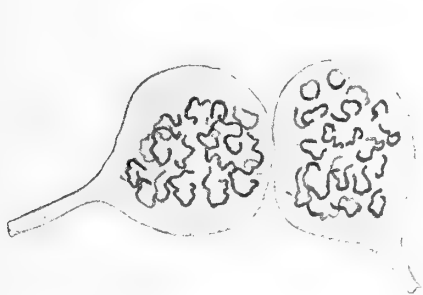



Fig. 6. — Cellule gangliari piccole di *Homarus vulgaris*: formazione gomitolare frammentata, con disposisione prevalentemente anulare.

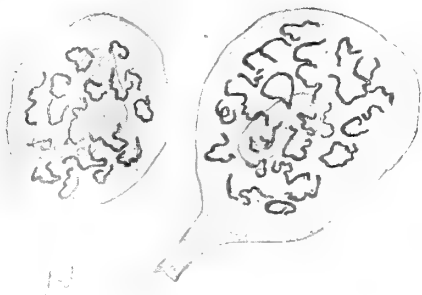



Fig. 7. — Cellule gangliari di media grandezza di *Homarus vulgaris*, con disposizione come nelle precedenti; i filamenti del reticolo sono anche più allontanati.

Le biforcazioni, specialmente sul percorso dei tronchi più lunghi, e le formazioni ad anello chiuso, mi inducono a concludere che l'apparato in questione, se è prevalentemente filamentoso e gomitolare, e non riproduce integralmente il denso reticolato a maglie chiuse descritto dal Golgi nei vertebrati, tuttavia presenta connessioni tra i filamenti, e, nel suo insieme, si accosta all'apparato scoperto da Golgi assai più che non le imagini descritte e le figure disegnate fin qui dagli autori, che hanno studiato l'argomento.

La configurazione generale dell'apparato, i suoi rapporti, i suoi limiti rispetto alla più corticale zona della cellula, la sua assenza nel prolungamento nervoso, ricordano in modo suggestivo la disposizione ed i rapporti dell'apparato endocellulare di Golgi.

Il grande maestro di Pavia si è sempre mantenuto nel massimo riserbo circa la natura ed il significato delle formazioni da lui scoperte.

Io, dopo aver rilevato tutte le note di somiglianza, ed aver segnalato i caratteri per i quali l'elegante formazione da me descritta nelle cellule nervose dei crostacei si scosta dall'apparato reticolare interno dei vertebrati,

debbo pure concludere che le immagini da me ottenute sono, assai meglio di quelle del Poluszynski, paragonabili con l'apparato di Golgi. Ciò non di meno, non credo ancora di potere, senz'altro, entrare a discutere la questione delle omologie. Su questo punto, credo opportuno di mantenere qualche riserbo, perchè le comparazioni tra i risultati ottenuti in animali, appartenenti a tipi assolutamente diversi e lontani fra loro, possono talvolta indurci a conclusioni premature, dannose alla più retta interpretazione di fatti ulteriori. E questo mio riserbo è bene giustificato dalle osservazioni fatte recentemente dal Pensa [1], il quale, dopo le indagini del Barinetti [2], è venuto a dare una interpretazione diversa del reticolo da lui primitivamente osservato nelle cellule cartilaginee. Perciò, a maggiore ragione, in una breve Nota preventiva non è il caso che io discuta gli eventuali rapporti delle formazioni endocellulari, messe in evidenza nelle cellule nervose, con altre formazioni analoghe, dimostrabili in altri tessuti, come pure coi mitocondrii o plastosomi [3].

Qualunque sia l'interpretazione, che i nuovi studî condurranno a dare, dell'apparato di Golgi nelle cellule, i fatti fin qui dimostrati sulla costituzione degli elementi nervosi mi autorizzano ad esprimere un pensiero, che forse non è privo di una portata generale.

Tutte le osservazioni fin qui fatte, valgono a dimostrare che negli elementi nervosi centrali dei vertebrati esiste una differenza sostanziale tra la costituzione dei prolungamenti nervosi e quella dei corpi cellulari. Il prolungamento nervoso consta esclusivamente di un fascio neurofibrillare; il corpo delle cellule nervose, oltre alle neurofibrille entranti, contiene altre formazioni, come i granuli di Nissl e l'apparato reticolare interno di Golgi, che, come il Marcora ha dimostrato [4], sono due formazioni distinte. Queste formazioni non si limitano al corpo cellulare, ma si estendono ai prolungamenti protoplasmatici; da ciò emerge evidente il concetto che i prolungamenti protoplasmatici delle cellule nervose dei vertebrati hanno la stessa costituzione del corpo cellulare, e rappresentano soltanto un'espansione di questo, mentre il prolungamento nervoso è assolutamente diverso, in quanto è costituito esclusivamente da neurofibrille e non contiene traccia di quelle formazioni particolari.

[1] Pensa Antonio, *La struttura della cellula cartilaginea*, Archiv. f. Zellforschung, XI Band, 4 Heft, 1913.

[2] Barinetti Carlo, *L'apparato reticolare interno e la centrosfera nelle cellule di alcuni tessuti*. Bollettino della Società medica di Pavia, 1912.

[3] Io mi riserbo di esprimere la mia opinione in una Memoria prossima: e spero che le svariate ricerche, da me intraprese, sugli animali inferiori, mi permetteranno di portare qualche luce nella controversia tanto dibattuta anche nella recente rivista sintetica di Duesberg, e non risolta neppure dai lavori che furono pubblicati in questi ultimi giorni.

[4] Marcora Ferruccio, *Sui rapporti tra apparato reticolare interno e corpi di Nissl negli elementi nervosi*. Bollettino Società medica, Pavia, 1908.

Negli invertebrati — almeno in quegli invertebrati dove le cellule nervose non sono unipolari, ma presentano diversi prolungamenti, tutti ugualmente costituiti da neurofibrille di passaggio, così che le cellule hanno il carattere di cellule a parecchi prolungamenti nervosi — io ho potuto osservare che i granuli, gli interclusi cellulari e l'apparato di Golgi sono limitati al corpo cellulare.

Da ciò debbo concludere che i prolungamenti protoplasmatici delle cellule nervose dei vertebrati sono della stessa natura del corpo cellulare, e non sono omologhi ai prolungamenti brevi delle cellule nervose degli invertebrati. Queste non hanno espansioni protoplasmatiche, ma solo prolungamenti formati da neurofibrille.

Io ravviso in questa nozione un nuovo criterio in appoggio di quella dottrina che il Golgi ha esposto nella sua classica opera sul sistema nervoso, cioè una nuova documentazione della omogeneità del corpo cellulare e dei prolungamenti protoplasmatici dei vertebrati, e della sostanziale differenza che intercede tra questi ed i prolungamenti nervosi.

Fisica. — *Sull'interferografo girante del sig. Sagnac.* Nota del prof. Luigi Puccianti, presentata dal Socio A. Ròiti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

1. Galeotti, Giuliani, Higgins, Signorelli e Viale. *Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna.* Pres. dal Socio Fano.

2. Negro. *Ricerche sperimentali di elettrofisiologia circa l'azione che sui nervi motori della rana esercitano le scariche elettriche a basso potenziale, ottenuto a circuito aperto dai singoli peli di coppie voltaiche.* Pres. dal Socio Grassi.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Grassi, a nome proprio e del Corrisp. Baccarini, rel., legge una Relazione colla quale si propone la inserzione negli Atti accademici della Memoria del dott. G. Bargagli Petrucci, avente per titolo *Sull'origine biologica della Terra di Siena (Terre gialle e bolari del Monte Amiata.*

La proposta della Commissione esaminatrice, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna comunica i ringraziamenti inviati dal professore Hill all'Accademia per la sua recente nomina a Socio straniero.

Lo stesso Presidente dà il triste annuncio della morte del Socio straniero Sir David Gill, avvenuta il 24 gennaio scorso; faceva parte il defunto dell'Accademia, per l'Astronomia, sino dal 16 agosto 1906.

Altra perdita che deve lamentare l'Accademia è quella del prof. Harry Rosenbusch, mancato ai vivi il 20 gennaio 1914, che dell'Accademia era Socio straniero, per la Mineralogia, sino dal 28 agosto 1901.

Commemorazione del Corrispondente prof. Igino Cocchi, letta dal Socio C. De Stefani, nella seduta del 4 gennaio 1914.

Il 18 giugno 1852 si laureava Igino Cocchi in Pisa, in scienze naturali, discepolo di Paolo Savi e di Giuseppe Meneghini; ed era il primo, in ordine di tempo, fra i discepoli di quest'ultimo grande maestro, che dovevano poi occupare nove delle principali cattedre di geologia in Italia. Ereditava egli dal maestro l'amore ed il preciso concetto della scienza ed il criterio tanto simile a quello che in altri campi chiamano criterio giuridico, che ai fortunati possessori è guida sicura e faro luminoso di ben diretta vita scientifica.

Fin da allora, da studente, il nostro, insieme con Cesare D'Ancona, con Giovanni Tranquilli, con Luigi Boldrini, aiutava il maestro a compilare il suo Trattato di geografia fisica, il primo che uscisse in Italia

Era nato Igino in Terrarossa di Lunigiana il 27 ottobre 1827, e nella visione di quegli svariati e pittoreschi luoghi appenninici apprendeva il primo conoscimento di vicende terrestri e l'avviamento a quella scienza che doveva poi coltivare.

Da poco laureato, nel 1854 e nel 1855 recavasi a Parigi, dove alla Sorbona ed al Jardin des Plantes faceva la conoscenza dei valenti scienziati che vi insegnavano le varie parti della geologia. Era allora Parigi ritrovo scientifico e mèta agli studiosi d'ogni dove. Prima di tornare in patria, si soffermava pure a Londra. Ritornato, nel 1857 progettava per la Toscana una Società geologica la quale, con l'aiuto del governo granducale, s'incaricasse di fare la carta geologica; ma i tempi a ciò non erano ancora maturi.

Nel 1859 gli veniva offerta come supplente la cattedra di geologia nell'Istituto superiore di Firenze, dove già insegnavano altri valenti; ed egli la accettò e nel seguente anno fu nominato professore ordinario. Era quella cattedra, senza i diffalchi cui venne soggetta di poi, la meglio fornita e

corredata d'Italia, ed era veramente l'Istituto ente superiore alle Università a' cui laureandi serviva di perfezionamento.

Mandato commissario per l'Italia all'Esposizione internazionale di Londra, del 1862, dove avea presentato l'estratto di alcuni studî fatti alla Spezia nelle vacanze del 1858, pubblicò una *Relazione sulla mineralogia e geologia* (Firenze 1862).

Dalla cattedra dettava, nel 1864, *Lezioni sulla geologia dell'Italia centrale*, nelle quali teneva conto di tutti i ritrovamenti fatti dappoi che nel 1851 il Meneghini ed il Savi avevan pubblicato il loro classico lavoro in aggiunta alla traduzione del libro di Sir Impey Murchison direttore del Geological Survey d'Inghilterra, *Sulle Alpi, gli Appennini e i Carpazî*, libro che ha avuto grande predominio nella geologia del secolo scorso e l'ha ancora in tanti argomenti ed idee che necessità di fatti dovrebbero più o meno modificare. Teneva conto il Cocchi di studî suoi, preannunziati in una Nota presentata alla Società geologica di Francia nel 1856, particolarmente sul Terziario antico, le cui suddivisioni debbono tuttora essere mantenute, e degli studî del Capellini sull'Infralias della Spezia: questi avevano portato anche il Meneghini a ritornare all'idea del Pareto e del Pilla, prima combattuta, del rovesciamento dei terreni del promontorio occidentale della Spezia. L'avere riconosciuto questo rovesciamento (o, direbbesi oggi, parziale carreggiamento) stabilito dal Pareto e dal Pilla quando fuori, di tali fenomeni, diventati poi generali, nemmeno si discuteva, dette al Cocchi ed ai suoi contemporanei la chiave della geologia di Toscana e del finitimo Appennino. Invano oggi si sforzano alcuni di tornare alle antiquate idee, solo perchè queste trovansi nel libro del Meneghini, sebbene il maestro, sempre ispiratore imparziale ed impersonale del vero a sè ed ai suoi discepoli, fosse stato il primo ad abiurarle. Le *Lezioni* furono pubblicate nel 1864 (Firenze, 1 vol. in 8°) da un discepolo del Cocchi, dal Puini, che poi, passò ad altri studî. Fra le più importanti parti delle *Lezioni* è quella che tratta dei marmi delle Alpi Apuane, sebbene ancora non fosse riconosciuta la perfetta equivalenza di quelli della regione N-E: e dico che fu tra le più importanti, perchè dette in breve buoni frutti pratici ed aprì la via alle grandiose escavazioni in luoghi nuovi che furono intraprese poco di poi. Tanto è vero che la pratica e la perfezione della vita comune hanno loro derivazione solo dallo spirito e dalla scienza vera: anche, per la sua modesta parte, da questa multiforme e complicata geologia che solo a pochi apre i suoi misteri, sebbene ognuno creda poterla trattare a suo modo, sì che per essa *un Marcel diventa ogni villan che parteggiando viene.*

Non tralasciava il Cocchi di continuare gli studî sul terreno, mentre nei momenti di riposo fisico si dedicava così allo studio dei fossili, anche dell'uomo, e dei resti delle antiche industrie umane, come al completamento ed al riordinamento del ricco e famoso gabinetto che egli dirigeva e che

uon cessava di aumentare con viaggi ed escursioni continue negli Appennini e specialmente in quelli, difficili a studiarsi, ma meno poveri di petrificazioni, della Garfagnana e della sua Lunigiana. La pusillanimità di badar solo a qualche piccola parte della scienza e di credere vero ed importante solo ciò che prediligiamo, non gli piaceva: perciò si occupava di molte cose, giacchè il saper vero dona e riceve da ogni parte. Pubblicò nel 1864 (Firenze, 1 vol. in 4°, con 6 tav.) la *Monografia dei « Pharingodopilidae », nuova famiglia di Pesci labroidi*, descrivendo varie specie nuove, non tutte ammesse di poi ed in seguito riferite alla già nota famiglia dei *Nummopalatidae*. Nel successivo anno 1865, nelle Memorie della Società italiana di scienze naturali compariva il suo lavoro *Di alcuni resti umani*, ove descriveva arnesi dell'età della pietra e del bronzo raccolti in varî punti di Toscana, specialmente nella Buca delle Fate presso Livorno.

Un altro lavoro succoso, senza quella prolissità che è propria di molti naturalisti, specie di quelli che non hanno idee, usciva nel 1866, *Sulla geologia della val di Magra* (Mem. d. Soc. italiana di sc. nat, vol. II, Milano, in 4°). Sull'*uomo fossile nell'Italia centrale* (Mem. della Soc. italiana di sc. nat., Milano, in 4°) tornava con assai maggiori particolari nel 1867. Trattava egli del cranio umano (ormai, per opera sua, famoso) dell'Olmo in val di Chiana, uno dei più antichi di situazione stratigraficamente determinata trovati in Italia, sebbene non antichissimo, non rimontando esso, pare, alle età litiche, ma sulla cui età precisa vertono ancora discussioni non chiuse.

A proposito del medesimo, con quella dirittura di criterio e con le cognizioni stratigrafiche e paleontologiche proprie di ogni suo lavoro, con modo piacevole e chiaro esponeva per la prima volta la storia comprensiva della Val d'Arno superiore, regione tanto visitata da italiani e da stranieri per l'abbondanza de' suoi fossili; e ne tracciava le linee fondamentali, completate poi, per quanto riguardava le comunicazioni del grande lago col mare, dal Ristori e dal Pantanelli, come lui, pur troppo scomparsi e da altri. Vi discorreva pure, in modo magistrale, dei terreni pliocenici e postpliocenici della Chiana, di Val di Magra, di Livorno.

Nel 1868 usciva un suo utile volumetto sull'*Origine dei combustibili fossili* (Milano), e nel 1870 tornava sulla sua *Val di Magra* con due Memorie (Bollettino del R. Comitato geologico, Firenze), nelle quali illustrava il terreno titonico di Giaredo ed il granito terziario. Nel 1861 il Cocchi, con altri, era stato chiamato a far parte di una Commissione che studiasse l'eseguimento della carta geologica d'Italia; ma senza conclusioni per allora, sebbene egli tornasse sull'argomento nel 1862, dopo il suo viaggio a Londra. Nel 1866, portata la capitale d'Italia, nella sua prima tappa verso il destino auspicato da secoli, da Torino a Firenze, essendosi ripetute le proposte e le deliberazioni di fondare un Istituto o Comitato geologico che, a

simiglianza di altri paesi, avesse a cura il rilevamento di una Carta geologica del Regno, e dovendo essere quell'Istituto, naturalmente, nella Capitale, nel 1866 si nominarono il Cocchi, il Meneghini e lo Scarabelli nella Commissione per sorvegliare i lavori; e nel 1867 fu data al primo, come ad uomo volenteroso e laborioso, la presidenza della Commissione geologica, poi quella del Comitato geologico definitivamente costituito.

Si occupò subito egli della bisogna, come gli scarsi mezzi permettevano; e cominciò a compilare una Carta geologica d'Italia al 1/600000, che fu mandata all'Esposizione di Parigi dell'anno stesso 1867: molte osservazioni sulla Toscana, l'Umbria, l'Emilia, la Liguria erano del Cocchi. Di quel primo tentativo, rimasto manoscritto, esistono solo due copie, una presso il Ministero d'agricoltura, l'altra presso il Cocchi.

Rivolse questi l'opera sua all'isola d'Elba ricchissima di minerali, costituita da svariati terreni, il cui studio, già avviato da tanti, era necessario anche per le miniere del ferro e per gli altri minerali che lo Stato vi ha, vigendo ivi leggi diverse da quelle di Toscana e diritto di principe sul sottosuolo.

Studiando insieme le regioni del littorale finitimo, pubblicò nel 1870 le brevi *Note geologiche sopra Cosa, Orbetello e monte Argentario* (Bull. del R. Comitato geologico italiano, nn. 11 e 12), nelle quali, ritenendo però troppo antichi tutti que' terreni, gettò le basi della non complicata geologia di que' luoghi, basi che credo rimangano salde anche di fronte a lavori più recenti i quali vorrebbero tornare ai tempi pre-Cocchiani, a quelli della scuola pisana di prima maniera.

Dopo alcuni cenni preliminarî pubblicati nel 1870, nel 1871 uscì con numerosi disegni, spaccati geologici e carte, la *Descrizione geologica dell'isola d'Elba* nelle Memorie del R. Comitato geologico, Firenze; uno dei principali lavori del Cocchi, che non ha perduto importanza dopo la descrizione della stessa isola comparsa pochi anni dopo ad opera del Lotti per incarico dello stesso Ufficio geologico. Il Cocchi non aveva potuto approfittare delle precise carte topografiche dello Stato Maggiore italiano (non ancora pubblicate), fondamento indispensabile di ogni rilevamento geologico che vogliasi preciso; nè, in quegli anni che studiava l'Elba, era ancora diffuso presso noi, come altrove, lo studio microscopico e chimico delle rocce le quali all'Elba sono tanto svariate e per le quali sovrabbondano, nè sono ancora completi, gli studî susseguenti al Cocchi. Lo schema e, direi quasi, lo scheletro della geologia Elbana rimane però essenzialmente quello stabilito dal Cocchi, pure nell'età dei graniti e dei porfidi, nell'origine filoniana del ferro, quand'anche sulle opinioni sue e del Lotti siano sôrte e possano perpetuamente rinnovellarsi delle controversie.

Furono quelli, per il nostro, gli anni della maggiore attività; avendo egli da sè, o con l'aiuto degli operatori del Comitato geologico, indirizzate

le ricerche ai terreni dei dintorni di Firenze ed alle Alpi Apuane, della cui parte meridionale inviò una prima Carta all'Esposizione internazionale di Vienna, e sui marmi delle quali aveva pubblicato un accenno nel 1871 (Boll. del R. Com. geologico).

Nell'anno seguente, in fatto di paleontologia, dette la preziosa descrizione *Di due scimmie fossili italiane* (Boll. del R. Com. geologico, Firenze, 1872) recentemente scoperte in Toscana; alla geologia serbò il primo cenno *Del terreno glaciale delle Alpi Apuane* (Boll. del R. Com. geologico), cenno che fu poi completato dallo Stoppani e da altri; ed a servizio della paletnologia e delle collezioni paletnologiche del suo Museo, passate poi a quello di antropologia dello stesso Istituto superiore, pubblicò il *Catalogo della raccolta degli oggetti de' così detti tempi preistorici* (1 volume in 8°, Firenze 1872). Erasi allora la raccolta toscana assai arricchita per una compra dal Foresi.

Nè l'attività del suo ingegno si limitava a questi campi assai svariati.

Pensò il Cocchi, amante dei monti e della propria terra, che pure in Firenze convenisse istituire una sede del Club Alpino al quale la moda volubile, ma allora sagace, attraeva la gioventù italiana e specialmente la signoria animosa e desiosa di conoscere e far conoscere le bellezze dei nostri paesi. Fu dunque egli nel 1868 il proponitore e, nell'anno seguente, il primo presidente della sede di Firenze, e fece rivolgere i passi e lo studio al rimboschimento dell'Appennino e primieramente verso le sue Alpi Apuane.

Nel 1873 era stato stabilito di portare la sede dei lavori per la Carta geologica da Firenze a Roma e poco di poi al Cocchi fu tolta la presidenza del Comitato geologico con eccessiva disinvoltura, come è costume, dicono, dei governi costituzionali non sensibili alla gratitudine: ma credo tali sian tutti.

Fu egli bensì conservato nel Comitato, e vi rimase fino agli ultimi anni di sua vita, ma senza più oltre occuparsi di migliorare il sistema della Carta secondo che varî geologi desideravano, e senza gran fatto prender parte attiva ai lavori: ciò che del resto non si sarebbe potuto nè si può pretendere da una istituzione che si raduna una volta l'anno per mettere il benestare a lavori diretti da altri.

Forse il trovarsi così messo da parte dopo le grandi prove di attività che aveva dato e nel mentre legittimamente attendeva di cogliere i migliori frutti dell'opera sua, scoraggiò il Cocchi; e sì lo sconfortò che, da allora in poi si può dire che egli si ritraesse e quasi, sebbene non completamente, abbandonasse il campo della scienza.

Infatti, nel 1874 si ritirava anche dall'insegnamento durato 15 anni, per dirigere le nuove cave di marmo di Val d'Arni in quel di Seravezza e di Vagli, che egli aveva messe in evidenza e quasi discoperte; e quivi stette circa 3 anni.

Si ritirò poi anche da questo ufficio. Oramai, da varî anni egli aveva rallentato quella attività che gli avevano data la gioventù, la fede negli utili risultati della scienza, e quelle facilità che sono proprie di chi sta a capo di un Istituto scientifico.

Egli si dedicò alla amministrazione del suo importante patrimonio, esempio degno di imitazione, e, per chi si dimostri prudente ed avveduto come il nostro, utile alla patria quanto l'opera di chi si chiuda e si isterilisca in limitate ricerche scientifiche. I suoi concittadini di Licciana in provincia di Massa, e que' di Arezzo dove aveva sue terre, lo chiamarono consigliere e deputato provinciale per Massa e consigliere comunale, poi, nella Giunta prov. ammin. di Arezzo: in Firenze pure, dove per l'onestà del sentire come per la scienza, godeva grande estimazione, fu in que' tempi spesso chiamato per cose pubbliche. Lo ebbi collega in alcune di quelle pubbliche Amministrazioni; avversario in altre; ma tutti, colleghi od avversari, gli resero sempre giustizia.

Non aveva però completamente dismesso la partecipazione alla vita scientifica. Così tenne la *Solenne commemorazione di Quintino Sella nell'Accademia Petrarca di Arezzo* (Firenze, 1884); e l'11 giugno 1899, come uno de' più antichi e prediletti discepoli del Meneghini, lesse il *Discorso per l'inaugurazione del monumento al maestro nel camposanto di Pisa* (Pisa, 1900). *Di alcuni nuovi fossili scoperti al Vingone in Val di Chiana*, argomento del quale si era già occupato in qualcuno de' suoi maggiori lavori giovanili, ebbe a dire alla « Società toscana di scienze naturali », ed in quella circostanza ricordo che egli fece l'ultima visita al Gabinetto geologico di Firenze. Quale membro, consigliere e vice presidente della « Società medica italiana d'idrologia e climatologia », ed anche come consulente idrologo dello Stato per le acque di Montecatini, scrisse sulla *Sorgente di Sangemini* (Atti del V Congresso d'idrologia e climat., Firenze, 1890); *Sulla necessità di analisi rigorose delle acque minerali e termali* (Soc. med. ital. d'idr. e clim., Firenze, 1897); *Sulla origine dell'acido carbonico contenuto nelle acque sotterranee e di due acque termali sotterranee* (Perugia, 1900), e *Su di una trivellazione ai bagni di Montecatini* (Perugia, 1907), mostrando in questi, sebbene piccoli, lavori, che egli rimaneva a giorno anche delle più recenti nuove della scienza.

La serie dei viaggi avviata nel suo periodo aureo, non aveva interrotta: e nel 1897 fu in Finlandia ed in Russia, compagno piacevole e gradito a me e ad altri amici.

In quella circostanza, il sentimento di poesia, proprio di ogni verace naturalista (tant'è che lo scopritore del vero fu sempre ammiratore del bello, e ciò dicasi specialmente di noi italiani cui natura non fu avara di sue bellezze), lo indusse ad ammirare lo strano paesaggio finlandese così diverso dal nostro, il popolo civile e saggio che lo abita, parente, assai più che di

noi, dei più lontani asiatici, ed i suoi canti così originali e primitivi. Non conosceva egli a fondo quella lingua, armoniosa come la nostra ma pur tanto differente: ma dopo avere pubblicato un libro di *Ricordi e Studi su la Finlandia* (Firenze, Le Monnier 1902), prese le traduzioni inglesi dei canti finnici riuniti nel Kalevala, li intessè di elegante forma italiana. (Firenze, Scuola Tip. Calasanziana 1913).

In quel suo lavoro impiegò molti anni: quasi, si può dire, gli ultimi della sua vita. Veramente solo un toscano, vissuto a Firenze, conoscitore del paese dove i canti eran nati, usato alla esatta visione delle cose esteriori, poteva darsi a tale lavoro, sopperendo all'imperfetto conoscimento della lingua originale. Chi, adusato al linguaggio giornaliero, che è gazzettiero e dottrinale ad un tempo, ed istruito alla lingua burocratica la quale vien da tutti i paesi e non è di nessuno, insegnata nelle scuole: chi, dico, legga attentamente quella traduzione, non può a meno d'ammirare la proprietà e l'eleganza del linguaggio, la semplicità dello stile, qualità troppo aliene dagli scenziati odierni, i quali, se pure nella prima metà della vita avessero imparato le finezze e le bellezze di nostra lingua, l'altra metà debbono impiegare per disfarsene. E di quelle qualità, disusate, che eran proprie un tempo della scuola pisana con Paolo Savi a capo, dette esempio il Cocchi anche ne' suoi scritti prettamente scientifici, nei quali la chiara dizione rivela la chiarezza delle idee; e, qua e là, anche in noterelle che pubblicava nella Nuova Antologia (*I denti, zanne dell'elefante africano ed il commercio dell'avorio*, Roma, 1899).

Si spense il Cocchi, serenamente, come aveva vissuto, fra i suoi, in Livorno, il 18 agosto 1913. Fu uomo retto, di tendenze piuttosto conservatrici: e perciò, sebbene gli onori come scienziato non gli mancassero, (fu anche presidente della Società geologica e corrispondente della nostra Accademia dal 18 luglio 1891), pure, qualora, contravvenendo alla sua rigida coscienza, avesse seguìto il più o meno facile andazzo dei tempi, ne avrebbe certo avuti di maggiori. Ma per noi che lo commemoriamo, alla vita scientifica lungamente memoranda, alla incessante ed imperitura opera sua nella ricerca delle bellezze naturali paesane e nel discoprimento delle nostre ricchezze sotterranee, aggiungono ed aggiungeranno pregio le proporzioni, l'armonia, il retto vigore dell'animo, il carattere morale dell'uomo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Grassi presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando un volume di cui fa omaggio il Socio Nasini e che contiene le relazioni sui lavori eseguiti, sotto la sua direzione, nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pisa durante gli anni 1910-13. Lo stesso

Segretario fa menzione di una Memoria a stampa del Corrisp. Issel intitolata: *Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX*; di alcune pubblicazioni dei professori Agamennone e Longo; e della parte 2ª *Meteorologia*, della relazione sulla *Spedizione nazionale antartica del 1901-1904*, pubblicata dalla Società Reale di Londra.

Il Socio Dini presenta un volume, colle seguenti parole:

Ho l'onore di presentare il 1° volume delle « Opere matematiche di L. Cremona », che si pubblicano sotto gli auspicî della nostra Accademia. È superfluo il dire quanto fosse doverosa e quanto sia importante tale pubblicazione: basta ricordare che il Cremona non fu soltanto uno dei più insigni fra i geometri italiani e stranieri del suo tempo, ma fu altresì capo di una scuola, a cui diede coi suoi lavori e col suo insegnamento vita e impulso vigorosi, e da cui provennero i grandi e brillanti progressi fatti in Italia dalla geometria sintetica negli ultimi cinquant'anni.

Il presente volume contiene 31 lavori, fra i quali la classica « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » che ebbe tanta influenza nel rinnovamento degli studi geometrici nel nostro paese.

La pubblicazione dei lavori è fatta in ordine cronologico, rispettando scrupolosamente la sostanza e la forma della redazione cremoniana e inserendo, con opportuni criterî, le numerose aggiunte manoscritte apposte dal Cremona ai lavori stessi. I revisori (che furono, per questo 1° volume, Bertini, Bianchi, Fano, Loria, Montesano, Nicoletti, Pittarelli, Segre, Terracini, Torelli) aggiunsero soltanto varie note nei punti nei quali occorrevano osservazioni o schiarimenti, note che furono collocate a fine del volume.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Grassi comunica i seguenti elenchi dei lavori presentati per prendere parte ai concorsi ai premi Reali e Ministeriali, scaduti col 31 dicembre 1913.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Matematica*.

(Premio di L. 10,000. — Scadenza 31 dicembre 1914).

1. Lauricella Giuseppe. 1) « Sulle funzioni biarmoniche » (st.). — 2) « Sulle formole che dànno la deformazione di una sfera elastica isotropa » (st.). — 3) « Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato » (st.). — 4) « Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche » (st.). — 5) « Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi » (st.). — 6) « Sulla risoluzione del problema

di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti » (st.). — 7) « Sul problema derivato di Dirichlet sul problema della elettrostatica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità » (st.). — 8) « Sull'integrazione dell'equazione » (st.). — 9) « Sopra alcune equazioni integrali » (st.). — 10) « Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate » (st.). — 11) « Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 i V = 0$ per le aree piane » (st.). — 12) « Sull'equazione integrale di 1ª specie » (st.). — 13) « Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare » (st.). — 14) « Sull'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Derichlet sul piano » (st.). — 15) « Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna » (st.). — 16) « Sulla risoluzione dell'equazione della equazione integrale di 1ª specie ». (st.). — 17) « Sopra i nuclei reiterati » (st.). — 18) « Sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti » (st.). — 19) « Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie » (st.). — 20) « Sulla chiusura di sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali » (st.). — 21) « Commemorazione del Corrispondente Cesare Arzelà » (st.). — 22) « Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie » (st.). — 23) « Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine » (st.). — 24) « Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per dati spostamenti in superficie » (st.). — 25) « Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi » (st.). — 26) « Applicazione della teoria di Fredholm al problema di raffreddamento dei corpi » (st.). — 27) « Sulle equazioni integrali » (st.). — 28) « Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2ª specie » (st.). — 29) « Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie » (st.). — 30) « Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica » (st.). — 31) « Sui potenziali elastici ritardati » (st.). — 32) « Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore » (st.). — 33) « Calcolo di alcuni determinanti » (st.). — 34) « Valentino Cerruti » (st.). — 35) « Sull'equazione $\Delta_2 i V = 0$ e su alcune estensioni delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi » (st.). — 36) « L'opera dei matematici italiani nei recenti progressi della teoria delle funzioni di variabile reale e delle equazioni integrali » (st.). — 37) « Recensione: Ernest Richard Neumann » (st.). — 38) « Sopra gli sviluppi, in serie, di funzioni ortogonali » (st.). — 39) « Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie » (st.).

2. Severi Francesco. 1) « Sugli spazî plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazî » (st.). — 2) « Sulle intersezioni delle varietà algebriche, e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive » (st.). — 3) « Sul principio della conservazione del numero » (st.). — 4) « Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre » (st.). — 5) « Su alcune pro-

prietà dei moduli di forme algebriche » (st.). — 6) « Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica » (st.). — 7) « Sulle superficie che rappresentaao le coppie di punti di una curva algebrica » (st.). — 8) « Su alcune questioni di postulazione » (st.). — 9) « Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica » (st.). — 10) « Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e fra certe classi di superficie » (st.). — 11) « Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica » (st.). — 12) « Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica » (st.). — 13) « Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie » (st.). — 14) « Sulla differenza fra i numeri degl' integrali di Picard della prima e della seconda specie, appartenenti ad una superficie irregolare » (st.). — 15) « Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica » (st.). — 16) « Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari, che appartengono ad una superficie irregolare » (st.). — 17) « Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche » (st.). — 18) « Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica » (st.). — 19) « Sulle curve algebriche virtuali, appartenenti ad una superficie algebrica » (st.). — 20) « Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche, ed alla riduzione a forma normale degl' integrali di Picard » (st.). — 21) « Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà » (st). — 22) « Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli » (st). — 23) « Intorno alle superficie iperellittiche (con F. Enriques) » (st.). — 24) « Intorno alle superficie iperellittiche irregolari (con F. Enriques) » (st.). — 25) « Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche » (st.). — 26) « Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche » (st.). — 27) « Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile, a due parametri, di trasformazioni birazionali » (st.). — 28) « Osservazioni sul Restsatz per le curve iperspaziali » (st.). — 29) « Appunti di geometria algebrica » (st.). — 30) « Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve, appartenente ad una superficie algebrica (st.). — 31) « La base minima per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica » (ms.). — 32) « Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero » (st.). — 33) « Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica » (st.). — 34) « Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica » (st.). — 35) « Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica, o tra curve di una superficie » (st.). — 36) « Sulle superficie e varietà algebriche irregolari, di genere geometrico nullo » (st.). — 37) « Sugli integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie

algebrica » (ms.). — 38) « Le corrispondenze fra i punti d'una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica » (st.). — 39) « Relazioni fra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica (st.). — 40) « Risposta ad un'osservazione del sig. De Franchis » (st.). — 41) Sulle superficie irregolari con infinite curve razionali » (st.). — 42) « Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica (st.). — 43) « Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica » (st.).

3. Midolo Pasquale. « Archimede e il suo tempo » (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Fisiologia normale* e *patologica*.

(Premio L. 10,000. — Scadenza 31 dicembre 1913).

1. Barbieri Alberto. 1) « La polidialisi » (ms.). — 2) « Nuovi metodi per l'analisi rapida del giallo d'ovo » (ms.). — 3) « Sulla materia colorante del giallo d'ovo o ovocromina » (ms.). — 4) « Non esistenza del fosforo organico e dell'acido glicer-fosforico nelle strutture biologiche, animali e vegetali » (ms.). — 5) « Non esistenza della rodopsina o porpora retinica » (ms.). — 6) « Sulla croccina della retina degli uccelli » (ms.). — 7) « Tessuto nervoso » (ms.). — 8) « Il sistema del grande simpatico non è un tessuto nervoso » (ms.). — 9) « La retina non contiene i principî chimici del nervo ottico » (ms.). — 10) « Nella serie dei vertebrati e degli invertebrati, il nervo ottico non si termina mai nella retina » (ms.). — 11) « La struttura del sistema nervoso centrale e periferico » (st.). — 12) « Tecnica per l'estirpazione della papilla ottica nel gatto » (ms.). — 13) « La sutura e la *greffe* delle arterie » (ms.). — 14) « Le radici posteriori spinali sono motrici » (ms.). — 15) « Le radici spinali posteriori sono motrici anche nell'arto separato dal tronco » (ms.). — 16) « Il neuroplasma è mobile » (ms.).

2. Bocci Balduino. 1) « La meccanica del cuore » (st.). — 2) « La teoria dell'udizione più consentanea alla complessa morfologia dell'organo del Corti » (st.). — 3) « Il meccanismo dell'accomodazione oculare per la distanza: prove subiettive nell'uomo ed obiettive nell'animale » (st.). — 4) « La semplificazione degli enzimi col metodo combinato dell'autolisi e della dialisi. Sinergia enzimatica ed analàsi » (st.). — 5) « Peregrinazione di un fisiologo nell'arte, nella vita, nella morale » (st.). — 6) « Il dinamismo cerebrale del genio: Giacomo Leopardi » (st.). — 7) « Giacomo Leopardi; rivendicazione » (st.).

3. Bottazzi Filippo. 1) « Memorie varie di chimica fisica applicata alla fisiologia » (st.). — 2) « Memorie varie di fisiologia dei muscoli » (st.). — 3) « La funzione muscolare; con un vol. di tav. » (ms.).

4. Fichera Gaetano. 1) « Ricerche varie, voll. 2 » (st.). — 2) « Questioni oncologiche, voll. 4 » (st.).

5. Lomonaco Domenico. — 1) « Sulla fisiologia di alcune delle parti più interne e meno aggredibili del cervello » (st.). — 2) « Sulla fisiologia dei tubercoli quadrigemini e dei lobi ottici » (st.). — 3) « Sulla cecità consecutiva all'asportazione dei lobi occipitali e dei talami ottici » (ms.). — 4) « L'azione degli idrati di carbonio sulle secrezioni » (st.).

6. Negro Camillo. « Ricerche sperimentali di elettrofisiologia circa l'azione che sui nervi motori della rana esercitano le scariche elettriche a basso potenziale, ottenute a circuito aperto dai singoli poli di coppie voltaiche » (ms.).

7. Petrone Angelo. « Otto anni ancora di ricerche sull'esistenza di un nucleo nell'emasia adulta dei mammiferi » (st.).

8. Segale Mario. 1) « Tecnica di esame e limite dei valori normali di $\Delta \times \eta$ » (st.). — 2) « $\Delta \times \eta$ nella anuria sperimentale » (st.). — 3) « $\Delta \times \eta$ nella tiroidectomia e nella paratiroidectomia » (st.). — 4) « $\Delta \times \eta$ nella capsulectomia surrenale totale » (st.). — 5) « $\Delta \times \eta$ nella splenectomia » (st.). — 6) « La reazione attuale del siero di sangue degli sparatiroidati » (st.). — 7) « Se la funzione complementare del siero sia in rapporto colle variazioni di tensione superficiale di esso » (st.). — 8) « Sulla modificabilità delle abnormi costanti energetiche in biologia » (st.). — 9) « Sul meccanismo della intossicazione anafilattica da siero » (st.). — 10) « La capacità respiratoria del sangue, la reazione attuale e gli aminoacidi del siero nella anafilassi di siero » (st.). — 11) « La intossicazione da peptone Witte, e i suoi rapporti colle intossicazioni dette anafilattiche da tossipeptidi » (st.). — 12) « Controlli sperimentali alla ipotesi di Besredka sul meccanismo del processo anafilattico » (st.). — 13) « Nella anafilassi da siero la sostanza preparante e la sostanza capace di dare lo scoppio non sono identiche » (st.). — 14) « Sulla presunta importanza del complemento nella produzione dello *schoch* anafilattico » (st.). — 15) Sul ricambio nella anafilassi da siero » (st.). — 16) Studî biochimici sul sangue del coleroso » (st.). — 17) « Sul contenuto, in glicogeno, del fegato e del sangue dei colerosi » (st.). — 18) « Ricerche anatomo-patologiche, batteriologiche e biochimiche, su tre feti di colerosi » (st.). — 19) « Modificazione di tensione superficiale e di viscosità indotte nel latte dall'idrato di sodio, e loro importanza per i dosaggi del grasso » (st.). — 20) « Sull'arrossamento del latte in presenza di NaOH » (st). — 21) Sulla azione battericida dei complessi lipoidei » (st.). — 22) « Il siero sifilitico ozonizzato acquista proprietà fissatrici per il complemento » (st.). — 23) « Ricerche termo-calorimetriche sugli ultimi periodi di vita » (st.). — 24) « La termogenesi negli aumenti di temperatura ambiente » (st.). — 25) « La termocalorimetria del colpo di calore » (st.). — 26 « Studî termocalorimetrici nella anafilassi da siero »

(st.). — 27) « Reperti termocalorimetrici in alcune ipertermie sperimentali » (st.). — 28) « Sui calori specifici » (st.).

9. Zanotti Pirro. « Saggi sulla biologia degli stafilococchi » ; con tavole (ms.).

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premi
del Ministero della Pubblica Istruzione, per le *Scienze naturali*.
(Scadenza 31 dicembre 1913. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. Acqua Camillo. 1) « Sul valore dell'apice radicale quale centro per la geopercezione » (st.). — 2) « Sui fenomeni della così detta respirazione inorganica » (st.). — 3) « L'azione dell'uranio sulla cellula vegetale » (st.). — 4) « Sulla diffusione degli ioni nel corpo delle piante, in rapporto specialmente al luogo di formazione delle sostanze proteiche » (st.). — 5) « Sul significato dei depositi originatisi nell' interno di piante coltivate in soluzioni di sali di manganese » (st.). — 6) « La degenerazione nucleare provocata dall'uranio nella cellula vegetale » (st.). — 7) « Nuove ricerche sulla diffusione o localizzazione degli ioni nel corpo delle piante. Esperienze con il cerio » (st.). — 8) « Esistono fenomeni psicologici nei vegetali ? » (st.). — 9) « La liberazione di energia nei processi respiratorî delle piante » (ms.).

2. Arcangeli Alceste. 1) « Sopra due specie di *Armadillidium* della fauna italiana » (st.). — 2) « La muscolatura delle ossa faringee di *Carassius auratus* L., e la sua funzione » (st.). — 3) « Osservazione sopra le glandule mucipare ed i noduli linfatici dell'esofago del colombo » (st.). — 4) « Isopodi terrestri, nuovi o poco noti, di Italia » (st.). — 5) La collezione di Isopodi terrestri del R. Museo di Zoologia degli Invertebrati di Firenze. Con aggiunte ed annotazioni » (ms.). — 6) Escursioni zoologiche del dott. Enrico Festa nell' isola di Rodi. Isopodi » (st.). — 7) « Haempel O., *Leitfaden der Biologie der Fische*. Recensione » (st.). — 8) « Supino F., *Idrobiologia applicata*. Recensione » (st.). — 9) « Accomazzo P., *Piscicoltura di stagno*: *l'allevamento della carpa*. Recensione » (st.).

3. Barsali Egidio. 1) « Appunti sul male dell' inchiostro nel castagno » (st.). — 2) « Primo contributo alla epaticologia umbra » (st.). — 3) « Sulla macraflora del lago Trasimeno o di Perugia » (st.). — 4) « Sull'effetto dell' incatramatura delle vie a Livorno » (st.). — 5) « Sulla flora ruderale di Perugia » (ms.). — 6) « Prodromo della flora umbra » (ms.).

4. Bezzi Mario. 1) « Diptères » (st.). — 2) « Études systématiques sur les muscides hématophages du genre *lyperosia* » (st.). — 3) « Miodarii superiori raccolti dal sig. C. W. Howard nell'Africa australe orientale » (st.). — 4) « Eine seltene Fliege von Weltverbreitung (Dipt.) » (st.). — 5) « Sobre tres interessantes Dipteros de S. Paulo » (st.). — 6) « Report on a collection of *Bombyliidae* (Diptera) from Central Africa, with description

of new species » (st.). — 7) « Sur une nouvelle espèce de Diptère de la Tunisie méridionale, et liste générale des Asilides de la Tunisie » (st.). — 8) « Diptera peninsulae Ibericae » (st.). — 9) « Rhagionidae et empididae ex insula Formosa » (st.). — 10) « Diptères recueillis au Congo » (st.). — 11) « Ditteri raccolti da Leonardo Fea durante il suo viaggio nell'Africa occidentale » (st.). — 12) « Intorno ad alcune Ceratitis raccolte nell'Africa occidentale dal prof. F. Silvestri » (st.). — 13) « Clunio adriaticus *Schiner* » (st.). — 14) « Altre Ceratitis africane allevate dal prof. F. Silvestri » (st.). — 15) « Einege Bemerkungen über die Dipterengattungen Auchmeromyia und Bengalia » (st.). — 16) « Blefaroceridi italiani » (st.). — 17) « Einige alte u. neuve Namen bei den Dipteren » (st.). — 18) « Indian Trypaneids (Fruit-Flies) in the Collection of the Indian Museum » (st.).

5. Cacciamali G. B. 1) « I brontidi » (st.). — 2) « La falda di ricoprimento del monte Guglielmo, con premesso schizzo tectonico della Lombardia orientale » (st.). — 3) « La geologia bresciana alla luce dei nuovi concetti orogenici » (st.). — 4) « Il territorio dei comuni di Gussago e Cellatica, sotto l'aspetto geologico-viticolo » (st.). — 5) « Il territorio dei comuni di Portese e San Felice di Scovolo, sotto l'aspetto geologico-viticolo » (st.). — 6) « Struttura geologica del gruppo del Guglielmo » (st.). — 7) « Revisione della geologia Camuna » (st.). — 8) « L'altopiano di Borno » (st.).

6. Cannaviello Enrico Franco. 1) « Pesci e pesca di acqua dolce, con tavole » (ms.). — 2) « Le lagune di Varano, con tavole » (ms.).

7. Chelussi Italo. 1) « Cinque saggi di fondo del lago Maggiore » (st.). — 2) « Di alcuni saggi di fondo del mar Rosso » (st.). — 3) « Appunti di psammografia ligure » (st.). — 4) « Le sabbie di tre pozzi trivellati nelle provincie di Padova e Ferrara » (st.). — 5) Psammografia di alcuni pozzi trivellati della pianura Padana » (st.). — 6) « Contribuzioni alla psammografia dei litorali italiani » (st.). — 7) « Nuove contribuzioni alla psammografia dei litorali italiani » (st.). — 8) « Studio petrografico di alcune sabbie marine del litorale jonico e di quello tirrenico da Reggio Calabria a Napoli » (st.). — 9) « Alcune sabbie marine del litorale ligure » (st). — 10) « Nuove ricerche in roccie terziarie di sedimento » (st.). — 11) « Studio petrografico di alcune rocce estere » (st.). — 12) « Di alcuni saggi di fondo del Mediterraneo » (st.). — 13) « Nuove ricerche petrografiche sopra alcuni fondi di mare del Mediterraneo » (st.). — 14) « Sulla natura e sulla origine dei conglomerati terziarî delle colline di Torino » (st.). — 15) « Alcune sabbie marine della Sicilia » (ms.). — 16) « Di alcuni ciottoli cristallini del conglomerato di Campobasso » (ms.).

8. Comes Salvatore. 1) « Riproduzione e morfologia di *Dinenympha gracilis* Leidy flagellato, ospite dell'intestino dei Termitidi » (st.). — 2) « Fenomeni nucleari e fasi riproduttive in *Pyrsonympha flagellata* Grassi » (st.). — 3) « Effetti della decapitazione in *Calotermes flavicollis* e in altri

Artropodi » (st.). — 4) « Apparato reticolare o condrioma? Condriocinesi o dittocinesi? » (st.). — 5) « Notizie sulla morfologia e riproduzione di *Monocercomonas termitis* » (ms.). — 6) « Importanza delle fibre della glìa per spiegare il meccanismo di movimento nei Lombricidi » (ms.).

9. De Stefano Giuseppe. « Sui pesci pliocenici dell'Imolese » (st.). — 2) « Studio sui pesci fossili della pietra di Bismantova (Reggio Emilia) » (st.). — 3) « I mammiferi preistorici dell'Imolese » (st.). — 4) « Appunti sulla ittiofauna fossile dell'Emilia » (st.). — 5) « La ittiofauna del mare pliocenico italiano » (st.). — 6) « Sul chelone (euclastes) melii misuri sp. del calcare miocenico Leccese » (st.). — 7) « Studio sopra due forme fossili del gen. *Bos* Linneo, attribuite al quaternario dell' isola di Pianosa » (st.). — 8) « Alcuni avanzi di mammiferi fossili attribuiti al quaternario dell' isola di Pianosa » (st.). — 9) I cervi e le antilopi fossili, attribuiti al quaternario dell' isola di Pianosa » (st.). — 10) « Osservazioni paleontologiche e deduzioni cronologiche sulla fauna dei mammiferi fossili attribuiti al quaternario dell' isola di Pianosa » (st.).

10. Drago Umberto. « Sul movimento di progressione delle proglottidi di *Taenia saginata*, e suo valore biologico » (st.).

11. Fiori Andrea. 1) « Dalle mie recenti caccie di Malthodes » (st.). — 2) « Sulla estrema variabilità dei caratteri in alcuni curculionidi italiani » (st.). — 3) « Pselafidi di Sicilia » (st.). — 4) « Gli *Arcinopus* di Sicilia » (st.). — 5) « I *Chaenius festivus* Fab. di Sicilia » (st.). — 6) « Studio sopra alcune specie dei generi *Leistus* e *Nebria* » (st.). — 7) « Appunti sulla fauna coleottorologica dell'Italia meridionale e della Sicilia » (ms.).

12. Gibelli Gaetano. « L'uomo viene dal mare » (ms.).

13. Giovannozzi Ugo. 1) « Intorno al sughero delle monocotiledoni » (st.). — 2) « Sul significato del dimorfismo dei granuli di clorofilla in alcune piante » (st.). — 3) « Studio sulla distribuzione delle masse montuose nell'Appennino Centrale » (st.).

14. Griffini Achille. 1) « I pesci, gli anfibii, i rettili » (st.). — 2) « Catalogo sinonimico e sistematico dei Grillacridi africani, con nuove osservazioni sopra alcune specie » (st.). — 3) « Sulla *Gryllaris armata* Walker, e sopra una nuova specie congenere » (st.). — 4) « La rigenerazione delle zampe negli Ortotteri saltatori » (st.). — 5) « Note critiche e sinonimiche sopra alcuni Grillacridi e Stenopelmatidi descritti da antichi autori » (st.). — 6) « Descrizione d'una nuova specie e d'una nuova varietà del genere *Gryllaris* Serv. » (st.). — 7) « Notes sur quelques *Gryllacridae* du Musée Zoologique de l'Acad. Impér. des Sciences de St. Pétersbourg » (st.). — 8) Nuovi studî sopra alcuni Grillacridi del Museo Nazionale di Budapest » (st.). — 9) « Note sopra alcuni Stenopelmatidi e Grillacridi del Museo di Saravak » (st.). — 10) « Descrizione di due nuove *Gryllacris* » (st.). — 11) « Le specie del gen. *Hyperbaenus* Brunner: studio monografico » (st.). — 12) « Un

nuovo genere di Grillacridi dell'Africa orientale » (st.). — 13) « Recensione dei seguenti lavori di F. Brocher: *Observations biologiques sur quelques Diptères et Hymenoptères dits aquatiques; Observations biologiques sur quelques Insectes aquatiques; Recherches sur la respiration des insects aquatiques adultes; Les Dyticidés* » (st.). — 14) « Viaggio del dott E. Festa nel Darien, nell'Ecuador e regioni vicine; XXIV: Gryllacridae » (st.). — 15) « Prospetto delle *Grillacris* abitanti la nuova Guinea e le isole più vicine » (st.). — 16) « Studî sui Grillacridi del Museo Civico di storia naturale di Genova » (st.). — 17) « Sopra una piccola collezione di Grillacridi del Museo sud-africano di Capetown » (st.). — 18) « Grillacridi e Stenopelmatidi raccolti nella Nuova Guinea dal prof. L. Schultze » (st.). — 19) « Studî sui Grillacridi del K. Zoologisches Museum di Berlino » (st.). — 20) « Le testuggini gigantesche » (st.). — 21) « Le specie africane del gen. *Neanias Brunner*; studio monografico » (st.). — 22) « Note intorno ad alcuni Grillacridi e Stenopelmatidi del Museum d'Histoire Naturelle de Genève » (st.). — 23) Stenopelmatidi raccolti da L. Birò nella Nuova Guinea » (st.). — 24) « Il genere *Spizaphilus Kirby* e le sue specie » (st.). — 25) « I Camaleonti » (st.). — 26) « Di alcune Gryllacris di Madagascar, osservate nelle collezioni del K. Zoog. Hofmuseum di Vienna e del Museum d'Hist. Natur. di Parigi » (st.). — 27) « Description de nouvelles espèces de *Gryllacridae* et *Stenopelmatidae* du Museum d'Hist. Natur. de Paris » (st.). — 28) « Prospectus Gryllacridarum Borneensium » (st.). — 29) Descrizione della *Gryllacris Grassii*, nuova specie dell'Isola di Borneo » (st). — 30) « Studi sopra alcuni Grillacridi del k. k. Naturhistor. Hofmuseum di Vienna: Specie etiopiche e papuane » (st.). — 31) Recensioni dei seguenti manuali: G. Mantero, Il libro delle Farfalle; A. Senna, Le Farfalle » (st.). — 32) Strane variazioni individuali in alcune specie di Coleotteri » (st.). — 33) « Intorno ad alcuni Stenopelmatidi del Museum d'Histoire Naturelle di Parigi » (st). — 34) « Le Zebre » (st.). — 35) « Note sopra Grillacridi australiani, indo-malesi ed etiopici, del Museo d'Histoire Naturelle di Parigi » (st.). — 36) « Il Cane » (st.). — 37) « Intorno a due Bonte-quaggi del Museo di Tring » (st.). — 38) « Recensioni dei seguenti lavori: C. Wesenberg-Lund « Biologische studien ueber Dytisciden »; F. Brocher « L'Aquarium de Chambre » (st.). - 39) « Intorno a tre specie di Grillacridi di Los Banos (Isole Filippine) » (st.). — 40 « Sopra alcuni Grillacridi e Stenopelmatidi della collezione Pantel » (st.). — 41) « Recensione del lavoro di A. Berlese « La distruzione della mosca domestica » (st.). — 42) « Gryllacridae, in Die Fauna Sudwest Australiens » (st.). — 43) « Modificazioni ed innovazioni recentemente proposte nella classificazione generale dei mammiferi » (st.). — 44) « Descrizione di alcune *Gryllacris* nuove o poco note del Museo Nazionale di Budapest » (st.). — 45) « Sulla *Gryllacris biguttata* Staol, e sopra una sua nuova varietà » (st.). — 46) *Les*

Grillacridae de Java » (st.). — 47) « Alcune considerazioni delle Zebre e sui loro ibridi » (st.). — 48) « Studi sui Grillacridi dell' Indian Museum di Calcutta (st.).

15. Mola Pasquale. « I rotiferi delle acque dolci della Sardegna » con tav. (ms.).

16. Noelli Alberto. 1) « La vegetazione del terrazzo diluviale di Rondissone (Torino) » (st.). — 2) « Micromiceti del Piemonte » (st.). — 3) « Flora ruderale torinese » (st.). — 4) « Mutinus levoniensis » (ms.).

17. Panichi Ugo. 1) « Sul Topazio dell'Elba » (st.). — 2) « Sui minerali del giacimento di Tiriolo: I. Il Giacimento. - II. Minerali non prima osservati » (st.). — 3) « Minerali che accompagnano il giacimento ferrifero della Buca della Vena (Stazzema) » (st.). — 4) « Molibdenite ed altri minerali di Bisongi e di Pazzano (prov. di Reggio Calabria) » (st.). — 5) « Solfo di Muthmann osservato all'Isola di Vulcano » (st.). — 6) « Sullo zolfo di Vulcano (Isole Eolie) » (st.). — 7) « Millosevichite. Nuovo minerale del Faraglione di Levante nell'Isola di Vulcano » (st.). — 8) « Sulla Breislakite » (st.). — 9) « Contributo allo studio dei minerali di Vulcano » (ms).

18. Razzauti Alberto. 1) « Sopra la minuta innervazione degli organi a fossetta e dei bottoni terminali cutanei dei Petromizonti » (st.). — 2) « Sopra la questione delle cellule epidermiche sensorie sparse dei Petromizonti » (st.). — 3) « Presenza e danni del *Pantomorus* Fulleri in Italia » (st.). — 4) « Contributo allo studio dell'Édafon. - I. Una nuova forma di stafilinide edafico » (st.). — 5) « Ricerche istologiche sopra gli organi cutanei di senso dei Petromizonti » (ms.). — 6) « Corso di scienze fisiche e naturali per le scuole normali (con A. Battelli) » (st.).

19. Silvestri Alfredo. 1) « Sulla vera natura dei ' Palaeodictyon ' » (st.). — 2) « Lagenine terziarie italiane » (st.). — 3) « Spicole di tetractinellidi rinvenute da Ambrogio Soldani nei sedimenti del Mediterraneo » (st.). — 4) « Sulla struttura di una cristellaria pliocenica » (st.). — 5) « Distribuzione geografica e geologica di due lepidocicline comuni nel terziario italiano » (st.). — 6) « La *Marginulfina fissicostata* (Gümbel) del Pliocene della Farnesina » (st.). — 7) « Nuove notizie sui fossili cretacei della contrada Calcasacco presso Termini-Imerese (Palermo) » (st.).

20. Zodda Giuseppe. 1) « Briofite sicule » (st.). — 2) « Une nouvelle variété de mousse de la Sardaigne » (st.). — 3) « Una stazione singolare per i muschi » (st.). — 4) « Sul parassitismo del *Bryum capillare* L. » (st.). — 5) « Nuovo contributo alla briologia sicula » (st.). — 6) « Contributo alla briologia veneta » (st.). — 7) « Le briofite del messinese » (st.). — 8) « Studio briogeografico sulla Basilicata » (st.). — 9) « Manipolo di briofite della Tripolitania » (st.).

E. M.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Galeotti, Giuliani, Higgins, Signorelli e *Viale* Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna. Pres. dal Socio *Fano* . . . . Pag. 177
Negro. Ricerche sperimentali di elettrofisiologia circa l'azione che sui nervi motori della rana esercitano le scariche elettriche a basso potenziale, ottenuto a circuito aperto dai singoli poli di coppie voltaiche. Pres. dal Socio *Grassi.* . . . . " "

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Grassi (relatore) e *Baccarini.* Relazione sulla Memoria del dott. *G. Bargagli-Petrucci*: Sull'origine biologica della Terra di Siena (Terre gialle e bolari del Monte Amiata) " "

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Comunica che il prof. *Hill* ha ringraziato l'Accademia, per la sua recente nomina a Socio straniero . . . . " 178
Id. Annuncia la morte dei Soci stranieri proff. *Sir David Gill* e *Harry Rosenbusch* . . " "
De Stefani. Commemorazione del Corrispondente prof. *Igino Cocchi* . . . . " "

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Grassi (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio *Nasini*, del Corrisp. *Issel*, dei proff. *Agamennone* e *Longo* ecc. . . . . " 184
Dini. Presenta il 1° volume delle *Opere* di L. Cremona e ne parla . . . . " 185

CONCORSI A PREMI

Grassi (Segretario). Comunica l'elenco dei lavori presentati al concorso ai premi di S. M. il Re per la *Matematica* e per la *Fisiologia normale e patologica*, e a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze naturali* . . . . " "

RENDICONTI — Febbraio 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° febbraio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Ciamician e *Silber*. Azioni chimiche della luce . . . . Pag. 113
Bianchi. Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica (pres. dal Socio *Bianchi*) (*) . . . . » 119
Enriques. Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ (*) . . . . » »
Tedone. Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni . . . . » 120
Bompiani. Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ispersuperficie (pres. dal Corrisp. *Castelnuovo*) . . . . » 126
Severini. Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm (pres. dal Socio *Pincherle*) (*) . . . . » 131
Soula. Sur certaines équations intégrales (pres. dal Socio *Volterra*) . . . . » 132
Armellini. Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete (pres. dal Socio *Levi-Civita*) (*) . . . . » 138
Gateaux. Sur la représentation des fonctionnelles continues (pres. dal Socio *Volterra*) (*) » »
Brunacci. Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria (pres. dal Socio *Luciani*) (*) . . . . » »
Guglielmo. Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . » »
Lo Surdo. Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe della serie di Balmer presentano diverse forme di scomposizione (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . . . . » 143
Cambi. Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati (pres. dal Socio *Nasini*) (*) » 144
Pellini e *Coppola*. Solubilità e attività (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » »
Monti. Sulla distribuzione mensile della frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . » 151
Petri. Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite (pres. dal Socio *Cuboni*) . . . . » 154
Plate. Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul period germinativo dell'Avena sativa (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . . » 161
Anantea. Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta dello sperma del cane (pres. dal Socio *Luciani*) (*) . . . . » 164
Id. Ricerche sulla secrezione spermatica. Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane (pres. *Id.*) (*) . . . . » »
Colonnetti. Esperienze sulla elasticità a trazione del rame (pres. dal Socio *Volterra*) . . » 165
Monti R. L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei (pres. dal Socio *Grassi*) . . . . » 172
Puccianti. Sull'interferografo girante del sig. Sagnac (pres. dal Socio *Roiti*) (*) . . . . » 177

(Segue in terza pagina)

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 15 febbraio 1914.* **N. 4.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 febbraio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 4°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degl autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1914.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. I problemi fondamentali relativi al rotolamento di superficie applicabili, che ho trattato nella mia Nota precedente (¹) per il caso della *geometria euclidea*, si possono porre e risolvere nel medesimo modo pel caso di rotolamento di superficie applicabili negli spazî a curvatura costante, positiva o negativa. Scopo della presente Nota è appunto di estendere alla geometria ellittica ed iperbolica i risultati prima conseguiti per lo spazio euclideo.

Manteniamo le notazioni introdotte nel precedente lavoro, e cominciamo dall'osservare che le considerazioni geometriche ivi esposte ai nn. 1 e 2 valgono senz'altro in qualunque metrica a curvatura costante. Resta soltanto da vedere come si debba modificare la trattazione analitica dei problemi a causa della curvatura dello spazio.

Ma in primo luogo dobbiamo esaminare quali sono gli enunciati da darsi ai problemi fondamentali di rotolamento nella metrica a curvatura costante. Per questo consideriamo una superficie S_0 che rotola sopra una superficie applicabile S, ed un punto O, satellite di S_0, che descrive una corrispondente superficie di rotolamento Σ. Se descriviamo col centro in O una sfera, questa sfera *satellite* invilupperà una superficie Σ' parallela a Σ. Ne risulta che i due problemi di determinare tutte le coppie (S, S_0) di

(¹) Vedasi questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1914.

superficie applicabili, assegnata che sia la superficie Σ di rotolamento descritta da un punto satellite, ovvero l'inviluppo Σ' di rotolamento di una sfera satellite, si equivalgono perfettamente.

Ora, in geometria ellittica tra le sfere col centro in un punto O figura il piano polare di O (che da O dista di un quadrante); e mentre O descrive la superficie Σ di rotolamento, il suo piano polare inviluppa la superficie Σ_1 polare di O.

Si vede quindi che, in geometria ellittica, i due problemi fondamentali A) B) formulati nella Nota precedente, e distinti nel caso euclideo, vengono qui a confondersi in un unico problema.

Al contrario, in geometria iperbolica, i problemi fondamentali si scindono in tre problemi distinti, corrispondentemente alla classificazione delle sfere in tre specie, e cioè: sfere a centro reale (a distanza finita); sfere a centro ideale o superficie geodeticamente parallele ad un piano; sfere con centro all'infinito, od orisfere.

Così adunque, per la geometria ellittica, abbiamo un solo problema fondamentale di rotolamento:

Problema α). — *Data una qualunque superficie Σ, trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che, rotolando* S_0 *sopra* S, *un conveniente punto* O, *satellite di* S_0, *descriva la superficie* Σ.

In geometria iperbolica, invece, avremo tre problemi fondamentali di rotolamento, dei quali il primo è il problema α) stesso, ora enunciato pel caso ellittico. Quanto agli altri due, ove si osservi che ad ogni sfera a centro ideale è parallelo geodeticamente un piano, si vede che possono formularsi nel modo seguente:

Problema β). — *Data una superficie Σ (nello spazio iperbolico), trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che un piano π, satellite di* S_0 *nel rotolamento sopra* S, *inviluppi Σ.*

Questo corrisponde al secondo problema, B), del caso euclideo.

Il terzo problema, particolare allo spazio iperbolico, si enuncia:

Problema γ). — *Data una superficie Σ (nello spazio iperbolico), trovare tutte le coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, tali che un'orisfera o satellite di* S_0, *nel rotolamento sopra* S, *inviluppi Σ.*

Dimostreremo che ciascuno di questi problemi ammette infinite soluzioni, la cui ricerca dipende dall'integrazione di un'equazione a derivate parziali del 2° ordine, che si può facilmente costruire procedendo come nel caso euclideo.

2. Per le considerazioni stesse svolte ai nn. 1, 2 della Nota precedente, i problemi enunciati si riconducono alla questione seguente:

Sopra ogni normale alla superficie data Σ, si domanda di riportare un segmento variabile $w = w(u, v)$ (indicando con u, v le coordinate curvilinee sopra Σ), in modo che la superficie S luogo degli estremi dei segmenti w,

ammetta una superficie applicabile S_0, per la quale si verifichino queste proprietà:

1ª) nel caso α), sia w la distanza del punto (u, v) di S_0 da un punto fisso;

2ª) nel caso β), w rappresenti la distanza del punto (u, v) di S_0 da un piano fisso;

3ª) nel caso γ), la stessa w dia la distanza del punto (u, v) mobile su S_0 da un'orisfera fissa.

Dopo ciò, per costruire l'indicata equazione a derivate parziali, procediamo come segue: Riferiamo la superficie data Σ alle sue linee di curvatura (u, v), e sia

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'elemento lineare di Σ, e indichino $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ le curvature principali (ridotte) (¹), talchè $\mathrm{E}, \mathrm{G}, \frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}$ sono funzioni note di u, v. Inoltre, per semplificare, indicando con K_0 la curvatura dello spazio, supporremo

$$K_0 = +1 \text{ (nel caso ellittico)},$$
$$K_0 = -1 \text{ (nel caso iperbolico)}.$$

Riportando sulle normali di Σ i segmenti w, la superficie S (luogo degli estremi) ha un elemento lineare ds_1, che si calcola subito colla formola

$$(1) \qquad ds_1^2 = \mathrm{E}\left(\cos w + \frac{\operatorname{sen} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \mathrm{G}\left(\cos w + \frac{\operatorname{sen} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 + dw^2$$
$$(\text{per } K_0 = +1),$$

ovvero

$$(1^\star) \qquad ds_1^2 = \mathrm{E}\left(\cosh w + \frac{\operatorname{senh} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \mathrm{G}\left(\cosh w + \frac{\operatorname{senh} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 + dw^2$$
$$(\text{per } K_0 = -1).$$

Ora separiamo la trattazione dei diversi casi, cominciando dal

Caso α). Qui dovrà esistere una deformata S_0 della S, per la quale w rappresenti la distanza del punto (u, v) da un punto fisso O nello spazio. Se riferiamo lo S_0 a coordinate polari (w, α, β) col centro in O $(w = o)$, per l'elemento lineare ds_0 avremo (²)

$$(2) \qquad ds_0^2 = \operatorname{sen}^2 w(d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2) + dw^2 \qquad (\text{per } K_0 = +1),$$
$$(2^\star) \qquad ds_0^2 = \operatorname{senh}^2 w(d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2) + dw^2 \qquad (\text{per } K_0 = -1).$$

(¹) Vedansi le mie *Lezioni*, vol. I, § 215.
(²) Vedansi le mie *Lezioni*, vol. I, § 186.

Poichè dobbiamo avere $ds_0^2 = ds^2$, confrontando colle (1) (1*) risulta

$$E\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2$$

$$(K_0 = +1),$$

$$E\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2$$

$$(K_0 = -1):$$

onde la condizione *necessaria e sufficiente* è che w sia una tale funzione di u, v, da rendere la curvatura delle forme differenziali, nei primi membri, $= +1$. Dunque:

L'equazione a derivate parziali del 2° ordine per w, da cui dipende la risoluzione del problema α), si forma scrivendo che hanno curvatura $= +1$ le forme differenziali:

$$(3)\qquad E\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 \qquad \textit{nel caso ellittico,}$$

$$(3^*)\qquad E\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 \qquad \textit{nel caso iperbolico.}$$

Caso β). In questo secondo caso, w sarà la distanza del punto (u, v) di S_0 da un piano fisso ($w = 0$); e l'elemento lineare di S_0 si potrà porre sotto la forma iperbolica

$$(4)\qquad ds_0^2 = \cosh^2 w (d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2\alpha\, d\beta^2) + dw^2,$$

essendo $w = 0$ il piano fisso, ed α, β un sistema di coordinate geodetiche su questo piano. Confrontando con (1*), abbiamo

$$E\left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2\alpha\, d\beta^2,$$

onde la forma differenziale a sinistra dovrà avere la curvatura $= -1$, come quella a destra.

Dunque: *L'equazione a derivate parziali caratteristica per w nel caso β), si forma scrivendo che è $= -1$ la curvatura della forma differenziale*

$$(5)\qquad E\left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{\operatorname{tgh} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2.$$

Caso γ). Significando qui w la distanza del punto (u, v) di S_0 da un'orisfera fissa ($w = 0$), potremo dare all'elemento lineare dello spazio la forma parabolica

$$(6)\qquad ds_0^2 = e^{2w}(d\alpha^2 + d\beta^2) + dw^2;$$

e, dal paragone colla (1*), risulta

$$E\left(e^{-w}\cosh w + \frac{e^{-w}\operatorname{senh} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \\ + G\left(e^{-w}\cosh w + \frac{e^{-w}\operatorname{senh} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 .$$

Dunque:

L'equazione a derivate parziali per w nella risoluzione del problema γ) si forma scrivendo che è nulla la curvatura della forma differenziale

$$(7)\qquad E\left(e^{-w}\cosh w + \frac{e^{-w}\operatorname{senh} w}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \\ + G\left(e^{-w}\cosh w + \frac{e^{-w}\operatorname{senh} w}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 .$$

Abbiamo così provato che ciascuno dei problemi α) β) γ) ammette infinite soluzioni, corrispondenti biunivocamente alle soluzioni w della corrispondente equazione a derivate parziali.

Scelta una tale soluzione w, si conosce immediatamente la superficie S d'appoggio; e la rotolante S_0, unica e determinata, si ottiene integrando una equazione di Riccati nei casi α) e β), e con sole quadrature nel caso γ).

3. Suppongasi che la superficie Σ (o l'inviluppo) di rotolamento, nei problemi α) β) γ), sia un piano ovvero una sfera, che nel caso iperbolico potrà appartenere ad una qualunque delle tre specie. Potremo prendere E=G, ed inoltre avremo

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2} = \text{cost}\ (^1).$$

(1) Nella geometria ellittica od iperbolica si ha un'altra notevole superficie con raggi principali di curvatura costanti (non uguali), e cioè la *superficie di Clifford*, a curvatura totale nulla. Qui si può prendere $E = G = 1$, e si ha

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -1 \text{ nel caso ellittico};\quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = +1 \text{ nel caso iperbolico.}$$

La risoluzione del problema α) per la superficie di Clifford, come superficie di rotolamento, dipende dalla riduzione dell'elemento lineare della sfera ordinaria alle forme di Weingarten

$$\left(\cot w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \left(\cot w + \frac{1}{\varrho_1}\right)^2 dv^2 \quad (\text{per } K_0 = +1),$$

$$\left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 du^2 + \left(\coth w + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 dv^2 \quad (\text{per } K_0 = -1),$$

ed equivale quindi a cercare tutte le superficie applicabili sopra una certa superficie di rotazione nello spazio euclideo.

Per quanto si è visto al numero precedente, il problema si cangia nell'altro di trovare tutti i sistemi ortogonali isotermi sopra una superficie a curvatura costante, problema che si sa risolvere completamente. Ma si può spingere più in là la ricerca, seguendo un procedimento analogo a quello dato dal Calò pel caso euclideo, e trovare *in termini finiti* tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili che risolvono il problema α), β) o γ) nel caso di una superficie Σ di rotolamento, sferica.

A questo scopo scriviamo prima le formole che dànno il passaggio dalle coordinate geodetiche w, α, β nei rispettivi casi (2), (2*), (4), (6) alle coordinate di Weierstrass

$$x_0, x_1, x_2, x_3,$$

legate dalla identità quadratica

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{nel caso ellittico,}$$

o dall'altra

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad \text{nel caso iperbolico.}$$

Distinguiamo quattro casi corrispondenti alle forme geodetiche ora citate dell'elemento lineare ds_0 dello spazio:

1° caso. Indicando con τ la variabile complessa sulla sfera d'elemento lineare

$$d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2,$$

e con τ_0 la coniugata, abbiamo

$$ds_0^2 = dw^2 + \operatorname{sen}^2 w \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}; \tag{8}$$

e per le formole che dànno le coordinate di Weierstrass, possiamo prendere le seguenti:

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} & x_0 = \cos w\ ,\ x_1 = \operatorname{sen} w \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}\ ,\ x_2 = \operatorname{sen} w \frac{\tau - \tau_0}{i(\tau\tau_0 + 1)}, \\ & x_3 = \operatorname{sen} w \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}. \end{aligned} \right.$$

2° caso. Nel caso iperbolico, e per la forma geodetica ellittica (2*) dell'elemento lineare dello spazio, abbiamo

$$ds_0^2 = dw^2 + \operatorname{senh}^2 w \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}; \tag{8*}$$

per le corrispondenti coordinate di Weierstrass valgono le formole

$$(a^*)\quad \left\{ \begin{aligned} & x_0 = \cosh w\ ,\ x_1 = \operatorname{senh} w \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}\ ,\ x_2 = \operatorname{senh} w \frac{\tau - \tau_0}{i(\tau\tau_0 + 1)}, \\ & x_3 = \operatorname{senh} w \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}. \end{aligned} \right.$$

3° caso. Per la forma geodetica iperbolica (4) dell'elemento lineare dello spazio, introducendo la variabile complessa τ *sulla pseudosfera* (e la coniugata τ_0) colla formola (¹)

$$d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2\alpha\, d\beta^2 = -\frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau - \tau_0)^2},$$

avremo

$$ds_0^2 = dw^2 - \cosh^2 w\, \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau - \tau_0)^2}. \tag{9}$$

Per le coordinate di Weierstrass, possiamo assumere

$$(b)\quad \begin{cases} x_0 = \cosh w\, \dfrac{\tau\tau_0 + 1}{i(\tau - \tau_0)}, \quad x_1 = \operatorname{senh} w, \quad x_2 = \cosh w\, \dfrac{1 - \tau\tau_0}{i(\tau - \tau_0)}, \\ x_3 = \cosh w\, \dfrac{\tau + \tau_0}{i(\tau + \tau_0)}. \end{cases}$$

4° caso. Se l'elemento lineare dello spazio ha la forma parabolica (6), introducendo la variabile complessa sul piano

$$\tau = \alpha + i\beta, \quad \tau_0 = \alpha - i\beta,$$

abbiamo

$$ds_0^2 = dw^2 + e^{2w}\, d\tau\, d\tau_0, \tag{10}$$

e le formole per le coordinate di Weierstrass si possono scrivere:

$$(c)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{e^w}{2}(e^{-2w} + \tau\tau_0 + 1), \quad x_1 = \dfrac{e^w}{2}(1 - \tau\tau_0 - e^{-2w}), \\ x_2 = \dfrac{e^w}{2}(\tau + \tau_0), \quad x_3 = \dfrac{e^w}{2}\, \dfrac{\tau - \tau_0}{i}. \end{cases}$$

4. Ciò premesso, supponiamo che sia (S_0, S) una coppia di superficie applicabili dello spazio ellittico che risolvano il problema α), quando la superficie Σ di rotolamento sia una sfera di raggio geodetico $= a$. Riferiamo la superficie rotolante ad un sistema di coordinate polari (w, τ, τ_0) col centro nel punto satellite O, e riferiamo anche la superficie S d'appoggio ad un sistema analogo di coordinate polari, che indicheremo con $\overline{w}, \overline{\tau}, \overline{\tau}_0$, il cui polo sia nel centro della sfera Σ. I rispettivi elementi lineari ds_0, ds, della S_0 e della S, saranno dati da

$$ds_0^2 = dw^2 + \operatorname{sen}^2 w\, \frac{4\, d\tau\, d\tau}{(1 + \tau\tau_0)^2}$$

$$\overline{ds}^2 = d\overline{w}^2 + \operatorname{sen}^2 \overline{w}\, \frac{4\, d\overline{\tau}\, d\overline{\tau}}{(2 + \overline{\tau}\,\overline{\tau}_0)^2}.$$

(¹) *Lezioni*, vol. I, pag. 389.

Ora si ha, per ipotesi,

$$ds_0^2 = \overline{ds}^2 \quad , \quad \overline{w} = w + a \quad (d\overline{w} = dw),$$

indi

$$(10) \qquad \frac{\operatorname{sen}^2(w+a)}{\operatorname{sen}^2 w} \frac{d\overline{\tau}\, d\overline{\tau}_0}{(1+\overline{\tau}\,\overline{\tau}_0)^2} = \frac{d\tau\, d\tau_0}{(1+\tau\tau_0)^2}.$$

Di qui segue che $\overline{\tau}$ deve essere funzione di τ (ovvero della coniugata), nel senso di funzione di variabile complessa, poniamo

$$\overline{\tau} = f(\tau) \quad , \quad \overline{\tau}_0 = f_0(\tau_0).$$

Indicando con accenti le derivate, la (10) ci dà

$$\cos a + \operatorname{sen} a \cot w = \frac{f f_0 + 1}{\sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)},$$

ossia

$$\cot w = \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}.$$

Se adunque poniamo

$$(11) \quad \Omega = \sqrt{(f f_0 + 1)^2 + f' f'_0 (\tau\tau_0 + 1)^2 - 2 \cos a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)(f f_0 + 1)},$$

avremo

$$\cos w = \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega}, \quad \operatorname{sen} w = \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega}$$

$$\cos \overline{w} = \frac{(f f_0 + 1) \cos a - \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega}, \quad \operatorname{sen} \overline{w} = \frac{\operatorname{sen} a\, (f f_0 + 1)}{\Omega}.$$

Sostituendo nelle formole (a), e nelle analoghe, troviamo, in termini finiti, tutte le coppie (S_0, S) di superficie applicabili domandate, colle formole seguenti:

$$S_0) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{f f_0 + 1 - \cos a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega} \\ x_1 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau + \tau_0)}{\Omega} \\ x_2 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau - \tau_0)}{i\Omega} \\ x_3 &= \frac{\operatorname{sen} a \sqrt{f' f'_0}\,(\tau\tau_0 - 1)}{\Omega} \end{aligned} \right.$$

$$
\text{S)}\quad \begin{cases}
\overline{x}_0 = \dfrac{(ff_0+1)\cos a - \sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}{\Omega} \\[2mm]
\overline{x}_1 = \dfrac{\operatorname{sen} a(f+f_0)}{\Omega} \\[2mm]
\overline{x}_2 = \dfrac{\operatorname{sen} a(f-f_0)}{i\Omega} \\[2mm]
\overline{x}_3 = \dfrac{\operatorname{sen} a(ff_0-1)}{\Omega} .
\end{cases}
$$

Qui, per $f(\tau)$ s'intende una qualunque funzione della variabile complessa τ, ed Ω ha il valore (11).

Queste formole assegnano esplicitamente tutte le coppie (S_0, S) di superficie applicabili che risolvono, nel caso ellittico, il problema α), dando le coordinate (x_0, x_1, x_2, x_3), $(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ di $S_0, S)$ che si corrispondono nell'applicabilità. Se si fa rotolare S_0 sopra S il punto di coordinate $(1, 0, 0, 0)$ satellite di S_0 descrive la sfera Σ di raggio geodetico $= a$. In particolare, se prendiamo $a = \frac{\pi}{2}$, le formole subiscono un'evidente semplificazione, e la superficie Σ di rotolamento diventa un piano.

5. Passiamo al problema α) in geometria iperbolica nell'ipotesi che la superficie Σ di rotolamento sia una sfera; e distinguiamo tre casi, secondo che:

a) Σ è una sfera a centro reale;
b) Σ è una sfera a centro ideale;
c) Σ è un'orisfera.

Caso a). Indichiamo ancora con a il raggio geodetico della sfera, e procediamo sulle formole (8^*) (a^*) come prima colle (8) (a). Troveremo che le coppie di superficie applicabili richieste si hanno in termini finiti, colle formole seguenti:

$$
\text{S}_0)\quad \begin{cases}
x_0 = \dfrac{ff_0+1-\cosh a\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0+1)}{\Omega} \\[2mm]
x_1 = \dfrac{\operatorname{senh} a\sqrt{f'f'_0}(\tau+\tau_0)}{\Omega} \\[2mm]
x_2 = \dfrac{\operatorname{senh} a\sqrt{f'f'_0}(\tau-\tau_0)}{i\Omega} \\[2mm]
x_3 = \dfrac{\operatorname{senh} a\sqrt{f'f'_0}(\tau\tau_0-1)}{\Omega}
\end{cases}
$$

$$
(S_0)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\overline{x}_0 &= \frac{(f f_0 + 1)\cosh a - \sqrt{f' f_0'}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega}\\
\overline{x}_1 &= \frac{\operatorname{senh} a\,(f + f_0)}{\Omega}\\
\overline{x}_2 &= \frac{\operatorname{senh} a\,(f - f_0)}{i\Omega}\\
\overline{x}_3 &= \frac{\operatorname{senh} a\,(f f_0 - 1)}{\Omega}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\Omega = \sqrt{(f f_0 + 1)^2 + f' f_0'(\tau\tau_0 + 1)^2 - 2\cosh a\sqrt{f' f_0'}\,(f f_0 + 1)(\tau\tau_0 + 1)}\,.
$$

Caso b). In questo caso, per la superficie S d'appoggio dovremo adoperare la forma (9) dell'elemento lineare

$$
\overline{ds}^2 = d\overline{w}^2 - \cosh^2 \overline{w}\,\frac{4\,d\overline{\tau}\,d\overline{\tau}_0}{(\overline{\tau} - \overline{\tau}_0)^2}\,,
$$

ed avremo nuovamente

$$
\overline{w} = w + a\,,
$$

se con a indichiamo la distanza geodetica della sfera Σ, a centro ideale, dal piano parallelo. Paragonando col ds_0^2 dato dalla (8*), ne deduciamo

$$
\operatorname{senh}^2 w\,\frac{d\tau\,d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2} = -\cosh^2(w + a)\,\frac{d\overline{\tau}\,d\overline{\tau}_0}{(\overline{\tau} - \overline{\tau}_0)^2}\,,
$$

indi

$$
\overline{\tau} = f(\tau) \quad , \quad \overline{\tau}_0 = f_0(\tau_0)\,,
$$

$$
\coth w \cosh a + \operatorname{senh} a = i\,\frac{f - f_0}{\sqrt{f' f_0'}\,(\tau\tau_0 + 1)}\,.
$$

Per la coppia (S_0, S) di superficie applicabili, si trovano di qui le formole:

$$
S_0)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{i(f - f_0) - \operatorname{senh} a\sqrt{f' f_0'}\,(\tau\tau_0 + 1)}{\Omega}\\
x_1 &= \frac{\cosh a\sqrt{f' f_0'}\,(\tau + \tau_0)}{\Omega}\\
x_2 &= \frac{\cosh a\sqrt{f' f_0'}\,(\tau - \tau_0)}{i\Omega}\\
x_3 &= \frac{\cosh a\sqrt{f' f_0'}\,(\tau\tau_0 - 1)}{\Omega}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{S)}\quad\left\{\begin{aligned}
\overline{x}_0 &= \cosh a\,\frac{ff_0+1}{\Omega}\\
\overline{x}_1 &= \frac{i(f-f_0)\,\mathrm{senh}\,a+\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}{\Omega}\\
\overline{x}_2 &= \frac{\cosh a(1-ff_0)}{\Omega}\\
\overline{x}_3 &= \frac{\cosh a(f+f_0)}{\Omega},
\end{aligned}\right.
$$

dove si è posto:

$$
\Omega=\sqrt{i^2(f-f_0)^2-f'f_0'(\tau\tau_0+1)^2-2i(f-f_0)\,\mathrm{senh}\,a\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}\,.
$$

Queste formole assumono una forma più semplice quando la superficie Σ di rotolamento sia un piano, chè allora si ha $a=0$.

Caso c). Supponendo, da ultimo, che la superficie di rotolamento Σ sia un'orisfera, adoperiamo per la superficie S d'appoggio la forma parabolica (10) dell'elemento lineare

$$
ds^2=d\overline{w}^2+e^{2\overline{w}}\,d\overline{\tau}\,d\overline{\tau}_0\,,
$$

ed in questa facciamo, come è lecito, $\overline{w}=w$. Paragonando colla (8*), ne deduciamo, qui,

$$
\mathrm{senh}^2 w\,\frac{4\,d\tau\,d\tau_0}{(\tau\tau_0+1)^2}=e^{2w}\,d\overline{\tau}\,d\overline{\tau}_0\,,
$$

indi

$$
\overline{\tau}=f(\tau)\quad,\quad\overline{\tau}_0=f_0(\tau_0)
$$

$$
e^{-w}\,\mathrm{senh}\,w=\frac{\sqrt{f'f_0'}}{2}\,(\tau\tau_0+1)\,,
$$

ovvero

$$
e^{-2w}=1-\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)\,,
$$

e, per ciò,

$$
\cosh w=\frac{2-\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}}\quad,\quad\mathrm{senh}\,w=\frac{\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}{2\sqrt{1-\sqrt{f'f_0'}\,(\tau\tau_0+1)}}\,.
$$

Con queste formole, servendoci delle (a^*) e delle (c), per la coppia di superficie applicabili (S_0, S) deduciamo le seguenti formole definitive:

$$
S_0)\quad \begin{cases}
x_0 = \dfrac{2 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
x_1 = \dfrac{\sqrt{f'f'_0}\,(\tau + \tau_0)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
x_2 = \dfrac{\sqrt{f'f'_0}\,(\tau - \tau_0)}{2i\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
x_3 = \dfrac{\sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0 - 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}}
\end{cases}
\qquad
S)\quad \begin{cases}
\overline{x}_0 = \dfrac{2 + ff_0 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1)}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
\overline{x}_1 = \dfrac{\sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0 + 1) - ff_0}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
\overline{x}_2 = \dfrac{f + f_0}{2\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}} \\[2ex]
\overline{x}_3 = \dfrac{f - f_0}{2i\sqrt{1 - \sqrt{f'f'_0}\,(\tau\tau_0+1)}}
\end{cases} .
$$

In modo perfettamente simile a quello qui usato pel problema α), si troverebbero in termini finiti le coppie (S_0, S) di superficie applicabili che risolvono i problemi β) e γ) in geometria iperbolica quando per inviluppo di rotolamento si assuma una sfera appartenente ad una qualunque delle tre specie.

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota I del Corrispondente F. Enriques.

1. Il problema capitale della teoria delle superficie algebriche è la classificazione di queste, cioè la determinazione effettiva delle *famiglie* di superficie distinte per trasformazioni birazionali, ciascuna famiglia venendo caratterizzata da un gruppo di caratteri interi invarianti e contenendo, entro di sè, un'infinità continua di *classi* dipendenti da un certo numero di parametri (moduli).

Vale la pena di esaminare quali resultati d'insieme si possano trarre dal lavoro dell'ultimo ventennio, in ordine al suddetto problema di classificazione.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota, in cui pervengo alle conclusioni che seguono:

La classificazione delle superficie algebriche, conduce naturalmente a considerare il genere d'ordine 12: P_{12}.

Per $P_{12} = 0$ si ha la famiglia delle rigate.

Per $P_{12} = 1$ si hanno le superficie possedenti *curve canoniche* o *pluricanoniche d'ordine* 0 (tutti i P_i essendo $= 0 ; 1$).

Per $P_{12} > 1$ si hanno le superficie con curve canoniche o pluricanoniche effettive, d'ordine > 0.

Per $P_{12} \geq 1$ il genere lineare $p^{(1)} \geq 1$ (mentre si può ritenere — com'è noto — $p^{(1)} \leq 0$ per le rigate, cioè per $P_{12} = 0$).

Ad ogni valore del genere lineare $p^{(1)} > 1$ corrisponde un *numero finito di famiglie* di superficie.

Per $p^{(1)} = 1$ si ha un'*infinità numerabile di famiglie* in cui entrano *due interi arbitrarî*; tali famiglie sono caratterizzate dal contenere un fascio di curve ellittiche, salvo per $p_g = P_4 = 1$: in questo caso si hanno superficie di generi geometrici,

$$p_g = P_1 = P_2 = \cdots = 1 ,$$

e di genere numerico,

$$p_a = 1 \quad \text{o} \quad p_a = -1 ,$$

dipendenti altresì da un intiero arbitrario (e da 19 o 3 moduli rispettivamente) che non contengono, *in generale*, fasci di curve ellittiche.

La costruzione e lo studio delle superficie con $p^{(1)} = 1$ ($p_g P_4 \neq 1$) dà luogo a sviluppi interessanti in ordine ai valori dei plurigeneri, alla base e ai moduli. Questi sviluppi sono riferiti, per semplicità, al caso delle superficie regolari ($p_a = p_g$). Ma l'estensione al caso $p_a < p_g$ non presenta difficoltà essenziali.

2. Nella teoria delle superficie s'introducono, com'è noto, i seguenti caratteri invarianti ([1]):

a) il genere geometrico $p_g = P_1$, ed i plurigeneri $P_2, P_3, \ldots$;

b) il genere lineare (virtuale) $p^{(1)}$;

c) il genere numerico (o aritmetico) p_a.

La classificazione delle superficie secondo i valori dei plurigeneri conduce a considerare in ispecie il 12-genere, P_{12}, e a distinguere i tre casi:

$$P_{12} = 0 , \quad P_{12} = 1 , \quad P_{12} > 1 .$$

La condizione

$$P_{12} = 0 \qquad\qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

caratterizza la famiglia delle superficie razionali e rigate ([2]).

3. La condizione

$$P_{12} = 1$$

caratterizza le superficie possedenti una curva canonica o pluricanonica d'ordine 0, sopra le quali (riferendosi ad un modello senza curve eccezionali) ogni sistema di curve di genere (virtuale) π è di grado (virtuale)

$$n = 2\pi - 2 .$$

([1]) Cfr. F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

([2]) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

Il teorema sopra enunciato risulta dall'analisi delle differenti famiglie di superficie con $P_{12}=1$, che sono le seguenti:

a) Per $p_a = -1$, le superficie iperellittiche irregolari, cioè:

a') le superficie iperellittiche di rango 1 (di Picard) caratterizzate [1] da

$$p_a = -1 \quad , \quad p_g = P_4 = 1 ,$$

e formanti un'infinità numerabile di famiglie (con 3 moduli) indipendenti da un numero intero δ, detto il divisore di codeste superficie [2];

a'') le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ che formano 7 famiglie di superficie ellittiche

$$(r = 2, 3, 4, 6)$$

di determinante $n = 2, 4, 3, 9, 4, 8, 6$, classificate da Bagnera - De Franchis e caratterizzate [3] mediante i valori dei plurigeneri che per esse sono uguali a 0 e 1. Si ha infatti, per codeste superficie, secondochè $r = 2, 3, 4, 6$, un primo plurigenere non nullo, $P_2 = 1$, o $P_3 = 1$, o $P_4 = 1$, o $P_6 = 1$, e quindi, in ogni caso,

$$P_{12} = 1 .$$

b) Per

$$p_a = 0 ,$$

le superficie coi generi dispari nulli e coi generi pari uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_3 = 0 , \quad P_2 = 1 ,$$

e riducibili alla sestica che passa doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro (10 moduli) [4].

c) Per

$$p_a = 1 ,$$

le superficie con tutti i generi uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_4 = 1 \ [5],$$

[1] Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

[2] Cfr. p. es. Enriques-Severi, *Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques*, in Acta Math., tom. 32.

[3] Enriques-Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, in Rendiconti Accad. Lincei, 1908.

[4] Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

[5] Enriques, *Sui piani doppî di genere uno*, in Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), 1896.

le quali formano un'infinità numerabile di superficie dipendenti da un intero $\pi = 2, 3, \ldots$ (e da 19 moduli per ciascuna famiglia) [1].

Dimostriamo che, effettivamente, *i tipi a) b) c) esauriscono tutte le superficie con* $P_{12} = 1$.

A tale scopo si osservi anzitutto che, per $P_{12} = 1$, si hanno superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate, e perciò dovrà essere, intanto [2],

$$p_a \geq 1,$$

cioè

$$p_a = -1, \text{ o } p_a = 0, \text{ o } p_a = 1.$$

Ora vediamo che:

a) Una superficie per cui $p_a = -1$, avrà il genere geometrico $p_g = 0$ o $p_g > 0$, e sarà una superficie ellittica.

Pongasi $p_g = 0$. Il calcolo dei plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$ conduce a $P_m > 1$ per $m = 3, 4, \ldots$, se $P_2 > 0$ [3]. In questa ipotesi si ha (almeno) una curva bicanonica C e una curva tricanonica K; e combinando linearmente $3C$ e $2K$, si ottiene un fascio di curve sesticanoniche: $P_6 \geq 2$, e, *a fortiori*, $P_{12} > 1$.

Se invece si suppone il bigenere $P_2 = 0$, si distinguono 4 categorie di superficie [4] e per l'ultima è $P_2 = 2$ ($P_{12} > 1$). Le superficie delle tre prime categorie hanno $P_{12} = 1$ soltanto nel caso in cui contengano un fascio ellittico di curve di genere $\pi = 1$, cioè nel caso delle superficie (iperellittiche) in cui le curve pluricanoniche sono d'ordine 0; per $\pi > 1$ risulta sempre $P_{12} > 1$.

Infine, per $p_a = -1$, $p_g > 0$, l'ipotesi $P_{12} = 1$ porterà $p_g = 1$, $P_4 = 1$.

b) In secondo luogo si supponga

$$p_a = 0 \quad , \quad P_{12} = 1.$$

Non può essere $p_g = 1$, perchè le condizioni $p_g = 1$ e $P_4 = 1$ (conseguenza di $P_{12} = 1$) portano $p_a = -1$ o $p_a = +1$ [5] e caratterizzano rispet-

[1] Cfr. Enriques, *Le superficie di genere uno*, in Rendiconti Accad. Bologna, 13 decembre 1908; Severi, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, in Atti Istituto Veneto, 10 gennaio 1909.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1905.

[3] Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, loc. cit.

[4] loc. cit., § 9.

[5] Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$", in Rendiconti Accad. Bologna, 7 decembre 1906.

tivamente le famiglie di superficie iperellittiche di Picard o di superficie coi generi 1 sopra menzionate. Si avrà, dunque,

$$p_a = p_g = 0$$

e $P_2 > 0$, poichè le condizioni $p_a = P_2 = 0$ caratterizzano le superficie razionali (¹); ma, essendo $P_{12} = 1$, si deduce $P_2 = 1$, $P_6 = 1$: quindi (²) $P_3 = 0$, e si ricade nel tipo della sestica sopra nominato.

c) Finalmente, se $p_a = 1$, la $P_{12} = 1$ porta $P_2 = 1$, e quindi si hanno superficie con tutti i generi uguali ad 1.

4. *La condizione*

$$P_{12} > 1$$

caratterizza l'insieme delle superficie possedenti infinite curve canoniche o pluricanoniche; ma occorre distinguere due casi, secondochè il genere lineare

$$p^{(1)} > 1$$

oppure

$$p^{(1)} = 1.$$

Le superficie per cui

$$p^{(1)} > 1$$

avranno il genere

$$p_g \geq 0,$$

il bigenere

$$P_2 \geq p^{(1)} \geq 2,$$

il trigenere

$$P_3 \geq 3p^{(1)} - 2 \geq 4;$$

e i sistemi canonici e pluricanonici saranno, in ogni caso, di grado > 0.

Si deduce che:

Ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ può essere trasformata in una superficie (canonica o pluricanonica), le cui sezioni piane o iperpiane sono curve canoniche o pluricanoniche, superficie che ne porge un modello invariante.

La superficie i canonica riuscirà certo semplice per i assai grande. Ma, se non si fà distinzione tra superficie semplici e multiple (³), si può aggiungere che *esiste sempre un modello costituito da una superficie bicanonica*

(¹) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, in Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1896.

(²) Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, loc. cit.

(³) La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche o bicanoniche ecc. si riducano a superficie multiple, costituisce un problema, che sembra ammettere un piccolo numero di soluzioni, e che additiamo all'attenzione degli studiosi.

per $p^{(1)} > 3$, *ed un modello costituito da una superficie tricanonica per* $p^{(1)} = 2, 3$ [1].

Invece per $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$, *tutte le curve pluricanoniche sono composte delle curve ellittiche d'un fascio, sicchè non conducono ad un modello invariante della superficie.*

5. L'esistenza d'una superficie canonica o pluricanonica, modello invariante delle superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$, porta una conseguenza importante in ordine alla classificazione di queste.

Per ogni valore di $p^{(1)} > 1$, si hanno superficie canoniche di un ordine dato $p^{(1)} - 1$, o superficie bicanoniche d'ordine $4(p^{(1)} - 1)$, o tricanoniche d'ordine $9(p^{(1)} - 1)$, a sezioni di genere parimente dato. Ora, se si tratta di determinare le superficie d'un ordine dato, a sezioni di dato genere, cioè con una curva doppia d'ordine dato, il problema, di natura algebrica, condurrà ad un *numero finito* di famiglie distinte ed irriducibili, ogni famiglia essendo costituita da una serie continua di superficie e di classi proiettivamente (e, quindi, birazionalmente) distinte. Vediamo dunque che, *per* $p^{(1)} > 1$, *ad ogni valore del genere lineare* $p^{(1)}$ *corrisponde un numero finito di famiglie di superficie, con caratteri interi distinti.*

Questa conclusione non sussiste più per $p^{(1)} = 1$. Già, per $P_{12} = 1$, le superficie iperellittiche $(a, 1)$ e le superficie coi generi 1 (c) offrono *serie di famiglie dipendenti da un numero intero arbitrario.*

Si considerino ora in generale le *superficie con* $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$; la classificazione di queste superficie, che ci proponiamo di svolgere, condurrà a riconoscere che esse formano una *serie di famiglie in cui entrano due numeri interi arbitrarî.*

6. Abbiamo già notato che le superficie con $P_{12} > 1$, $p^{(1)} = 1$, posseggono un fascio di curve ellittiche; lo stesso può dirsi delle superficie con $P_{12} = 1$ (per cui è sempre $p^{(1)} = 1$), fatta eccezione delle superficie coi generi geometrici 1:

$$p_g = P_{12} = 1 \qquad (p_a = -1, +1),$$

cioè dalle superficie *a*) *b*) e *c*) del n. 3.

Più precisamente: *le superficie con* $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$, *eccettuati i casi corrispondenti a* $p_g P_{12} = 1$, $(p_g = P_{12} = 1)$, *posseggono un fascio di curve ellittiche di genere* $p_g - p_a$, *per* $p_a \geq 0$, *ed invece un fascio di curve ellittiche di genere* p_g *ed un secondo di genere* 1 *nel caso* $p_a = 1$ [2].

[1] Alcune importanti diseguaglianze stabilite dal sig. A. Rosenblatt (Comptes rendus e Bull. Acad. Cracovie, 1912), permettono di aggiungere che $p_g > 3$; e quindi esiste una superficie canonica, appena $p^{(1)}$ sorpassa un certo limite.

[2] Cfr. Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$", in Rendiconti Accad. Bologna, decembre 1906.

Viceversa, le superficie con un fascio di curve ellittiche (non appartenenti alla famiglia delle rigate) hanno $P_{12} \geq 1$, $p^{(1)} = 1$ e $p_g P_4 \neq 1$ oppure $p_g P_4 = 1$; in quest'ultimo caso sono *superficie particolari* coi generi geometrici 1.

Vogliamo ora classificare le superficie possedenti un fascio di curve ellittiche C.

Un primo carattere di tali superficie, che designeremo col nome di *determinante* d di esse, è il minimo numero di punti in cui una curva K, non composta colle C del fascio, incontra le C, cioè l'*ordine del minimo gruppo di punti costruibili sopra ogni* C del fascio mediante operazioni razionali ed operazioni irrazionali non dipendenti dal parametro delle C.

Vi sono superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ $(p_g P_{12} \neq 1)$, *per cui il determinante ha un valore intero arbitrario*:

$$d = 1, 2, 3 \ldots$$

Ciò risulta già dalla costruzione delle superficie di genere $p_a = -1$. Questi esempii provano che « l'ordine minimo d'un gruppo di punti, costruibile sopra una curva ellittica non può generalmente essere abbassato al disotto dell'ordine della curva, *senza introdurre irrazionalità* dipendenti dai coefficienti dell'equazione della curva » ([1]).

Si possono costruire altri esempii di superficie per cui $p^{(1)} = 1$, e d assume un valore arbitrariamente alto.

Si consideri p. es. un cono cubico F_3 e le sezioni di esso coi piani per una retta a. Sopra una generica di queste cubiche si può determinare un gruppo di 9 punti base per un fascio di curve d'ordine $3n$ con 9 punti $n$pli (fascio di Halphen); tale costruzione dipende dalla divisione dell'argomento delle funzioni ellittiche appartenenti alla cubica, e perciò riesce razionale rispetto al parametro del piano per a. Si deduce la costruzione razionale in ogni piano, per a, di una curva d'ordine $3n$ con 9 punti $n$pli, variabili su 9 rette distinte.

Codesta curva descrive in generale una superficie non riducibile alla famiglia delle rigate, per cui il genere lineare $p^{(1)} = 1$ e il determinante $d = n$. Si riconosce, infatti, che il determinante non può essere $< n$ se il fascio delle C_{3n} contiene (come avverrà generalmente) delle cubiche contate n volte.

7. *Ad ogni superficie* F^d *con un fascio di curve ellittiche* $C(p^{(1)} = 1)$, *di determinante* d, *si può far corrispondere una superficie di determinante* 1 *la quale possegga un fascio (dello stesso genere) di curve birazionalmente identiche alle* C.

([1]) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*, in Rendiconti Accad. Lincei, 7 gennaio 1912.

A tale scopo basta infatti costruire la superficie F' i cui punti corrispondono alle serie g_n^{n-1} appartenenti alle C di F^d, codeste serie venendo prese come « elementi » di una varietà ∞^2.

Tale costruzione è stata già indicata nella mia citata Nota *Sulla superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*.

Fra le superficie F^d, F', intercede una *corrispondenza algebrica* $[d, d]$, in cui si corrispondono le curve ellittiche birazionalmente identiche.

Infatti si considerino su F^d, F', due generiche curve ellittiche omologhe C, K, e: su F^d una curva L secante la C in un gruppo G di d punti; su F' la curva L' unisecante K nel punto che rappresenta la g_d^{d-1} di C, definita da G_d. Se a questo punto di K si fa corrispondere uno, P, fra i d punti di G_d, resta determinata razionalmente fra K e C *una* corrispondenza biunivoca, perchè ogni punto di C, associato al gruppo dei $d-1$ punti $G_d - P$, dà un gruppo di d punti, a cui corrisponde — per costruzione — un punto di K.

In tal guisa si hanno appunto d corrispondenze biunivoche fra K, C, le quali non possono essere razionalmente staccate al variare del parametro da cui dipendono le curve K e C nei rispettivi fasci. Si ha dunque, fra K, C e fra F', F^d, una corrispondenza algebrica $[d, d]$.

Sono in generale curve di coincidenza di questa corrispondenza sulla F' le curve K dotate d'un punto doppio; sulla F^d sono parimente curve di coincidenza le C dotate d'un punto doppio (corrispondenti alle nominate K), ma anche le curve C che si riducono a curve *ellittiche multiple*, curve da contarsi un certo numero s di volte, dove s è un divisore di d. Così restano fissate anche le curve di diramazione della corrispondenza $[d, d]$ fra F', F^d; e si possono quindi dedurre i caratteri della seconda superficie da quelli della prima.

Le superficie F', F^d di genere lineare $p^{(1)} = 1$ hanno il medesimo invariante di Zeuthen-Segre (corrispondendosi le C, K dotate di punto doppio), e quindi il medesimo genere numerico p_a; esse hanno la stessa irregolarità (che è, per $p_a > -1$, il genere del fascio di curve ellittiche), e perciò lo stesso genere geometrico p_g. Ma i loro plurigeneri non sono necessariamente uguali.

Consideriamo, per semplicità, il caso delle superficie regolari

$$p_a = p_g = p\,.$$

Sulla F' il sistema canonico è costituito dai gruppi di $p-1$ curve ellittiche K, senza parti fisse: quindi

$$P_i = i(p-1) + 1\,.$$

Invece la F^d potrà possedere delle curve ellittiche multiple secondo numeri s (> 1) divisori di d; ed è facile verificare che ognuna di queste

curve, θ, contata $s-1$ volte, costituisce una parte fissa del sistema canonico, da aggiungersi alle $p-1$ curve C variabili: si deduce, quindi,

$$P_i = i(p-1) + \sum \left[\frac{i(s-1)}{s}\right] + 1 .$$

Ciò risulta dal fatto che la θ è curva di coincidenza, e non di diramazione, per la corrispondenza $[d, d]$ fra F^d, F' (1); oppure mediante la costruzione del sistema canonico di F^d, a partire da una rete contenente il fascio (C) (2).

La curiosa circostanza che i plurigeneri possano così assumere diversi valori in confronto al genere, è stata già segnalata nello studio dei piani doppî di genere lineare $p^{(1)}=1$, che costituiscono le superficie regolari di determinante 2 (3).

Matematica. — *Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale.* Nota II di Emma Sciolette, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella Nota I ho detto che il quesito relativo alla dipendenza o no della condizione VI dalle precedenti, nella definizione d'integrale data da Lebesgue (4), comprende due parti: la parte α) relativa alla delimitazione del campo delle funzioni integrabili; la parte β) relativa a una proprietà dell'operazione « integrale ».

Esaurita la questione della parte α) in favore della indipendenza, rimane da esaminare la parte β), quella che, in altri termini, afferma la formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \tag{1}$$

[essendo $f(x)$ la funzione limite della successione crescente di funzioni $f_n(x)$, ciascuna integrabile] quando $f(x)$ è integrabile compatibilmente a quanto è stato detto relativamente alla parte α) della VI.

(1) Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, in Rendiconti Istituto lombardo, ser. II, vol. XXXVI, pag. 495.

(2) Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, in Atti Accad. Torino (1901).

(3) Enriques, *Sui piani doppî di genere lineare $p^{(1)}=1$"*, in Rendiconti Accad. Lincei (1898).

(4) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* Paris, Gauthier-Villars, 1904, cap. XII, pag. 99.

Per l'integrale di Riemann, sùbito si riconosce che esso si può ricavare dalle sole condizioni I-V [1]. Non già che ogni operazione definita dalle I-V sia l'integrale di Riemann (perchè, come risulta da ciò che segue, le I-V definiscono un'operazione più generale); ma dalle I-V si ricava un'operazione tale che nel campo Riemanniano (cioè per le funzioni integrabili R) coincide con l'integrale di Riemann. Ora, poichè il teorema di Arzelà afferma che « ogni volta che la funzione limite è integrabile R, la formula (1) è verificata », ciò basta per dedurre che nel campo Riemanniano la parte β) della VI dipende dalle altre.

Per altro, essa potrebbe essere necessaria a definire l'integrale di Lebesgue.

Lebesgue fa risalire la teoria dell'integrazione alla teoria della misura; noi seguiremo per brevità la stessa via.

Si dimostra, infatti, in base alle prime cinque condizioni, che il problema dell'integrazione di una funzione qualunque è risoluto quando si sa integrare una funzione che assume il valore 1 nei punti di un insieme E e il valore 0 nei punti dell'insieme complementare: l'integrale di una tale funzione essendo definito come la misura dell'insieme E.

Ora i postulati dell'integrazione, tradotti in postulati della misura, dicono:

I. La misura della somma di due insiemi non aventi punti in comune è uguale alla somma delle misure.

II. La misura di un insieme è sempre ≥ 0.

III. Trasportando rigidamente un insieme, la sua misura resta inalterata.

IV. La misura di un intervallo è uguale alla sua lunghezza.

L'ultimo postulato, equivalente alla parte β) dell'ultimo postulato dell'integrale, è il seguente:

L'insieme somma di un'infinità numerabile di insiemi (misurabili), *ha per misura la somma delle misure.*

[1] Infatti, possiamo dire brevemente così: Data la funzione $f(x)$ e considerato l'intervallo d'integrazione (a, b) diviso in tanti intervalli parziali, la proprietà IV ci dice che l'integrale di $f(x)$ in (a, b) sarà uguale alla somma degli integrali nei singoli intervalli. Ora integrando in ciascuno di questi intervalli invece della $f(x)$, una volta il limite superiore, una volta il limite inferiore, per la proprietà II, l'integrale di $f(x)$ deve essere compreso fra questi altri due integrali: questi essendo definiti dalla proprietà V.

Facendo variare in un modo qualunque la ripartizione di (a, b) il valore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ varierà in modo da mantenersi sempre superiore a quello di $f(x)$, e l'integrale relativo al limite inferiore varierà invece in modo da mantenersi sempre inferiore a quello di $f(x)$. È chiaro che se il limite inferiore dell'integrale relativo al limite superiore di $f(x)$ è uguale al limite superiore dell'integrale relativo al limite inferiore di $f(x)$, questo limite comune sarà l'integrale di $f(x)$. È la stessa condizione d'integrabilità Riemanniana.

Allora la ricerca è ridotta a quella di vedere se ogni *misura* costruita in base ai primi quattro postulati, soddisfa necessariamente anche l'ultimo, e se quindi coincide con la misura di Jordan per gli insiemi misurabili J e con quella di Borel-Lebesgue per gli insiemi misurabili B, L.

Le mie ricerche sono relative specialmente a questo punto.

Consideriamo prima un insieme misurabile J. Le condizioni I e IV affermano che « la misura della somma di un numero finito di intervalli finiti senza punti in comune è uguale alla somma delle lunghezze »; e dalla III si ottiene che « se un insieme è contenuto in un altro, la sua misura non può essere maggiore della misura dell'altro ».

Ciò basta per poter facilmente dedurre che *la misura di un insieme misurabile* J *è proprio la sua misura* J.

Per un insieme misurabile B la verifica non è ugualmente facile. Affrontando anzi il quesito in generale, come per gli insiemi misurabili J, non mi è stato possibile risolverlo. Invece, prendendo a esaminare insiemi particolari (misurabili B) ho potuto ottenere (in base sempre ai primi quattro postulati) una misura che coincide con quella di Borel-Lebesgue, quindi un risultato che, se non è generale, è però sufficiente ad assicurare la dipendenza della formula (1) nei casi più notevoli.

Consideriamo l'insieme dei numeri razionali R che è un insieme misurabile B e di misura nulla e ad esso applichiamo convenientemente i primi quattro postulati della misura.

Dalle condizioni II e IV ricaviamo, chiamando M(R) questa misura,

$$M(R) \geq 1 , \tag{2}$$

se (0, 1) è l'intervallo d'integrazione.

Mediante una traslazione di ampiezza δ incommensurabile coi numeri razionali, si possono trasportare i punti razionali $\frac{p}{q}$ sopra i punti irrazionali $\frac{p}{q} + \delta$, ottenendo un insieme il quale:

a) avrà (in virtù della III) una misura uguale alla misura dell'insieme dato;

b) sarà limitato nell'intervallo $(\delta , 1 + \delta)$: o meglio, se vogliamo supporre il segmento (0, 1) chiuso su sè stesso, si può dire che quelli tra i punti di R che per la traslazione esorbitano dall'intervallo (0, 1) [sarebbero i punti razionali compresi nell'intervallo $(1 - \delta , 1)$] vanno ad occupare l'intervallo $(0 , 0 + \delta)$ rimasto vuoto, con che il nuovo insieme rimane ancora limitato nell'intervallo (0, 1);

c) non avrà nessun punto in comune con l'insieme primitivo (la ragione è ovvia).

Ciò posto, sia S_1 l'insieme somma dei due insiemi, il quale sarà ancora limitato, per quanto è stato detto, nell'intervallo $(0, 1)$.

Per la I, avremo:

$$M(S_1) = 2\,M(R)\,;$$

e, con deduzioni analoghe a quelle per cui si è scritta la (2),

$$2\,M(R) \leq 1\,. \tag{3}$$

Questa costruzione di un insieme uguale all'insieme dato R si può ripetere in un'infinità numerabile di modi differenti, prendendo l'ampiezza di traslazione δ uguale successivamente ai valori $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, ciascuno dei quali sia irrazionale e quindi incommensurabile coi numeri razionali; non solo ma bensì sia incommensurabile con tutti i valori δ di rango inferiore. Con ciò si viene a costruire un'infinità numerabile di insiemi R_1, $R_2, R_3, \ldots$ ciascuno dei quali gode della proprietà *a*), *b*), *c*) rispetto all'insieme dato R e rispetto a tutti gli altri insiemi costruiti.

Sia ora S_n l'insieme somma degli n insiemi $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$, il quale sarà ancora limitato in $(0, 1)$. Si può scrivere la relazione analoga alla (2) e alla (3):

$$M(R)\cdot n \leq 1\,. \tag{4}$$

Essendo questa formula vera per qualunque valore di n crescente deve necessariamente essere

$$M(R) = 0\,. \tag{5}$$

Dunque, per l'insieme dei numeri razionali la misura Borel-Lebesgue è definita dai primi quattro postulati, l'ultimo risultando quindi come conseguenza dei precedenti.

Ma si può dire anche di più.

Sia Ω un qualunque insieme numerabile di punti

$$e_1, e_2, e_3, \ldots$$

e indichiamo con $d_{p,q}$ la distanza di un qualunque elemento e_p da un altro qualunque elemento e_q. Queste distanze sono tante quante sono le coppie (e_p, e_q): quindi formano un insieme numerabile. Allora si può scegliere un numero reale δ_1 diverso da ogni $d_{p,q}$, e imprimere a Ω la traslazione δ_1, (anche questa volta operando sull'intervallo $(0,1)$ considerato come chiuso su sè stesso) ottenendo un insieme Ω' che soddisferà evidentemente alle condizioni *a*), *b*) e *c*).

Chiamiamo ancora S_1 l'insieme somma di Ω con Ω'; essendo anche questo insieme numerabile, saranno numerabili anche le mutue distanze $d'_{p,q}$ di due qualunque dei suoi elementi.

Scegliendo un δ_2 diverso da ogni $d'_{p,q}$ e imprimendo a S_1 la traslazione δ_2, si otterrà un insieme S'_1 che godrà anch'esso delle proprietà *a*), *b*) e *c*) rispetto all'insieme S_1. Chiamiamo S_2 l'insieme somma di S_1 con S'_1, e procediamo in modo analogo alla costruzione degli insiemi $S_3, S_4 \ldots$

Avremo le formule:

$$M(\Omega) \leq 1$$

$$M(S_1) = 2M(\Omega) \leq 1$$

$$M(S_2) = 2M(S_1) = 4M(\Omega) \leq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M(S_n) = 2^n M(\Omega) \leq 1 .$$

L'ultima di queste formule dimostra, anche in questo caso di un insieme numerabile qualunque, che la misura è nulla e che coincide quindi con quella di Borel-Lebesgue.

Questo risultato, in virtù della I, si estende immediatamente anche agli insiemi che sono complementari di insiemi numerabili.

Onde, conchiudendo, si può dire:

« La parte *β*) della condizione VI è *dipendente* dalle altre non solo « tutte le volte che si tratta di integrale di Riemann, ma anche quando, « fuori del campo Riemanniano, le funzioni da integrare hanno per insiemi « associati (chiamando così quegli insiemi dalla cui misura discende l'in- « tegrale) insiemi misurabili J, o insiemi numerabili, o insiemi comple- « mentari di insiemi numerabili, essendo la misura di tali insiemi univo- « camente definite dai primi quattro postulati ».

Terminiamo citando, come esempio di integrale così definito, l'integrale della funzione di Dirichlet che assume il valore 0 in tutti i punti irrazionali e il valore 1 in tutti i punti razionali.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota I di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Profittando di alcune considerazioni, svolte in una mia recente Nota [1], si può, data un'equazione integrale di prima specie

$$\int_a^b K(x\,,y)\,F(y)\,dy = f(x)\,, \tag{1}$$

in cui $K(x\,,y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue [2], e per la quale esista almeno una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, costruire una funzione

$$\Phi(x\,,g(x))\,, \tag{2}$$

definita *quasi da per tutto* [3] nell'intervallo $(a\,,b)$, dipendente da una funzione arbitraria $g(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, in modo che, comunque si assegni $g(x)$, la (2) rappresenti una soluzione della (1), sommabile insieme col suo quadrato, e che, inversamente, ogni soluzione così fatta sia dalla (2) rappresentata per una conveniente scelta della $g(x)$ medesima.

Indicando con

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots,\lambda_n\,,\ldots \tag{3}$$

la successione delle costanti del nucleo $K(x\,,y)$, e con

$$\varphi_1(x)\,,\varphi_2(x)\,,\ldots,\varphi_n(x)\,,\ldots \tag{4}$$

$$\psi_1(x)\,,\psi_2(x)\,,\ldots,\psi_n(x)\,,\ldots\,, \tag{5}$$

la successione delle coppie di funzioni ortogonali dello stesso nucleo, per le quali risultano soddisfatte le equazioni coniugate, simultanee,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x\,,y)\,\psi(y)\,dy$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(y\,,x)\,\varphi(y)\,dy \quad [4],$$

[1] *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVI, 2° semestre 1913.

[2] L'ipotesi che le funzioni $K(x\,,y)$ ed $f(x)$ siano continue, potrebbe sostituirsi con altre più generali.

[3] Dicendo *quasi da per tutto,* intendiamo, come si suole da varî autori, che possano, al più, fare eccezione i punti di un insieme di misura nulla. Da tali insiemi si farà generalmente astrazione, considerandosi come identiche due funzioni eguali quasi da per tutto. In questo senso sono talvolta da riguardare le eguaglianze, che seguono nel testo.

[4] Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen,* Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, pag. 461.

condizione necessaria e sufficiente, affinchè la soluzione della (1) sia unica, è che sia chiuso il sistema delle funzioni ortogonali (5). In tal caso la (2) risulta indipendente dalla $g(x)$, e, per rappresentare l'unica soluzione, conviene in particolare porre $g(x) = 0$, con che la (2) assume la forma più semplice.

Della costruzione della (2), che può ben dirsi rappresenti la *soluzione generale* dell'equazione (1), mi propongo di occuparmi in questa Nota.

1. È noto ([5]) che, *se il sistema delle funzioni ortogonali* (4) *è chiuso, condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie*

$$(6) \qquad \Sigma_n \lambda_n^2 a_n^2 \quad , \quad a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx\,.$$

È noto ancora ([6]), che, *se il sistema delle funzioni ortogonali* (4) *non è chiuso, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie* (6), *e che, di più, si abbia:*

$$(7) \qquad f(x) = \Sigma_n a_n \varphi_n(x) \quad , \quad a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx\,.$$

Delle due condizioni contemplate in quest'ultimo teorema, la seconda è una conseguenza della prima, se il sistema delle funzioni ortogonali (4) è chiuso: giacchè, tenuto conto delle eguaglianze,

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = \lambda_n \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\, \psi_n(y)\, dy \\ \psi_n(x) = \lambda_n \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}(y\,,x)\, \varphi_n(y)\, dy\,, \end{cases} \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots)$$

dalla convergenza della (6) segue, per un noto teorema di Schmidt ([7]), la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\Sigma_n a_n \varphi_n(x)$, e quindi la (7) ([8]).

Il primo teorema è pertanto contenuto nel secondo, del quale solo conviene che ci occupiamo.

([5]) Cfr. E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX (1910), pag. 79, § 4.

([6]) Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di prima specie*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVIII, ser. 5ª, 2º sem., fasc. 3º (1909), § 2.

([7]) Cfr. E. Schmidt, loc. cit. ([4]), § 2.

([8]) Cfr. C. Severini, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, serie V, vol. III (1910), Memoria XI, § 5.

Posto che l'equazione (1) ammetta una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, si ha (⁹):

$$a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x,y)\,F(y)\,\varphi_n(x)\,dx\,dy \qquad (n=1,2,\dots),$$

e, per la seconda delle (8),

$$\lambda_n a_n = \int_a^b F(y)\,\psi_n(y)\,dy \qquad (n=1,2,\dots),$$

donde, coincidendo le quantità $\lambda_n a_n$ coi coefficienti di Fourier della $F(y)$ rispetto al sistema delle funzioni ortogonali (5), segue la convergenza della serie (6). Inoltre, per un noto teorema di Schmidt (¹⁰), deve sussistere la (7).

Inversamente, poichè

$$\int_a^b \left[\sum_m^{m+p}{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x)\right]^2 dx = \sum_m^{m+p}{}_n \lambda_n^2 a_n^2,$$

dalla convergenza della (6) si deduce che la successione

$$S_m(x) = \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x) \qquad (m=1,2,\dots) \tag{9}$$

converge in media nell'intervallo (a, b), ed esiste quindi una funzione $F_1(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, unica e ben determinata, se si eccettuino i punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b \left[F_1(x) - \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(x)\right]^2 dx = 0 \text{ (}^{11}\text{)}.$$

Se ne deduce, applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b K(x,y)\left[F_1(y) - \sum_1^m{}_n \lambda_n a_n \psi_n(y)\right] dy = 0,$$

cioè

$$\int_a^b K(x,y)\,F_1(y)\,dy = \sum{}_n \lambda_n a_n \int_a^b K(x,y)\,\psi_n(y)\,dy,$$

(⁹) Cfr. E. Picard, loc. cit. (⁶), § 5.

(¹⁰) Cfr. E. Schmidt, loc. cit. (⁴), § 16.

(¹¹) Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris), tome CXLIV, 1er sem. 1907, pp. 1022-1024. Cfr. anche H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten*, Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245; F. Riesz, *Ueber orthogonale Funktionensysteme*, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse, Jahrgang, 1907, pp. 116-122.

e, per le (8),

$$\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\,\mathrm{F}_1(y)\,dy = \sum_n a_n\,\varphi_n(x)\,,$$

donde, se è verificata la (7), risulta in fine:

$$\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\,\mathrm{F}_1(y)\,dy = f(x)\,.$$

2. Poichè, come è stato dianzi osservato, dalla convergenza della (6) segue la convergenza assoluta ed uniforme della serie $\sum_n a_n\,\varphi_n(x)$, la condizione espressa dalla (7) può sostituirsi coll'altra che sia

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_1^m {}_n\, a_n\,\varphi_n(x) \right]^2 dx = 0\,,$$

cioè

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_n a_n^2\ (^{12}).$$

Si ha così il teorema:

Affinchè l'equazione (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è necessario e sufficiente che converga la serie* (6), *e che la* $f(x)$ *soddisfi all'equazione di chiusura del sistema delle funzioni ortogonali* (4):

$$(10)\qquad \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_n a_n^2 \quad , \quad a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,.$$

Ancora, se si ricorda [13] che la condizione espressa dalla (10) equivale all'altra che si abbia:

$$(11)\qquad \int_a^b f(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(12)\qquad \int_a^b \theta(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots),$$

può dirsi [14]:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione (1) *ammetta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, è che converga la serie* (6), *e risulti verificata la* (11), *per ogni soluzione effettiva delle equazioni integrali* (12).

[12] Cfr. C. Severini, loc. cit. [8], § 3.

[13] Cfr. G. Lauricella, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIX, 1° sem. 1910, pp. 155-163, §§ 2, 3.

[14] Cfr. G. Lauricella, loc. cit. [6], § 3.

3. Della soluzione $F_1(x)$, alla quale, nelle ipotesi sopra dette, converge in media la (9), può darsi una rappresentazione analitica, mediante la serie [15]

(13) $$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)],$$

ove

$$U_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\,dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e

(14) $$h_1, h_2, \ldots, h_\nu, \ldots$$

è una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero.

Inoltre, essendo $g(x)$ una funzione qualsivoglia, sommabile insieme col suo quadrato, la serie

(15) $$G(x) = g(x) - V_1(x) - \sum_\nu [V_{\nu+1}(x) - V_\nu(x)],$$

ove

$$V_\nu(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\,dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

se non è (quasi da per tutto) eguale a zero nell'intervallo (a, b), rappresenta una soluzione effettiva delle equazioni integrali

(16) $$\int_a^b \eta(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0 \text{ [16]} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

cioè dell'equazione

(17) $$\int_a^b K(x, y)\,\eta(y)\,dy = 0 \text{ [17]},$$

e, aggiunta alla $F_1(x)$, fornisce una nuova soluzione $F_1(x) + G(x)$ della (1).

Importa notare che la funzione $G(x)$ non dipende dalla scelta della (14), che cioè, considerando un'altra successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero,

$$h'_1, h'_2, \ldots, h'_\nu, \ldots,$$

e ponendo

$$G'(x) = g(x) - V'_1(x) - \sum_\nu [V'_{\nu+1}(x) - V'_\nu(x)],$$

ove

$$V'_\nu(x) = \sum_n \frac{b_n}{2h'_\nu} \int_{x-h'_\nu}^{x+h'_\nu} \psi_n(x)\,dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

[15] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 5.
[16] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 9.
[17] Cfr. E. Schmidt, loc. cit. [4] § 16.

risulta:

$$G(x) = G'(x)$$ [18].

Se $g(x)$ è essa stessa una soluzione delle equazioni integrali (16), si ha:

$$G(x) = g(x),$$

essendo allora:

$$b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, ...);$$

ed infine, se il sistema delle funzioni ortogonali (5) è chiuso, nel qual caso la (1) ammette un'unica soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, risulta sempre:

$$G(x) = 0.$$

All'equazione (1) soddisfa pertanto in ogni caso, comunque si scelga $g(x)$, la

$$F_1(x) + G(x), \tag{18}$$

ed è evidente che così si ottengono tutte le soluzioni della (1), sommabili insieme coi loro quadrati.

La (18) rappresenta dunque la *soluzione generale* della (1), e si può enunciare il seguente teorema:

Quando sono soddisfatte le condizioni occorrenti, indicate nei teoremi sopra enunciati (§§ 1, 2), *la soluzione generale dell'equazione* (1) *è rappresentata dalla serie*

$$g(x) + W_1(x) + \sum_\nu [W_{\nu+1}(x) - W_\nu(x)], \tag{19}$$

ove

$$W_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n a_n - b_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x)\, dx,$$

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx \quad , \quad b_n = \int_a^b g(x)\, \psi_n(x)\, dx,$$

$g(x)$ *essendo una funzione arbitraria, sommabile insieme col suo quadrato,* ed

$$h_1, h_2, \ldots, h_\nu, \ldots$$

una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero [19].

4. La (19) si semplifica, se la serie $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$ converge (quasi da per tutto) nell'intervallo (a, b). Notevole è il seguente corollario [20]:

[18] Cfr. C. Severini, loc. cit. [1], § 5.

[19] Cfr. G. Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 12 (1908), § 6_1.

[20] Cfr. G. Lauricella, loc. cit. 19), § 4_1.

Sotto le condizioni indicate nei teoremi enunciati in principio (§§ 1, 2), *la serie* $\sum_n \lambda_n a_n \psi_n(x)$, *supposta convergente (quasi da per tutto) nell'intervallo* (a, b), *rappresenta una soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, dell'equazione* (1); *è in particolare l'unica soluzione, se il sistema delle funzioni ortogonali* (5) *è chiuso.*

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota II di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Nel terminare la mia Nota precedente su questo argomento [1] ho accennato all'incrudimento che si verifica in un filo di rame il quale venga per la prima volta cimentato a trazione, ed al conseguente diverso comportamento che esso presenta se si ripetono, in successo di tempo, le medesime condizioni di carico.

Ho cercato allora di chiarire la natura di questo fenomeno riproducendo, a lato del diagramma che rappresenta l'andamento delle esperienze ivi descritte, un altro diagramma relativo ad alcune esperienze da me eseguite negli ultimi giorni dello scorso dicembre rinnovando identicamente sul medesimo spezzone le condizioni di carico già realizzate la prima volta nei giorni 15 e 16 del precedente febbraio. A più completa documentazione del caratteristico confronto, credo non inutile riportare ora, nella prima tabella qui allegata, i risultati così ottenuti, insieme con pochi altri i quali si riferiscono ad un ciclo di deformazione osservato facendo variare periodicamente il carico applicato allo stesso spezzone fra un massimo di 1200 ed un minimo di 200 kgr.

Tale ciclo (che si trova rappresentato, in scala maggiore di quella usata l'altra volta, nella fig. 1, insieme colle due linee di ascesa da 0 a 1200 kgr. e di discesa da 200 a 0, le quali valgono a precisarne la posizione rispetto agli assi coordinati) si è rivelato notevolmente stabile: si è potuto infatti descriverlo più volte di seguito senza che si ottenessero, da una volta all'altra, differenze sensibili nelle singole letture: non solo, ma si è potuto anche assodare che le curve di deformazione relative a variazioni cicliche della forza applicata non oltrepassanti i limiti di esso constavano di cicli alla lor volta chiusi e tutti contenuti nell'interno del primo.

Questa proprietà, che mi si è ripetutamente presentata come caratteristica dei cicli chiusi, può venire meglio precisata se messa in relazione

[1] Presentata, per la pubblicazione in questi Rendiconti, nella seduta del 1° febbraio 1914.

con alcune altre osservazioni che io avevo avuto, poco tempo innanzi, occasione di fare operando su di un altro spezzone del solito filo.

Questo era stato assoggettato ad un carico che, raggiunti in pochi minuti i 2500 kgr., si era poi mantenuto sensibilmente costante per circa 60 ore consecutive: dopo averlo lasciato, circa altrettanto, sotto l'azione di un carico di soli 200 kgr., io potei constatare, in una prova preliminare

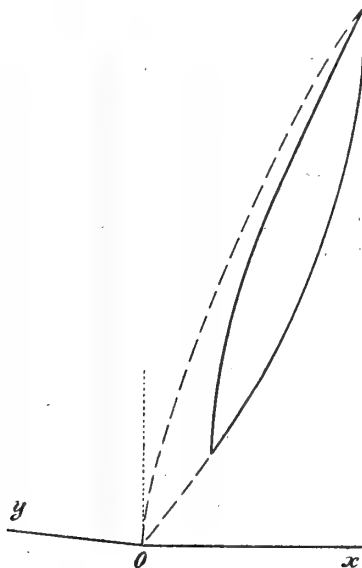



Fig. 1.

eseguita il 24 novembre, che un incremento transitorio di 1000 kgr. nell'intensità dello sforzo applicato non lasciava traccia alcuna di deformazioni residue. Il ciclo di deformazione, corrispondente al passaggio del carico da 200 a 1200 kgr. e viceversa, venne rilevato con ogni cura il giorno seguente insieme con due altri cicli di minore ampiezza, corrispondenti rispettivamente a carichi varianti tra 200 ed 800 kgr. e tra 1200 e 600. Le osservazioni fatte in quell'occasione (rappresentate col solito metodo nella fig. 2), insieme con quelle eseguite il 26 novembre intercalando (come è indicato nella fig. 3) nel solito ciclo di massima ampiezza varii piccoli cicli corrispondenti a variazioni di soli 100 kgr. di sforzo, si trovano dettagliatamente riferite nella tabella riprodotta alla fine di questa Nota.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
30 dicembre	15	0	853	—	1489	—	—	0	—
"		100	960	+107	1620	+131	+238	238	+2.38
"		200	1079	+119	1742	+122	+241	479	+ 2.41
"		400	1308	+229	2000	+258	+487	966	+ 2.43
"		600	1536	+228	2259	+259	+487	1453	+ 2.44
"		800	1768	+232	2520	+261	+493	1946	+ 2.46
"		**1000**	2001	+233	2780	+260	+493	2439	+ 2.47
"		900	1886	— 115	2664	— 116	— 231	2208	— 2.31
"		800	1777	— 109	2539	— 125	— 234	1974	— 2.34
"		600	1552	— 225	2284	— 255	— 480	1494	— 2.40
"		400	1327	— 225	2021	— 263	— 488	1006	— 2.44
"		200	1100	— 227	1749	— 272	— 499	507	— 2.49
"		0	855	— 245	1485	— 264	— 509	— 2	— 2.55
31 "	10	0	850	— 5	1490	+ 5	0	— 2	—
"		100	957	+107	1621	+131	+238	236	+2.38
"		200	1073	+116	1748	+127	+243	479	+ 2.43
"		400	1300	+227	2008	+260	+487	966	+ 2.44
"		600	1530	+230	2268	+260	+490	1456	+ 2.45
"		800	1764	+234	2526	+258	+492	1948	+ 2.46
"		1000	1998	+234	2784	+258	+492	2440	+ 2.46
"		1200	2238	+240	3046	+262	+502	2942	+ 2.51
"		1400	2480	+242	3310	+264	+506	3448	+ 2.53
"		**1600**	2726	+246	3575	+265	+511	3959	+ 2.55
"		1500	2608	— 118	3462	— 113	— 231	3728	— 2.31
"		1400	2499	— 109	3335	— 127	— 236	3492	— 2.36
"		1200	2264	— 235	3091	— 244	— 479	3013	— 2.39
"		1000	2032	— 232	2838	— 253	— 485	2528	— 2.42
"		800	1801	— 231	2581	— 257	— 488	2040	— 2.44
"		600	1570	— 231	2322	— 259	— 490	1550	— 2.45
"		400	1340	— 230	2058	— 264	— 494	1056	— 2.47
"		200	1111	— 229	1781	— 277	— 506	550	— 2.53
"		0	860	— 251	1500	— 281	— 532	18	— 2.66
"	$14^1/_2$	0	850	— 10	1492	— 8	— 18	0	—
"		**1200**	2242	—	3041	—	—	2941	—
"		1100	2124	— 118	2928	— 113	— 231	2710	— 2.31
"		1000	2013	— 111	2799	— 129	— 240	2470	— 2.40
"		800	1782	— 231	2549	— 250	— 481	1989	— 2.41
"		600	1554	— 228	2290	— 259	— 487	1502	— 2.43

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
31 dicembre		400	1327	— 227	2027	— 263	— 490	1012	— 2.45
»		200	1098	— 229	1752	— 275	— 504	508	— 2.52
»		300	1206	+ 108	1880	+ 128	+ 236	744	+ 2.36
»		400	1319	+ 113	2007	+ 127	+ 240	984	+ 2.40
»		600	1540	+ 221	2267	+ 260	+ 481	1465	+ 2.41
»		800	1779	+ 239	2519	+ 252	+ 491	1956	+ 2.45
»		1000	2012	+ 233	2779	+ 260	+ 493	2449	+ 2.46
»		1200	2249	+ 237	3035	+ 256	+ 493	2942	+ 2.47
»		0	850	—	1488	—	—	— 4	—

Esse provano, in modo costante ed affatto generale, che ogni linea di deformazione che parte da un punto di regresso tende a chiudere il ciclo

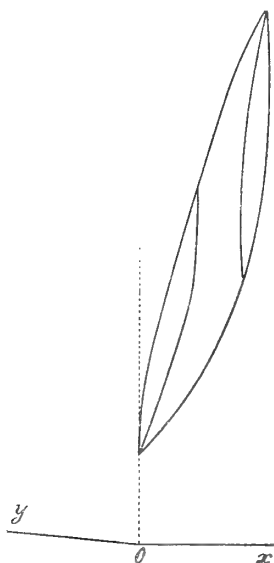
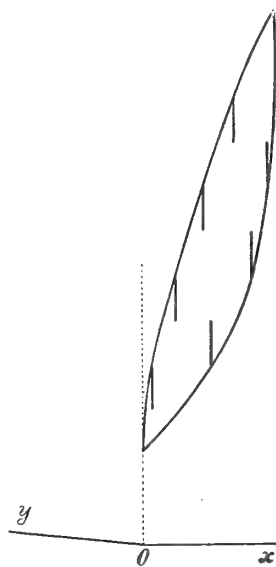



Fig. 1. Fig. 2.

prolungandosi fino al punto di regresso immediatamente precedente: le linee discendenti rimanendo in ogni caso tutte al di sotto della ascendente precedentemente seguìta, le ascendenti tutte al disopra della discendente precedentemente seguìta. In particolare, esse mettono in rilievo la diversa legge di deformazione di un corpo il quale, sottoposto all'azione di un dato carico,

risenta l'impulso di una nuova forza, a seconda che la variazione attuale del carico riesce dello stesso segno di quella che l'ha immediatamente preceduta ovvero di segno contrario, avendosi in questo caso una variazione di dimensioni più piccola che nel primo, ed accentuandosi la differenza col crescere dell'ampiezza della variazione precedente: dove bisogna però tener presente che sono da considerarsi come non avvenute tutte quelle variazioni di carico che, separatamente o nel loro complesso, hanno carattere ciclico in quanto esse, a ciclo compiuto, lasciano il materiale nelle condizioni in cui l'hanno trovato.

Ma mentre il modo di deformarsi del materiale si mostra così strettamente legato alla legge seguìta nell'applicazione del carico, esso si presenta poi praticamente indipendente dalla intensità del carico stesso se si ha l'avvertenza di mettersi ai diversi carichi in condizioni analoghe eseguendo le misure immediatamente dopo aver invertito il senso di variazione delle forze. Le differenze tra i varii valori del modulo di elasticità rilevati immediatamente appresso ad ogni punto di regresso si mantengono infatti, in queste esperienze, entro limiti così ristretti (1) da far pensare alla possibilità di assumere, almeno in via di approssimazione, quel modulo così valutato come una costante caratteristica del materiale.

Quel che è certo si è che il fenomeno della deformazione del rame, in generale così profondamente discorde dalle ipotesi della teoria dell'elasticità, si presenta ad esse ipotesi praticamente conforme sempre e soltanto quando si descrivano cicli di piccolissima ampiezza attorno ad un valore, entro certi limiti, affatto qualunque del carico.

(1) Ed invero in 26 misure eseguite, sotto carichi diversi, ma tutte immediatamente appresso ad una inversione nel senso di variazione del carico, nelle esperienze del 25 e 26 novembre, si sono ottenuti valori dell'incremento della deformazione per unità di incremento dello sforzo tra il massimo ed il minimo dei quali intercede una differenza del 2 % soltanto; la differenza tra i due valori dello stesso incremento misurati in corrispondenza del vertice inferiore del solito ciclo di massima ampiezza rispettivamente all'inizio della linea ascendente ed al termine della linea discendente che lo compongono supera invece, in valor relativo, il 7 %.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
24 novembre	16	200	...	...	...	...	...	...	...
"		**1200**	...	...	...	...	...	...	...
"		200	...	...	...	...	...	...	...
25 "	11	200	315	—	1890	—	—	0	—
"		300	444	+ 129	2008	+ 118	+ 247	247	+ 2.47
"		400	574	+ 130	2130	+ 122	+ 252	499	+ 2.52
"		600	831	+ 257	2379	+ 249	+ 506	1005	+ 2.53
"		**800**	1087	+ 256	2630	+ 251	+ 507	1512	+ 2.54
"		700	961	— 126	2510	— 120	— 246	1266	— 2.46
"		600	837	— 124	2386	— 124	— 248	1018	— 2.48
"		400	579	— 258	2136	— 250	— 508	510	— 2.54
"		200	317	— 262	1886	— 250	— 512	— 2	— 2.56
"	14	200	317	0	1886	0	0	— 2	—
"		300	447	+ 130	2004	+ 118	+ 248	246	+ 2.48
"		400	576	+ 129	2128	+ 124	+ 253	499	+ 2.53
"		600	834	+ 258	2377	+ 249	+ 507	1006	+ 2.53
"		800	1090	+ 256	2629	+ 252	+ 508	1514	+ 2.54
"		1000	1344	+ 254	2883	+ 254	+ 508	2022	+ 2.54
"		**1200**	1603	+ 259	3140	+ 2 57	+ 516	2538	+ 2.58
"		1100	1479	— 124	3020	— 120	— 244	2294	— 2.44
"		1000	1353	— 126	2900	— 120	— 246	2048	— 2.46
"		800	1101	— 252	2652	— 248	— 500	1548	— 2.50
"		600	847	— 254	2402	— 250	— 504	1044	— 2.52
"		400	585	— 262	2150	— 252	— 514	530	— 2.57
"		200	317	— 268	1891	— 259	— 527	3	— 2.64
"	16 1/2	200	317	0	1891	0	0	3	—
"		300	447	+ 130	2010	+ 119	+ 249	252	+ 2.49
"		400	577	+ 130	2133	+ 123	+ 253	505	+ 2.53
"		600	834	+ 257	2382	+ 249	+ 506	1011	+ 2.53
"		800	1089	+ 255	2633	+ 251	+ 506	1517	+ 2.53
"		1000	1343	+ 254	2887	+ 254	+ 508	2025	+ 2.54
"		**1200**	1601	+ 258	3143	+ 256	+ 514	2539	+ 2.57
"		1100	1476	— 125	3023	— 120	— 245	2294	— 2.45
"		1000	1350	— 126	2902	— 121	— 247	2047	— 2.47
"		800	1097	— 253	2658	— 244	— 497	1550	— 2 49
"		600	843	— 254	2408	— 250	— 504	1046	— 2.52
"		700	967	+ 124	2529	+ 121	+ 245	1291	+ 2.45
"		800	1093	+ 126	2650	+ 121	+ 247	1538	+ 2.47

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale	Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali			
25 novembre		1000	1346	+ 253	2897	+ 247	+ 500	2038	+ 2.50
»		1200	1600	+ 254	3145	+ 248	+ 502	2540	+ 2.51
»		1100	1471	— 129	3030	— 115	— 244	2296	— 2.44
»		1000	1349	— 122	2907	— 123	— 245	2051	— 2.45
»		800	1098	— 251	2661	— 246	— 497	1554	— 2.49
»		600	844	— 254	2410	— 251	— 505	1049	— 2.53
»		400	583	— 261	2155	— 255	— 516	533	— 2.58
»		200	312	— 271	1894	— 261	— 532	1	— 2.66
26 »	9	200	312	0	1890	— 4	— 4	— 3	—
»		300	442	+ 130	2008	+ 118	+ 248	245	+ 2.48
»		400	573	+ 131	2031	+ 123	+ 254	499	+ 2.54
»		300	446	— 127	2010	— 121	— 248	251	— 2.48
»		400	573	+ 127	2030	+ 120	+ 247	498	+ 2.47
»		600	832	+ 259	2378	+ 248	+ 507	1005	+ 2.54
»		500	706	— 126	2257	— 121	— 247	758	— 2.47
»		600	832	+ 126	2378	+ 121	+ 247	1005	+ 2.47
»		800	1088	+ 256	2630	+ 252	+ 508	1513	+ 2.54
»		700	962	— 126	2511	— 119	— 245	1268	— 2.45
»		800	1088	+ 126	2632	+ 121	+ 247	1515	+ 2.47
»		1000	1346	+ 258	2884	+ 252	+ 510	2025	+ 2.55
»		900	1218	— 128	2767	— 117	— 245	1780	— 2.45
»		1000	1343	+ 125	2889	+ 122	+ 247	2027	+ 2.47
»		1200	1603	+ 260	3143	+ 254	+ 514	2541	+ 2.57
»		1100	1475	— 128	3026	— 117	— 245	2296	— 2.45
»		1000	1352	— 123	2902	— 124	— 247	2049	— 2.47
»		1100	1477	+ 125	3023	+ 121	+ 246	2295	+ 2.46
»		1000	1353	— 124	2902	— 121	— 245	2050	— 2.45
»		800	1100	— 253	2656	— 246	— 499	1551	— 2.49
»		900	1223	+ 123	2779	+ 123	+ 246	1797	+ 2.46
»		800	1100	— 123	2657	— 122	— 245	1552	— 2.45
»		600	847	— 253	2408	— 249	— 502	1050	— 2.51
»		700	971	+ 124	2529	+ 121	+ 245	1295	+ 2.45
»		600	847	— 124	2406	— 123	— 247	1048	— 2.47
»		400	587	— 260	2153	— 253	— 513	535	— 2.56
»		500	713	+ 126	2273	+ 120	+ 246	781	+ 2.46
»		400	587	— 127	2152	— 121	— 248	533	— 2.48
»		200	316	— 270	1890	— 262	— 532	1	— 2.66
»	17 $^1/_2$	200	311	— 5	1892	+ 2	— 3	— 2	—

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media.* Nota di LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione con lo spettrometro.* Nota I di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Avendo da molto tempo acquistato un buon reticolo di Rowland, concavo, di 3 metri di raggio di curvatura, dovetti lungamente contentarmi di usarlo come strumento di dimostrazione e non di misura, perchè nè i mezzi, nè il locale di cui potevo disporre mi consentivano nè di acquistare nè di usare, qualora l'avessi acquistato, l'apparecchio completo di Rowland.

Inoltre, avendo recentemente eseguito misure dello spostamento che subiscono le righe dei varî spettri quando varia la temperatura, e quindi varia la distanza delle righe del reticolo, nel ricercare le condizioni e gli spettri che meglio si prestavano a queste misure ebbi da incontrare non poche difficoltà, sia nello stabilire per tentativi quelle esatte condizioni che si ottengono meccanicamente coll'apparecchio del Rowland, sia perchè ad ogni nuova disposizione ero costretto a spostar mobili e strumenti per far posto all'oculare e all'osservatore, e, ciò nonostante, l'oculare capitava spesso in posizioni tali da render l'osservazione molto incomoda e, perciò, facilmente meno esatta.

Ricorsi finalmente ad una disposizione, che può presentare bensì qualche inconveniente, ma che è pochissimo ingombrante, facile ad effettuare e che dà modo di facilmente osservare e determinare la posizione delle righe di tutti gli spettri di vario ordine; essa perciò potrà riuscire utile quando, come nel mio caso, i mezzi o il locale non consentano assolutamente l'uso del reticolo di Rowland.

La nota condizione essenziale, cui è necessario o molto utile il soddisfare, è che il punto medio R del reticolo ARB (che si suppone abbia le righe perpendicolari al piano della figura), e quello F della fessura, si trovino sopra una circonferenza descritta sul raggio di curvatura $RC_R = R$ del reticolo come diametro. Se questa condizione è soddisfatta, tutti gli spettri di vario ordine si formeranno su questa circonferenza, e sarà facile di collocare l'oculare o la pellicola fotografica per l'osservazione o la riproduzione di uno qualsiasi di essi; se la stessa condizione, invece, non è soddisfatta, gli

spettri si formeranno lungo una curva d'ordine superiore, non facilmente tracciabile, e la forma della pellicola, e la sua posizione, o quella dell'oculare dovranno esser trovate, caso per caso, per tentativi; inoltre, fors'anche gli spettri riusciranno meno nitidi.

Per soddisfare a tale condizione, ho usato un metodo che essenzialmente non differisce da quello già descritto ed usato dal Waterhouse e che trovasi citato dal Kayser nello *Handbuch der Spectroscopie*, Bd. 1. Il punto medio R del reticolo, quello F della fessura ed il centro C della suddetta circonferenza, formavano i vertici articolati, cioè ad angolo variabile, d'un

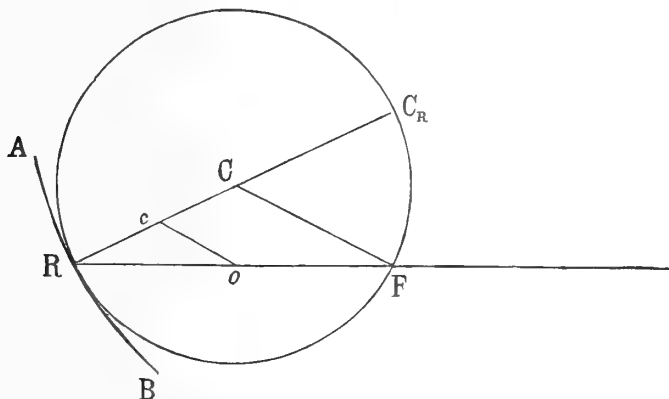



Fig. 1.

triangolo RCF, di cui due lati RC ed FC avevano una lunghezza costante uguale al raggio della stessa circonferenza, mentre il 3° lato RF aveva una lunghezza variabile, colla posizione della fessura F, e (per comodità) una direzione costante. Waterhouse collocava la pellicola fotografica in C_R all'estremità d'un lungo regolo RC_R, e fotografava così lo spettro normale.

Ho creduto più conveniente, per lo scopo che mi ero prefisso e per le condizioni in cui operavo, di osservare invece (e, occorrendo, fotografare) lo spettro *rv*, che, per una conveniente posizione della fessura e per la corrispondente orientazione del reticolo, è prodotto nel piano della fessura stessa o, più esattamente, sulla superficie cilindrica di raggio R/2 ad esso tangente, con raggi luminosi aventi, in media, la stessa direzione dei raggi incidenti. L'oculare o la pellicola devono esser fissati alla fessura (allato, o un po' al disopra): e per osservare o ricevere sulla pellicola i diversi spettri, non occorre altro che far scorrere essa fessura lungo RF.

Così le dimensioni dell'apparecchio sono ridotte a quelle del triangolo RCF, ed inoltre è possibile d'osservare spettri d'un ordine più elevato che non con qualsiasi altra disposizione. Difatti, essendo

$$\text{sen}\, i + \text{sen}\, e = m\lambda/s \tag{1}$$

la condizione cui devono soddisfare gli angoli i ed e d'incidenza e d'emergenza dei raggi, l'ordine m degli spettri, la lunghezza d'onda λ, e la lunghezza s d'un elemento, essa, per il caso solito di $e=0$, diventa sen $i =$ $= m\lambda/s \leq 1$, quindi $m < s/\lambda$; mentre, invece per $i=e$, la stessa condizione diviene $2 \operatorname{sen} i = m\lambda/s \leq 2$, quindi $m \leq 2s/m$. Si ha però l'inconveniente che gli spettri sono obliqui, (più o meno secondo l'ordine), spettri rispetto ai raggi che li formano; quindi, anzitutto, essi non sono normali, cioè la distanza de di due righe nella riproduzione fotografica non è proporzionale a $d\lambda$ ma bensì a $md\lambda/2\,s \cos e$ variabile con e.

Si può ridurre normale questo spettro, prima fotografandolo e poi, ricollocata a posto la riproduzione, fotografandola con un obbiettivo collocato al posto del reticolo. Difatti, poichè la distanza di due righe nella 1ª riproduzione è $de = md\lambda/2\,s \cos e$, e l'angolo delle due pellicole è in ogni punto uguale ad e, la proiezione di de sulla 2ª pellicola sarà uguale a $md\lambda/2s$, cioè proporzionale a $d\lambda$ ed indipendente da e.

Se invece si osservano gli spettri con un oculare, solo una riga potrà trovarsi nel suo piano focale ed apparire nitida: le adiacenti si troveranno avanti o dietro di esso, e dovranno apparire meno nitide; però, in pratica, non ho trovato che questo inconveniente fosse molto sensibile. In quanto alla distanza apparente di due righe essa è la proiezione della distanza reale suddetta sul piano focale facente con essa un angolo e, e sarà quindi ancora uguale a $md\lambda/2s$ e proporzionale a $d\lambda$. Indicherò in seguito un altro modo per evitare del tutto il suddetto inconveniente.

Per effettuare questa disposizione, ho collocato sopra un tavolo, in direzione del portaluce, un banco d'ottica lungo 3 metri (in realtà molto meno, perchè mi contentavo d'osservare solo due o tre spettri; ed inoltre, quando occorreva, lo spostavo), rappresentato schematicamente, nella figura, da RX. All'estremità di questo banco opposto al portaluce ho collocato lo spettrometro, e vi ho fissato il reticolo colle linee verticali; inoltre, sopra un corsoio del banco ho fissato la fessura verticale, coll'oculare. Il punto medio (R) del reticolo deve trovarsi sull'asse geometrico dello spettrometro e sulla retta RF percorsa dal punto medio F della fessura scorrente lungo il banco d'ottica, e questa dev'esser sostenuta da un'asta cilindrica e trovarsi sul suo asse.

Due regoli orizzontali, lunghi e leggeri (RC, FC), sono fissati ad un capo, uno al sostegno del reticolo (che può ruotare attorno all'asse dello spettrometro), l'altro ad un tubo verticale cui serve d'asse l'asta che sostiene la fessura; ed all'altro capo essi sono fissati alle due metà d'una leggera cerniera C coll'asse verticale, cosicchè rimane compìto il triangolo articolato RCF. La lunghezza dei due regoli fra i vertici (cioè fra gli assi geometrici dello spettrometro e della cerniera, e fra questo e quello della fessura) dev'essere esattamente R/2.

Se questi due lunghi regoli non fossero sostenuti in qualche modo, essi, per quanto rigidi e leggeri (condizioni contrastantisi), si fletterebbero, la cerniera s'abbasserebbe e s' inclinerebbe alquanto, la lunghezza dei regoli fra gli assi suddetti più non sarebbe esattamente R/2, un momento non piccolo agirebbe sullo spettrometro e sulla fessura tendendo a rovesciarli o deviarli, e crescerebbe l'attrito che porrebbe ostacolo al buon funzionamento delle articolazioni.

Non mi è parso opportuno di sostenere i regoli dal basso mediante un carrello ad una o più ruote o sfere scorrevoli sul piano del tavolo o sul pavimento; e mi è parso più facile il sostenerli dall'alto. Perciò ad un sostegno indipendente e molto stabile, sopra lo spettrometro e coassialmente con esso, ho fissato un pernio verticale, attorno al quale poteva ruotare un robusto regolo orizzontale, un po' più lungo del regolo RC e sostenente questo (e, quindi, anche l'altro regolo CF) mediante due o più fili, in modo che, anche staccando la connessione fra il reticolo ed il regolo RC, questo nè cascava, nè deviava, e quindi, col suo peso, non esercitava un momento apprezzabile sul reticolo stesso.

Sebbene le dimensioni dell'apparecchio ora descritto, almeno per un reticolo di 3 metri di raggio di curvatura, non siano eccessive, poichè occupano un rettangolo di 3 metri per 1,50, o anche meno, esse possono essere ridotte alla metà in ogni senso: cioè, nel caso suddetto, ad un rettangolo di 1,50 per 0,75 metri, qualora i raggi incidenti, oppure quelli emergenti, siano paralleli.

Se la fessura, o la sua immagine, è a distanza infinita nella direzione del banco d'ottica, ed invia raggi sul reticolo la cui orientazione sia determinata, colla disposizione suddetta, dalla posizione del vertice F lungo RX, l'immagine della fessura formantesi, per raggi d'una conveniente lunghezza d'onda, nella direzione dei raggi incidenti, si troverà in O, a metà distanza fra R ed F, qualunque siano la posizione di F sul banco d'ottica, e la corrispondente orientazione del reticolo. Vale a dire che essa immagine si formerà sull'intersezione colla retta RF d'una circonferenza tangente in R al reticolo, e di raggio $c\mathrm{R} = c\mathrm{O} = \mathrm{R}/4$.

Se quindi si costruisce un apparecchio simile a quello sopra descritto ma con regoli Rc, Oc di metà lunghezza: se inoltre la fessura immobile, a distanza qualsiasi, nella direzione del banco d'ottica, invia i raggi sopra una lente collimatrice (pure immobile ed avente il foco nel mezzo della fessura) che renda paralleli questi raggi, e se l'oculare è posto nel vertice articolato o, si potranno osservare nel suo campo nitidamente le righe d'uno spettro, le quali si sposteranno succedendosi e mantenendosi nitide quando l'oculare si sposta lungo il banco d'ottica, regolando l'orientazione del reticolo.

Se invece nel vertice O, collegato, nel modo anzidetto, con R e con c e scorrevole lungo RF, si colloca la fessura, la sua immagine nella dire-

zione dei raggi incidenti (con luce la cui lunghezza d'onda è determinata da tale condizione e dall'orientazione del reticolo) si formerà a distanza infinita. Collocando quindi nel banco d'ottica un cannocchiale fisso, osservante all'infinito verso il reticolo, si potrà osservare nel suo campo un nitido spettro normale spostantesi nel modo indicato.

Si potrà aumentare la chiarezza degli spettri usando una lente collimatrice cilindrica, invece che sferica, e di opportuna distanza focale.

Allorchè il corsoio, che porta la fessura e l'oculare, si trova presso le estremità della corsa, cioè molto vicino al reticolo, oppure presso alla massima distanza, i due regoli fanno un angolo poco diverso da zero, oppure da 180°, e la forza che, quando si fa scorrere esso scorsoio lungo il banco

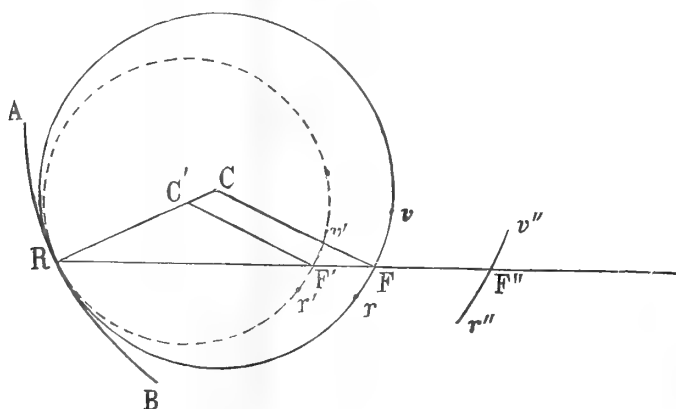



Fig. 2.

d'ottica, agisce in C sul regolo RC, ha molto piccola la componente normale, che tende a far orientare il reticolo, mentre sono grandi le componenti che tendono a spostare o inclinare gli assi dello spettrometro e della fessura, e che inoltre fanno crescere l'attrito. È perciò utile che, almeno in questi casi, la rotazione del reticolo sia prodotta da una forza accessoria, ciò che può ottenersi in molti modi. Nella disposizione, molto semplice, che ho adottato, l'asse della cerniera C portava una puleggia, ed un'altra, pure coll'asse verticale, era collocata verso il mezzo del banco d'ottica sopra un apposito sostegno che poteva essere spostato; una funicella fissa al corsoio s'adattava prima su questa puleggia, poi su quella della cerniera, poi sopra una terza coll'asse orizzontale ed era tesa da un peso conveniente. Così, spostando il corsoio, si agiva direttamente, o per mezzo del peso tensore, sulla funicella, e, quindi, quasi normalmente sull'estremità del regolo RC.

Può facilmente avvenire, per difetto di costruzione, che i due regoli abbiano bensì la stessa lunghezza, ma non quella esattamente prescritta (R/2), e sieno, p. es., un po' minori di questa RC', C'F', e quindi la fessura si trovi in F' invece che in F. Lo spettro nella direzione dei raggi inci-

denti si formerà allora in $r''v''$, ad una distanza da F′ che varierà quando si sposta la fessura lungo il banco d'ottica, ossia quando varia l'angolo C′RF′; e l'oculare o la pellicola non dovranno avere una posizione fissa rispetto alla fessura, ma dovranno avvicinarsi ad essa quando essa s'avvicina al reticolo. Se invece i due regoli fossero più lunghi di R/2, e la fessura si trovasse in F″, essa produrrebbe uno spettro in $r'v'$, la cui distanza dalla fessura ancora decrescerebbe (però in direzione contraria) quando questa si avvicina al reticolo.

Può anche facilmente avvenire che, per imperfetta rigidità dei regoli, o delle connessioni, il reticolo non obbedisca prontamente ai movimenti del corsoio, e si orienti a scatti, specialmente quando s' inverte il suo movimento; ne seguirebbe una certa difficoltà nel condurre una qualsiasi riga in una posizione esattamente determinata; inoltre, siccome la imperfetta rigidità dei regoli produrrebbe una variazione delle distanze RC e CF, anche ne seguirebbe che gli spettri si formerebbero a scatti, ora sulla pellicola, ora davanti o dietro di essa.

Non credo, però, che questi inconvenienti, che, certo, renderebbero meno facili le osservazioni, influiscano direttamente sulla precisione dei valori delle lunghezze d'onda per le diverse righe, poichè essi dipendono unicamente dalla esatta misura degli angoli.

Non mi sono finora occupato se non della parte meccanica dell'apparecchio che, sebbene costruito imperfettamente, risultò molto utile. Non ho perciò eseguito misure di angoli e di lunghezza d'onda: anzi, lo spettrometro, che facilmente sarebbe stato danneggiato nelle molteplici prove, era sostituito da un sostegno provvisto degli stessi movimenti, ma privo di graduazione. Neppure ho eseguito confronti esatti fra la nitidezza di questi spettri e quelli ottenuti nel modo solito, cioè per $e = 0$; e mi sono contentato di verificare che un grande svantaggio non era manifesto.

Chimica — *Sulle ossime dell'anaftil-fenil-chetone.* Nota di Mario Betti e di Pasquale Poccianti, presentata dal Corrisp. A. Peratoner.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Se ha luogo una birifrangenza anormale nelle prossimità di una riga spettrale di un vapore metallico in un campo elettrico.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Alle anomalie nell'emissione delle righe spettrali per l'azione di un campo magnetico, e cioè alla moltiplicazione delle righe con caratteri di polarizzazione diversi, corrispondono, come è noto, anomalie nella velocità di propagazione della luce in seno al vapore metallico, a seconda dello stato di polarizzazione della luce incidente. E così, nel senso delle linee di forza, alla scissione della riga in due con polarizzazione circolare inversa corrisponde, per una lunghezza d'onda vicina a quella delle righe, una diversa velocità di propagazione di due raggi polarizzati circolarmente in senso opposto; e quindi una rotazione anormale del piano di polarizzazione (esperienza di Macaluso e Corbino).

Analogamente, nel senso normale alle linee di forza, alla scissione della riga in tre componenti, con vibrazioni parallele o normali al campo, corrisponde una velocità di propagazione diversa a seconda del piano di polarizzazione della luce incidente, e quindi una birifrangenza anormale nella prossimità della riga (esperienza di Voigt e Wiechert).

Questi fenomeni della polarizzazione rotatoria, o della birifrangenza anormale, sono assai più facilmente osservabili che non l'altro cui sono rilegati: la scissione delle righe. Così con un campo magnetico di alquante centinaia di Gauss, mentre è assai difficilmente osservabile il fenomeno Zeeman, riesce ben netta la constatazione della polarizzazione rotatoria ricorrendo a una fiamma di sodio, disposta tra nicol incrociati, e traversata da un fascio di luce bianca. La birifrangenza è però meno facile a constatare, nei campi deboli, che non la polarizzazione rotatoria; poichè mentre quest'ultima dipende dalla prima potenza del campo, la birifrangenza è proporzionale al quadrato del campo.

È d'altra parte ben legittimo il ritenere che alla scomposizione delle righe per un campo elettrico, osservata recentemente da Stark, debba corrispondere, come nell'esperienza di Voigt e Wiechert, una birifrangenza anormale nelle prossimità della riga.

Il vapore attraversato dalla luce deve possedere una densità non trascurabile, perchè riescano sensibili le azioni esercitate sulla luce che si propaga nel suo seno; sarebbe perciò vano ricorrere al gas di assai piccola densità, reso luminoso, nella esperienza Stark, dai raggi canali. Volendo invece aumentare notevolmente la densità dei vibratori, il valore del campo

elettrostatico realizzabile non può superare quello ordinariamente esistente in un arco voltaico. Mi è parso quindi conveniente di riprovare in condizioni migliori una esperienza già da me tentata, con esito negativo, molti anni or sono; ricercare cioè se i vapori metallici esistenti in seno ad un arco, tra carboni impregnati, presentino traccie di birifrangenza sensibile nelle vicinanze delle righe del metallo.

La disposizione sperimentale è schematizzata nella figura 1. In essa A rappresenta un arco a corrente continua di grande intensità, tra carboni ordinarî. La luce, resa parallela da un buon obbiettivo L, passa per un primo nicol N, attraversa poscia un secondo arco A′, ricco specialmente di vapori

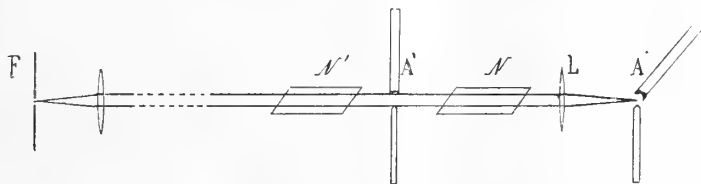



Fig. 1.

di calcio e di sodio, e, dopo aver traversato un secondo nicol N′, vien concentrata sulla fenditura F di uno spettroscopio potente (un reticolo di Rowland). Tra il nicol N′ e la fenditura F è interposta una notevole distanza, in modo che il fascio parallelo, che proviene da L, giunge in F con piccolo indebolimento, mentre è fortemente attenuata la luce divergente prodotta dall'arco A′.

Non ostante ciò, disponendo i nicol N N′ in posizione incrociata, e a 45° dalla direzione media dell'arco A′, la luce di questo giunge ancora abbastanza intensa sul reticolo perchè si vedano chiaramente le righe di emissione, delle quali alcune si presentano come autoinvertite.

Esse appaiono luminose su fondo oscuro, perchè i nicol incrociati arrestano la luce proveniente dal primo arco A. Per giudicare se la luminosità delle righe è propria dell'arco A′, o deriva da un effetto di birifrangenza anormale, nella loro immediata vicinanza, esercitata dal vapore sulla luce di A, basta intercettare periodicamente il fascio tra L ed N. Nessuna variazione nell'aspetto e nella intensità delle righe potè essere osservata in questa manovra.

In una seconda prova al fascio di luce bianca proveniente da L fu sostituito un fascio di luce solare; e dei carboni (di tipo ordinario) tra cui scocca l'arco A′, uno venne forato, e la cavità risultante fu riempita di cloruro di sodio fuso.

In queste condizioni la grande densità dei vapori di sodio esistente nell'arco faceva sì che, osservando lo spettro di emissione, intorno alle righe D una rilevante parte dello spettro apparisse luminosa come per uno slarga-

mento grandissimo delle righe medesime; mentre al posto di queste apparivano due larghe righe di assorbimento per autoinversione.

Mandando o intercettando la luce solare attraverso l'arco, sempre con nicol incrociati, nessuna modificazione sensibile si riuscì a constatare nell'aspetto del campo luminoso.

Si deve quindi concludere che, per l'azione del campo elettrico naturalmente esistente in seno ad un arco, non si determina in prossimità delle righe una birifrangenza apprezzabile.

Fisica. — *Sull'interferografo girante del sig. Sagnac.* Nota del prof. Luigi Puccianti, presentata dal Socio A. Ròiti.

Il sig. Sagnac ha effettuato recentemente [1] una difficile ed elegante esperienza, colla quale prova che le frangie, le quali si producono per l'interferenza di due fasci luminosi propagantisi in versi opposti lungo un perimetro chiuso, subiscono uno spostamento quando s'inverte il movimento rotatorio, cui partecipano solidalmente tutti i pezzi ottici a cui si appoggiano i vertici del perimetro stesso, non che la sorgente luminosa e la camera che serve a fotografare le frangie.

Lo spostamento misurato risulta in eccellente accordo con la espressione

$$\zeta = \frac{16\pi \mathrm{NS}}{\mathrm{V}\lambda}, \tag{1}$$

ove ζ indica lo spostamento in frangie, N il numero dei giri per secondo del moto rotatorio che si inverte, S l'area racchiusa dal perimetro, V la velocità della luce, e λ la lunghezza d'onda.

A questa espressione il Sagnac era giunto svolgendo una sua teoria dei fenomeni luminosi nei corpi in moto, il cui punto di partenza è l'ipotesi dell'etere.

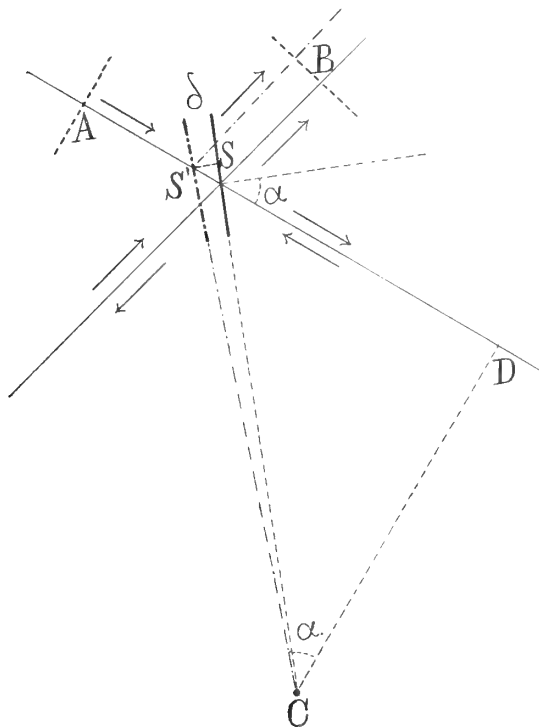
Per questo egli crede di poter considerare la sua esperienza come una *dimostrazione dell'etere*: ciò che, parmi, deve intendersi dimostrazione dell'esistenza obiettiva di un mezzo che invade lo spazio, e che propaga i fenomeni luminosi.

Ora, alla relazione (1) si può arrivare per altra via. Io mi sono limitato al caso semplice, che il perimetro interferenziale sia circoscrittibile ad un cerchio.

Ricordando che un movimento traslatorio del sistema relativo all'etere non può influire sulla posizione delle frangie per i termini di primo ordine del rapporto tra la velocità del movimento e la velocità di propagazione

[1] Comptes Rendus, vol. 157, pag. 708 (1913); vol. 157, pag. 1410 (1913).

della luce, e osservando che non è il caso di discutere i termini del secondo ordine, si vede subito che anche accettando l'ipotesi dell'etere (come non accettandola), si può esser certi di non alterare il resultato dell'esperimento, quando compongasi col moto rotatorio uniforme del sistema un qualsiasi moto traslatorio uniforme.

Ciò premesso, potremo impunemente ammettere che l'asse di rotazione passi per il centro C del circolo inscritto (fig. 1), perchè ve lo potremo ricondurre immaginando impresso al sistema un opportuno moto traslatorio.

Consideriamo da prima il sistema in quiete, e applichiamo il principio di Fermat. Confrontiamo il cammino ottico che va da A a B seguendo il perimetro, con un'altra spezzata qualsiasi, i cui lati facciano piccoli angoli con quelli del cammino ottico stesso, e che abbia i vertici sulle stesse superficie riflettenti, e gli estremi in A e B o anche in due altri punti qualunque degli elementi di piani perpendicolari ai raggi in A e B. La differenza di lunghezza è una quantità piccolissima, di ordine superiore al primo.

Quando il sistema è in rotazione compiendo un piccolo angolo δ (per esempio, verso sinistra) nel tempo impiegato dalla luce a girare il perimetro, le direzioni di propagazione vengono alterate di angoli aventi lo stesso ordine di grandezza che ha δ. Perciò, seguendo queste nuove direzioni, il percorso dall'elemento piano normale ai raggi in A a quello normale ai raggi

in B non varierebbe che per termini d'ordine superiore, se non fosse l'effetto dello spostamento dei pezzi ottici in direzione normale alla loro superficie. Ora questo spostamento, per gli specchietti che formano i vertici del perimetro, e rotano (colla semplificazione da me adottata) intorno ad un punto della loro normale per il centro, rimane ancora nei termini del secondo ordine rispetto a δ; cosicchè basta tener conto dello spostamento del separatore S, valendosi della ben nota teoria delle lamine sottili. In questo caso, la differenza in B di cammino tra il raggio destrorso e il sinistrorso proviene dunque soltanto da ciò: che questo, compiuto il giro, trova la superficie del separatore spostata da S in S'. E risulta in ogni caso ritardato il fascio luminoso che gira concordemente al sistema.

La differenza di percorso risulta dunque uguale al doppio della proiezione del segmento SS' sulla AD: cioè sarà

$$\Delta = 2\overline{SS'} \cos \alpha ,$$

e indicando ancora con N il numero di giri per secondo, con P la lunghezza del perimetro e con V la velocità della luce, facilmente si vede essere:

$$\overline{SS'} = 2\pi N \frac{P}{V} \overline{CS} ,$$

e quindi

$$\Delta = 4\pi N \frac{P}{V} \overline{CS} \cos \alpha .$$

Ma

$$\overline{CS} \cos \alpha = \overline{CD}$$

è l'apotema, e quindi introducendo l'area racchiusa dal perimetro

$$S = \frac{1}{2} P . \overline{CD} ,$$

risulta :

$$\Delta = \frac{8\pi NS}{V} ,$$

da cui, raddoppiando per l'inversione del moto, ed esprimendo il ritardo in lunghezze d'onda si ottiene:

$$\zeta = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{16\pi NS}{V\lambda} ,$$

cioè ancora la (1), la quale è stata data dal Sagnac in generale, e da lui verificata con l'esperienza. È vero che la sua esperienza è fatta per un perimetro meno regolare: ma è ovvio che, anche per il caso semplice da me

scelto, come la sua teoria porta allo stesso resultato del mio computo, così l'esperienza confermerebbe il resultato comune.

Fin qui niente di nuovo, adunque: anzi potrebbe parere che il concetto mio e quello del Sagnac si equivalessero; invece, l'opinione mia è nettamente diversa dalla sua per quel che concerne l'interpretazione del fatto.

Nella mia dimostrazione non ho introdotto esplicitamente altre ipotesi che le leggi dell'ottica geometrica, la propagazione della luce in un tempo finito da un punto ad un altro e il principio delle interferenze delle lamine sottili, che è come dire le interferenze di Newton. Non mi sono accorto di avere introdotto implicitamente l'ipotesi dell'esistenza obiettiva del mezzo, e nemmeno la propagazione per onde. Ritengo, quindi, che la teoria di Newton porti, in questo caso, come in tanti altri, allo stesso risultato della teoria ondulatoria.

A fortiori l'ipotesi dell'esistenza dell'etere non era necessaria per prevedere il fatto, e non risulta da questo provata.

L'esperienza si deve secondo me interpretare come un metodo di determinazione della velocità della luce.

Ma il suo interesse filosofico è sempre grandissimo, in quanto che essa è la prima esperienza ottica che permetta di rivelare un moto rotatorio assoluto.

Fisica. — *La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico.* Nota del prof. Luigi Puccianti, presentata dal Socio A. Ròiti.

Chimica. — *Ricerche di chimica sistematica. Rutenio, rodio, palladio.* Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati* [1]. Nota di LIVIO CAMBI, presentata dal Socio R. NASINI.

Occupandomi del comportamento dei boro alchili con gli alcali e gli alcoolati [2], cioè dei composti del tipo $[BR_3 . OH]'K$, accennai, per analogia, al composto del borato di etile con l'alcoolato sodico, $B(OC_2H_5)_4 . Na$, ottenuto da Copeaux per semplice addizione diretta [3].

H. Copeaux osservò, inoltre, che tale composto a 200° non cede etere borico; l'alcoolato sodico in esso combinato non reagisce con lo ioduro di etile a 140°. Ciò attesta la notevole stabilità del sale.

A questo interessante prodotto Copeaux diede la costituzione seguente: $B\equiv(OC_2H_5)_4$ [4] (con $\diagdown Na$). Ammettendo il boro come pentavalente. H. Kauffmann [5] discutendo della valenza del boro, citava questo sale, e, oltre alla formola di Copeaux, prendeva in considerazione l'altra $NaO—B\equiv(OC_2H_5)_3$ (con $\diagdown C_2H_5$); però questa formola non trova alcun riscontro nelle reazioni del composto.

Come dissi, venni allo studio delle reazioni degli eteri borici per la simiglianza di comportamento che essi hanno con i boro alchili di cui mi occupo. Ho verificato i dati di Copeaux: non solo, ma ho generalizzato la reazione ad altri eteri dell'acido borico. Ho isolato i sali ossimetilici di sodio, litio, potassio, calcio: quelli ossietilici di sodio, potassio, tallio (talloso): infine il sale ossipropilico di sodio.

Tutti questi composti hanno una notevole stabilità, riscaldati anche nel vuoto non cedono l'etere borico in essi combinato. Essi partecipano, in soluzioni alcooliche assolute, a reazioni di doppio scambio che illustrano il loro carattere salino.

Una soluzione metilalcoolica del sale $K . B(OCH_3)_4$ fornisce, con cloruro di litio in egual solvente, cloruro di potassio, che precipita; e dalla soluzione, per svaporamento, si ottiene il sale di litio corrispondente:

$$K . B(OCH_3)_4 + LiCl = KCl + Li . B(OCH_3)_4 .$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore di Milano, diretto dal prof. G. Carrara.

(2) Rendiconti della Soc. chim. ital., pag. 327 (1913).

(3) Compt. Rend., *127*, pag. 721 (1898).

(4) Ibidem, pag. 722.

(5) H. Kauffmann, *Die Valenzlehre*, pag. 232 (1911).

E viceversa, la soluzione etilica del sale pure potassico ossietilico con acetato talloso separa, finamente cristallino, il sale talloso, e rimane in soluzione l'acetato alcalino:

$$K . B(OC_2H_5)_4 + CH_3 . CO_2 . Tl = Tl . B(OC_2H_5)_4 + CH_3 . CO_2 . K .$$

Il calcio metallico si discioglie rapidamente nella soluzione metilalcoolica dell'etere $B(OCH_3)_3$, per fornire il sale solubilissimo $Ca[B(OCH_3)_4]_2$.

Questi sali quindi potremo considerarli come derivati da acidi, certamente assai instabili, tetraossialchilborici: $H'[B(OR)_4]$. Essi si idrolizzano in acqua, generando alcool e metaborato alcalino:

$$[B(OR)_4]' \longrightarrow [B(OH)_4]' \longrightarrow BO_2' \text{ (1)}.$$

Il qui descritto comportamento degli eteri borici si riconnette con quello, ben noto e ripetutamente studiato, dell'acido borico con alcune sostanze a funzione alcoolica. È noto che la mannite, la glicerina, addizionandosi in soluzione acquosa all'acido borico, possono ionizzare, almeno entro il limite di sensibilità di taluni indicatori, un atomo di idrogeno per ogni atomo di boro. Probabilmente questi acidi complessi hanno una costituzione analoga al tipo di cui mi occupo, cioè una struttura intesa, in linea generale, secondo la formola $H\left[B\begin{matrix}\nearrow (OH)_3\\ \searrow OR\end{matrix}\right]'$.

Ma il comportamento degli eteri borici ha un'importanza che va oltre la chimica del boro. Già Beilstein [2] prevedeva che gli alcoolati si sarebbero addizionati agli eteri degli acidi carbossilici. Geurther [3] ricercò questi composti, d'addizione ma non isolò alcun prodotto, probabilmente per la loro instabilità. Certo però tali composti, in soluzione per lo meno, debbono intervenire in numerose reazioni degli eteri degli acidi carbossilici che si compiono in presenza di alcoolati. Questa supposizione, generalmente ammessa, è avvalorata dal fatto che si conoscono derivati di questo tipo di alcuni eteri dell'acido benzoico. Claisen ha descritto il sale ottenuto anche dal metilato sodico e dall'etere benzilico, $C_6H_5{-}C\begin{matrix}\nearrow OC_7H_7\\ - OCH_3\\ \searrow ONa\end{matrix}$ [4], oppure dall'etere metilico e dal benzilato sodico.

(1) Richiamo gli idrati $NaBO_2 . 2H_2O$ e $NaBO_2 . 4H_2O$, a proposito della possibilità di un anione $B(OH)_4'$.

(2) Beilstein, Bull. Soc. Chim., pag. 14 (8 febbr.) 1859.

(3) Geurther, Bull. Soc. Chim., XII, pag. 369 (1869).

(4) Claisen, Berichte, *20* (1887), 646.

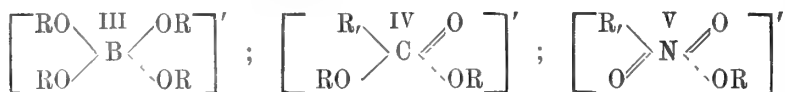
Citerò a tal proposito una reazione che trova un riscontro particolare negli eteri borici. Da molto tempo è noto che certe reazioni di doppio scambio fra alcoli ed eteri:

$$Ac—OR_{\prime} + R_{\prime\prime}.OH \rightleftarrows Ac—OR_{\prime\prime} + R_{\prime}.OH;$$

si compiono con singolare facilità in presenza di alcoolati. Si può presumere che intervengano composti del tipo succitato (1). Infatti, aggiungendo, ad una soluzione propilalcoolica di propilato sodico, borato trietilico, precipita immediatamente un sale, poco solubile, che è identico a quello ottenuto dall'etere borico propilico e dal propilato sodico: $Na\,B(OC_3H_7)_4$. Analoga reazione si compie fra etere borico etilico e metilato sodico in alcool metilico. Si hanno quindi, in questo caso, rapidissimi i fenomeni di doppio scambio su ricordati.

Passando ad un altro gruppo di composti, ricorderò che molti nitroderivati si combinano con gli alcali o alcoolati per generare quei sali cui Angeli diede la costituzione $R—N\begin{smallmatrix}\diagup OK \\ —OCH_3 \\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{smallmatrix}$ (2). Questi composti vennero ravvicinati appunto a quelli forniti dagli eteri degli acidi carbossilici (3).

In questi vari gruppi di composti noi troviamo una manifestazione generale: essi si comportano, rispetto agli alcali o agli alcoolati, come anidridi (4), che si salifichino sommando intere molecole di alcali. Ciò corrisponde al comportamento di quegli acidi che Werner ha chiamati anidroacidi (5); ed anche nei casi qui discussi potremo ricondurre tale proprietà ad una attività dell'atomo centrale che tende a saturare le sue affinità residuali:

$$\left[\begin{smallmatrix}RO \\ RO\end{smallmatrix}\!\!>\overset{III}{B}\!\!<\!\begin{smallmatrix}OR \\ OR\end{smallmatrix}\right]' \; ; \; \left[\begin{smallmatrix}R_{\prime} \\ RO\end{smallmatrix}\!\!>\overset{IV}{C}\!\!<\!\begin{smallmatrix}O \\ OR\end{smallmatrix}\right]' \; ; \; \left[\begin{smallmatrix}R_{\prime} \\ O\end{smallmatrix}\!\!>\overset{V}{N}\!\!<\!\begin{smallmatrix}O \\ OR\end{smallmatrix}\right]'$$

È un comportamento analogo, per citare un caso ben noto, a quello dell'idrato platinico, $Pt(OH)_4$, nella salificazione.

Parte sperimentale.

Gli eteri borici vennero preparati col metodo di Schiff; i varî alcooli anidri vennero posti a reagire in tubo chiuso, alle temperature volute, con

(1) Purdie B *20* (1887), 1554.

(2) Angeli, Gazzetta chimica it., *27*, II, pag. 366.

(3) Hantzsch u. Rinckenberger, Berichte, *32*, I, pp. 629 e 630.

(4) Ricorderò anche il composto $\begin{smallmatrix}HO \\ H\end{smallmatrix}\!\!>N\!\!<\!\begin{smallmatrix}O \\ OR\end{smallmatrix}$ ammesso da Bayer e Williger [Berichte, *34*, pag. 755 (1901)].

(5) Werner, Neure Anchauungen, 2 Auf., pp. 231 e 232.

la quantità calcolata di anidride borica. Essi vennero poi rettificati per distillazione frazionata; in qualche caso si usò il cloruro di calcio fuso [1] per separare da essi la più gran parte dell'alcool rimasto incombinato.

In accordo con i dati dei diversi autori, l'etere metilico bolliva a 65°-66° a pressione ordinaria; quello etilico a 121°, e quello propilico-normale a 175°.

I composti che descriverò vennero ottenuti aggiungendo l'etere borico, in lieve eccesso, alla soluzione di alcoolato: e i composti, cristallizzati o per raffreddamento o per lenta evaporazione delle soluzioni in ambiente secco su acido solforico, vennero rapidamente lavati con l'alcool *assoluto*, asciugati fra carta bibula secca, e analizzati. Operando, in questo, diversamente da Copeaux che distillò semplicemente l'alcool della sua miscela nel vuoto e poi seccò il residuo su acido solforico. A Copeaux sfuggirono in questo modo i fenomeni di cristallizzazione del suo sale, che infatti, come gli altri sali alcalini da me preparati, si separa con solvente di cristallizzazione.

Le analisi per quel che riguarda la determinazione dell'alcali e dell'acido borico vennero eseguite disciogliendo il sale nell'acqua: l'alcali con $HCl \frac{n}{10}$, con metilorange; poi, dopo aggiunta di mannite, l'acido borico veniva dosato con $Ba(OH)_2 \frac{n}{10}$ e fenolftaleina.

I gruppi ossietilici o ossimetilici presenti nei varî composti vennero determinati con il metodo Zeisel, usando un apparecchio simile a quello usato da Goldschmiedt [2] per la determinazione dell'alcool di cristallizzazione [3].

Sali ossimetilici.

Questi sali vennero preparati o dall'etere borico trimetilico e alcoolato metilico in alcool metilico anidro, o dall'etere trietilico e alcoolato metilico nello stesso solvente.

I) $Na . B(OCH_3)_4$.

Dei sali che ho studiato, è quello che cristallizza più facilmente, in grandi prismi incolori che sfioriscono all'aria perdendo alcool e decomponendosi. Il sale nel vuoto, su acido solforico, perde tutto il solvente di cristallizzazione.

[1] Frankland, Liebig's Ann., *124*, pag. 132.
[2] Monatshefte, *19*, pag. 325 (1898).
[3] Nel tubo a U laterale veniva posto il sale con tanta acqua da decomporlo.

Riferisco i dati analitici seguenti:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $NaB(OCH_3)_4, 1 + \frac{1}{2} CH_3.OH$
	I	II	
Na	11,12	11,35	11,16
B	5,14	5,21	5,22
$CH_3.OH$	23,50	—	23,11

L'alcool metilico si intende determinato dalla perdita in peso su acido solforico nel vuoto. Il sale secco diede i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $NaB(OCH_3)_4$
Na	14,53	14,55
B	6,89	6,95
OCH_3	78,31	78,50

Le analisi I), come quelle del sale secco, si riferiscono al sale ottenuto dal borato etilico; le II) a quello preparato direttamente dal borato metilico.

II) $Li.B(OCH_3)_4$.

Questo sale venne ottenuto, come si disse, per doppio scambio dal sale potassico corrispondente: in soluzione metilalcoolica con cloruro di litio (secco e fuso). Cristallizza in lunghi prismi setacei. È molto più solubile del sale sodico su descritto.

Le analisi diedero il risultato seguente:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $LiB(OCH_3)_4, 2 + \frac{1}{2} CH_3.OH$
	I	II	
Li	3,29	3,23	3,12
B	—	4,91	4,95
$CH_3.OH$	34,98	—	36,05

Il sale sfiorisce rapidamente in ambiente secco. Portato a peso costante nel vuoto, ha fornito i risultati analitici seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $LiB(OCH_3)_4$
Li	4,92	4,88
B	7,74	7,74

III) $K.B(OCH_3)_4$.

Si ottenne, analogamente al sale sodico, dai due eteri metilico o etilico dalle soluzioni con metilato potassico. Cristallizza in grandi prismi che sfio-

riscono rapidamente in ambiente secco. Le analisi condussero alla formola seguente, analoga a quella del sale sodico:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $K . B(OCH_3)_4 , 1 + \frac{1}{2} CH_3 . OH$
	I	II	
K	17,18	17,33	17,59
B	4,80	4,96	4,95
$CH_3 . OH$	21,85	—	21,80

Il sale portato a peso costante su acido solforico nel vuoto, ha dato i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $K . B(OCH_3)_4$
K	22,50	22,44
B	6,31	6,31

IV) $Ca[B(OCH_3)_4]_2$.

Questo sale è solubilissimo in alcool metilico; e non riuscì ad averlo cristallino. La soluzione metilalcoolica diviene, svaporandosi, densa e sciropposa: il residuo, portato a peso costante nel vuoto, aveva la composizione voluta; era incoloro. Con l'acqua, fornisce borato di calcio. Venne preparato disciogliendo il calcio metallico in limatura nella soluzione in alcool metilico dell'etere etilico o metilico.

Del prodotto riferisco l'analisi seguente:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $Ca B[OCH_3)_4]_2$
Ca	12,69	12,92
B	6,82	7,09

Sali ossietilici.

A questi appartiene, unico derivato finora noto, il sale di Copeaux. Vennero preparati dagli alcoolati e dall'etere trietilborico. Il sale talloso si ottenne per doppio scambio dal sale di potassio e acetato talloso.

V) $Na . B(OC_2H_5)_4$.

È molto meno solubile in alcool etilico del corrispondente derivato metilico in alcool metilico. Dalle soluzioni diluite si separa in piccoli prismi incolori rombici, lucenti, che sfioriscono rapidamente, anche in ambiente secco, perdendo l'alcool di cristallizzazione. La perdita in peso, del sale cristallizzato, nel vuoto su acido solforico, condurrebbe ad ammettere una molecola di alcool di cristallizzazione.

	Perdita in peso su 100 parti	Calcolata per $Na B(OC_2H_5)_4 , C_2H_5 . OH$
C_2H_5OH	12,90	14,05

Il sale, portato a peso costante, aveva la composizione seguente:

	Trovato in 100 parti I	Calcolato per $NaB(OC_2H_5)_4$
Na	10,96	10,75
B	5,24	5,14

VI) $K.B(OC_2H_5)_4$.

Il sale di potassio è molto più solubile di quello sodico su descritto. Cristallizza per svaporamento, in ambiente secco, dalle soluzioni, in grandi prismi appiattiti: che come quelli del sale precedente perdono con grande facilità il solvente di cristallizzazione. La determinazione della perdita di peso nel vuoto su acido solforico condurrebbe ad ammettere come più probabile $1 + \frac{1}{2}$ molecole di alcool di cristallizzazione. La media di due determinazioni ha dato il risultato seguente:

	Perdita in peso su 100 parti	Calcolata per $K.B(OC_2H_5)_4, 1 + \frac{1}{2} C_2H_5.OH$
C_2H_5OH	21,05	23,34

Il sale, privo di solvente di cristallizzazione, ha dato i seguenti risultati analitici:

	Trovato in 100 parti	Calcolato per $K.B(OC_2H_5)_4$
K	17,15	16,98
B	4,84	4,77

VII) $Tl.B(OC_2H_5)_4$.

Questo sale si separa, privo di solvente di cristallizzazione, in minuti cristalli aghiformi aggiungendo ad una soluzione alcoolica assoluta del sale precedente una soluzione, pure in alcool assoluto, di acetato talloso. L'acetato talloso è ricristallizzato dall'alcool assoluto.

Le determinazioni analitiche diedero i risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti I	II	Calcolato per $Tl.B(OC_2H_5)_4$
Tl	51,91	51,63	51,62
B	2,90		2,78

La determinazione I venne eseguita col metodo volumetrico anzidetto impiegando $HNO_3, \frac{n}{10}$ la II dosando il tallio come TlI.

Sale ossipropilico.

VIII) $Na.B(OC_3H_7)_4$.

L'etere borico dell'alcool propilico normale si somma anch'esso con grande avidità all'alcoolato sodico corrispondente; dalla soluzione propilalcoolica di propilato sodico, per aggiunta dell'etere borico tripropilico, si precipita il sale in minute scagliette cristalline madreperlacee. Eguale prodotto si ottiene aggiungendo l'etere borico trietilico alla stessa soluzione.

Le determinazioni analitiche hanno condotto ai risultati seguenti:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $Na\,B(OC_3H_7)_4$, $C_3H_7.OH$
	I	II	
Na	7,24	7,44	7,29
B	3,47	3,46	3,49
$C_3H_7.OH$	—	18,84	19,06

Il sale, portato a peso costante nel vuoto, aveva la composizione seguente:

	Trovato in 100 parti		Calcolato per $NaB(OC_3H_7)_4$
	I	II	
Na	8,95	9,06	9,05
B	4,30	4,24	4,33

Le analisi I si riferiscono, anche in questo caso, al sale prodotto dall'etere propilico; quelle II si riferiscono al sale stesso, ottenuto invece dall'etere etilico.

Riassumendo i caratteri generali di questi composti, osserverò in primo luogo che essi si separano facilmente con solvente di cristallizzazione, come del resto fanno anche gli alcoolati alcalini cristallizzando dalle loro soluzioni alcooliche. Nel maggior numero dei casi, le determinazioni hanno condotto ad ammettere un numero non intero di molecole di alcooli di cristallizzazione per una molecola di sale. Per quanto questi sali perdano l'alcool di cristallizzazione rapidamente, pure tale ammissione è avvalorata dai numerosi casi che ho verificati. D'altra parte non sono infrequenti altri casi consimili. [1]

La stabilità, e il carattere di veri sali, che posseggono i prodotti su descritti, è dimostrata anche dal fatto che essi non manifestano quei caratteri di ossidabilità con l'ossigeno atmosferico, che invece si riscontrano in molti degli alcoolati corrispondenti.

[1] Ricordo che A. Attenberg ha descritto il metaborato $KBO_2 + 1^1/_2 H_2O$ (Zeit anorg. Chemie 48 (1906) pag. 368) e M. Dukelski ha descritto il metaborato $K_2O . B_2O_3 + 2^1/_2 H_2O$ (Zeit. anorg. Chemie 50 (1906), pag. 41).

Infine, per quanto riguarda la solubilità, osserverò che essa aumenta nella serie Na, K, Li, Ca: il sale di tallio è il meno solubile e si separa privo di solvente di cristallizzazione. Ciò è pure conforme al comportamento di altri sali di quei metalli ad anione monovalente.

Il comportamento dell' acido borico con gli alcoolati, lo stato in cui si trovano questi interessanti composti qui descritti in soluzione, ed i fenomeni che accompagnano la loro formazione, saranno oggetto di ricerche ulteriori.

Fisica. — *Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile.* Nota del dott. ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO [1].

Nelle prime esperienze [2] avevo sempre adoperato tubi del diametro interno di circa 4 mm.: con essi è possibile di ottenere campi sufficientemente intensi per una netta separazione dei varî elementi nei quali vengono decomposte davanti al catodo le righe spettrali dell' idrogeno H_β e H_γ.

Con tubi così grossi, e adoperando la dispersione adatta per risolvere i varî elementi, non è possibile l'osservazione diretta del fenomeno, poichè l'occhio non possiede la sensibilità sufficiente. Ho provato quindi ad aumentare lo scarto fra le componenti mediante campi elettrici più intensi, quali si ottengono nei tubi ancora più sottili (per es., con quelli aventi il diametro di mm. 1,5, a parità di potenziale, il vantaggio è notevole); ed ho riconosciuto che è possibile di spingere l' intensità della corrente ad un valore relativamente alto, a condizione che la parete del tubo sia molto spessa. Occorre ancora avere l'accortezza di interrompere la corrente prima che l' eccessivo riscaldamento danneggi il vetro o produca la sublimazione dell'alluminio al catodo; ma si può comodamente far funzionare il tubo per parecchi minuti ogni volta.

Il risultato al quale sono giunto è questo: Per la grande variazione di frequenza, il fenomeno si rivela anche con strumenti di piccolo potere risolutivo: per es., con un ordinario spettroscopio ad un sol prisma; e la luminosità è sufficiente perchè si possa osservare direttamente, specie sulla H_β. Tra gli elettrodi di detti tubi veniva stabilita una differenza di potenziale

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

(2) In questi Rendiconti: Seduta del 21 dic. 1913, *Per l'effetto trasversale*; seduta del 4 genn. 1914, *Per l'effetto longitudinale*; seduta del 18 genn. 1914, *Per le diverse forme di scomposizione presentate dalle varie righe della serie di Balmer.*

complessiva di circa 7000 volt, l'intensità della corrente era di circa 1,5 milliampère, e la lunghezza dello spazio oscuro davanti al catodo risultava di mm. 2.

In tali condizioni è più vantaggioso disporre il tubo perpendicolare alla fenditura, per modo che la immagine del fascio catodico si incroci con essa e quindi nel collimatore penetri luce proveniente da una sola sezione normale; si utilizza lo strato immediatamente vicino al catodo, poichè ivi si ha il massimo effetto, come venne riconosciuto colla prima disposizione. Allora la decomposizione non conferisce agli elementi la configurazione ad Y, ma si osservano righe multiple parallele alla fenditura come quelle non decomposte.

Io ho adoperato dapprima la solita batteria di 5000 piccoli accumulatori, che mi aveva servito per tutte le esperienze: il fenomeno si può però osservare eccitando il tubo con un rocchetto di induzione o con una macchina elettrica capace di fornire una intensità sufficiente per illuminare il tubo, cioè circa di un milliampère: le macchine multiple ad induzione sono generalmente adatte.

Queste ultime notizie possono essere utili a rendere possibile lo studio del fenomeno anche a chi disponga soltanto degli ordinarî mezzi di un modesto laboratorio di fisica.

Chimica. — *Sui polimeri dell'isosafrolo.* Nota di Mario Mayer, presentata dal Socio E. Paternò.

Chimica. — *Sul cloral-β-aminoazobenzene.* Nota di Mario Mayer, presentata dal Socio E. Paternò.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Amadori e Viterbi. *Sulla composizione della piromorfite.* Pres. dal Socio G. Ciamician.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 4 febbraio 1914.

Annali della Stazione sperimentale per le malattie infettive del bestiame. I volume, 1911-1912-1913. (R. Istit. d'incoraggiamento di Napoli). Napoli, 1913. 8°.

Agamennone G. — Il recente terremoto nel Molise. (Estr. dalla « Riv. di astronomia e scienze affini », 1913). Torino, 1913. 8°.

Cavasino A. — Sui cosiddetti strumenti aperiodici. (Estr. dal Boll. della « Soc. Sismol. Ital. », vol. XVII). Modena, 1913. 8°.

Congrès International (1.er) de pathologie comparée à la Faculté de médecine de Paris, du 17 au 23 octobre 1912. Programme. Paris, 1913. 8°.

Cremona L. — Opere matematiche, pubblicate sotto gli auspicî della R. Acc. dei Lincei. Tomo I. Milano, 1914. 8°.

Expedition (National antartic) 1901-1904. Meteorology. Parte II. Comprising Daily synchronous charts ist october 1901, to 31 st March 1904. London, 1913. 4°.

Huebner E. — Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung. Leipzig, 1913. 8°.

Issel A. — Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX. (Estr. dagli « Atti della Soc. ital. per il progresso delle scienze », 1912). Roma, 1913. 8°.

Istrati C. I. — Studiu relativ la o nomenclatură generală în chimia organică bazat si pe o clasificare raţională a acestei părti din Chimie. Bucureşti, 1913. 8°.

Lebon E. — Albin Haller; biographie, bibliographie analytique des écrits. (« Savants du Jour »). Paris, 1913 8°.

Longo B. — Esiste l'*Helleborus niger L.* nel Senese? (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. ital., 1913). Firenze, 1913, f. v.

Longo B. — Ricerche sopra una varietà di *Grataegus Azarolus L.* ad ovuli in gran parte sterili. (Estr. dal « Nuovo Giornale bot. ital. », volume XXI). Firenze, 1913. 8°.

Longo B. — Ricerche su la *Coriavia myrtifolia* L. (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. ital. », 1913). Firenze, 1913. 8°.

Longo B. — Su la supposta esistenza, in Toscana, del *Peganum Harmala* L. Firenze, s. d. 8°.

Longo B. — Su le *Chimere vegetali.* (Estr. dal « Boll. della Soc. bot. ital. », 1913). Firenze, 1913, f. v.

Pubblicazioni dell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa; anni 1910-1913. Roma, 1911. 8°.

Servizi sanitari (I) e la chirurgia di guerra durante la campagna di Libia e d'Egeo sulle navi-ospedale e negli ospedali dipartimentali. (Ministero della Marina). Roma, 1913. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 4°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXI. (1892-1913). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Febbraio 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 febbraio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Bianchi. Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica . Pag. 195
Enriques. Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ . . . . » 206
Sciolette. Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale (pres. dal Socio *Volterra*). . . . . » 214
Severini. Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm (pres. dal Socio *Pincherle*) . . . . » 219
Colonnetti. Esperienze sulla elasticità a trazione del rame (pres. dal Socio *Volterra*) . . » 225
Amoroso. Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media (pres. dal Corrisp. *Almansi*) (*) . . . . » 232
Guglielmo. Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione con lo spettrometro (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . » »
Betti e *Poccianti.* Sulle ossime dell'anaftil-fenil-chetone (pres. dal Corrisp. *Peratoner*) (*) » 237
Corbino. Se ha luogo una birifrangenza anormale nelle pressimità di una riga spettrale di un vapore metallico in un campo elettrico (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . . » 238
Puccianti. Sull' interferografo girante del sig. Sagnac (pres. dal Socio *Ròiti*) . . . . . » 240
Id. La decomposizione della riga rossa dell' idrogeno nel primo strato catodico (pres. *Id.*) (*) » 243
Barbieri. Ricerche di chimica sistematica. Rutenio, rodio, palladio (pres. dal Socio *Ciamician*) (*) . . . . » »
Cambi. Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati (pres. dal Socio *Nasini*) . » 244
Lo Surdo. Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . . » 252
Mayer. Sui polimeri dell'isosafrolo pres. dal Socio *Paternò*) (*) . . . . » 253
Id. Sul cloral-β-aminoazobenzene (pres. *Id.*) (*) . . . . » »

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Amadori e *Viterbi.* Sulla composizione della piramorfite. Pres. dal Socio *Ciamician* . . » »
Bullettino bibliografico . . . . » 254

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 1° marzo 1914.* **N. 5.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 5°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degl autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Nuovi metodi per la produzione delle oscillazioni elettriche continue e per la loro utilizzazione nella radiotelegrafia.* * Nota del Socio Guglielmo Marconi.

Può affermarsi che, dal suo inizio sino ad oggi, la radiotelegrafia è stata praticamente realizzata mediante l'utilizzazione di oscillazioni elettriche discontinue, cioè di gruppi successivi di oscillazioni di amplitudine ineguale, prodotte dalla scarica di un condensatore o bottiglia di Leyda.

Le oscillazioni elettriche prodotte dalla scarica di un condensatore furono intravvedute da Henry e da Lord Kelvin, poi studiate matematicamente da Clerk Maxwell e finalmente rilevate sperimentalmente da Hertz.

È ora ben noto che, allorchè due conduttori a differente potenziale vengono messi elettricamente in contatto l'uno con l'altro, per esempio mediante una scintilla, dato che la resistenza del circuito non sia troppo elevata, i conduttori raggiungono il medesimo potenziale solo dopo un numero più o meno grande di oscillazioni elettriche e per conseguenza i conduttori divengono per breve tempo sede di una corrente alternata che può essere di altissima frequenza.

Se uno dei conduttori è la terra e l'altro un filo verticale, si ha la parte essenziale del sistema col quale iniziai nel 1895 le mie prime esperienze sulla radiotelegrafia. Perfezionamenti successivi hanno aumentato la sicurezza e la portata di trasmissione degli apparecchi. A tale riguardo è assai notevole il progresso assicurato alla radiotelegrafia dall'accoppiamento

sintonico dell'antenna ad un circuito oscillante, come è indicato nel mio brevetto inglese dell'aprile 1900 e nella conferenza che tenni alla Society of Arts di Londra il 15 maggio 1901.

Lo smorzamento o il decremento delle oscillazioni generate nel modo, al quale ho accennato e l'intervallo di tempo che separa i gruppi consecutivi di oscillazioni (intervallo reso necessario dal tempo relativamente lungo richiesto per la carica dei condensatori) presentano alcuni inconvenienti in riguardo alla radiotelegrafia, ed altri molto più serii in riguardo alla radiotelefonia; ed è perciò che molti cultori di questo ramo della scienza si sono dedicati alla ricerca di un metodo che permetta di introdurre e di irradiare oscillazioni continue.

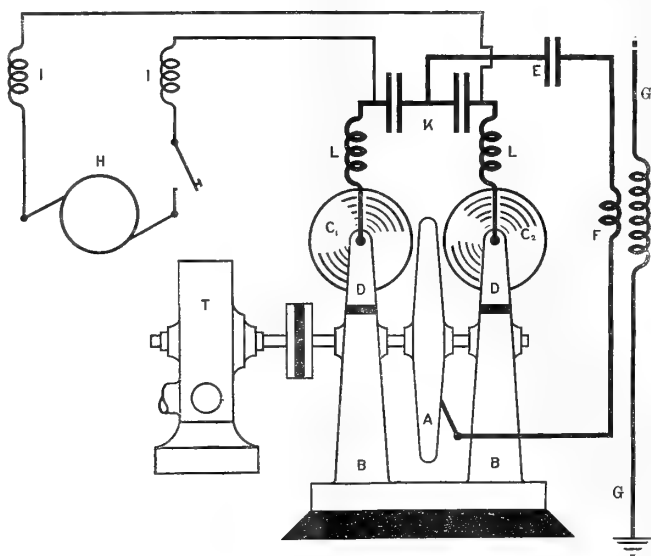



Fig. 1.

Esistono due metodi, ora abbastanza bene conosciuti, per la produzione delle onde continue. Uno è il cosiddetto arco musicale del Duddell perfezionato dal Poulsen, e l'altro l'alternatore ad alta frequenza, come per esempio l'alternatore del Goldschmidt.

Non è mia intenzione di esaminare ora in dettaglio questi due sistemi; ma accennerò solo che esistono difficoltà pratiche in riguardo ad entrambi, le quali ne hanno sinora ostacolato la pratica applicazione.

Il primo dispositivo col quale ottenni di produrre oscillazioni continue secondo il mio brevetto inglese dell' 11 aprile 1907 è indicato nella fig. 1 e consiste di un disco metallico A isolato che è fatto ruotare a grandissima velocità a mezzo di una turbina o di un motore elettrico. In vicinanza dell'orlo di questo disco, che chiamerò disco principale, sono montati altri due dischi C_1 e C_2, che chiamerò dischi polari e che sono pure fatti girare ad

alta velocità. I due dischi polari sono connessi rispettivamente per mezzo di spazzole alle armature esterne di due condensatori K, collegati in serie, e questi condensatori sono a lor volta collegati attraverso a resistenze e induttanze ai serrafili di una dinamo H a corrente continua ad alto potenziale oppure ad una batteria di accumulatori ad alto potenziale.

Il disco principale è collegato alle armature interne dei due condensatori e fa parte di un circuito oscillante formato dal condensatore E in serie con l'induttanza F, la quale è collegata direttamente o induttivamente al filo aereo G.

Caricando i condensatori mediante un generatore od una dinamo di potenziale abbastanza elevato, si stabilisce una scarica elettrica fra i dischi polari e quello principale (la quale scarica non è una scintilla e neppure un arco ordinario) e nel circuito relativo vengono prodotte oscillazioni elettriche continue la cui frequenza dipende dall'induttanza e dalla capacità del circuito medesimo.

L'apparato funziona probabilmente nel modo seguente:

Immaginiamo che l'elettrogeneratore H carichi gradatamente il doppio condensatore K, e che il potenziale ai dischi C_1 e C_2 venga ad aumentare, per esempio C_1 positivamente e C_2 negativamente; ad un certo istante, questo potenziale dà origine ad una scarica attraverso ad uno dei piccoli spazî esistenti, supponiamo fra C_2 ed il disco principale A. Questa scarica dà origine, a sua volta, ad una oscillazione attraverso l'induttanza F e il condensatore E, e questa oscillazione nell'invertire la sua polarità, passerà di preferenza dal disco A al disco C_1, il quale si trova già caricato ad un potenziale opposto. La carica del condensatore E cambierà nuovamente di segno, prendendo energia, ad ogni inversione di segno, dalla carica dei condensatori K, tenuti carichi dal generatore.

Lo stesso ciclo può continuare indefinitamente; le perdite che hanno luogo nel circuito oscillante o radiante, vengono sostenute dal generatore H.

Se si tiene fermo il disco principale, si stabilisce subito un arco ordinario attraverso gli spazî esistenti fra i dischi, senza che avvenga alcuna produzione di oscillazioni.

Questo sistema è stato riconosciuto applicabile finora per piccole potenze, ma presenta l'inconveniente di una non perfetta costanza di funzionamento.

Un altro mio dispositivo per la produzione di oscillazioni continue, che è attualmente impiegato nelle trasmissioni transatlantiche, mediante il quale possono utilizzarsi potenze illimitate, si basa sul principio di riunire successivamente fra di loro in perfetta fase diversi gruppi di oscillazioni generate dalla scarica di appositi circuiti oscillanti.

Con l'aiuto della fig. 2 cercherò di spiegare meglio la mia concezione.

Nella terza linea di questa figura sono indicati gruppi di oscillazioni smorzate, separate da spazî irregolari. Nella seconda linea sono indicati gruppi di oscillazioni ravvicinati e separati da intervalli eguali, ed in prima linea sono indicate oscillazioni continue.

Nella terza linea abbiamo le condizioni che esistevano nei vecchi sistemi a scintilla, ove i gruppi di oscillazioni si susseguivano ad intervalli irregolari.

Le oscillazioni a gruppi vicini e regolari, che rappresentano un grandissimo progresso nell'arte della radiotelegrafia, sono ottenute mediante l'im-

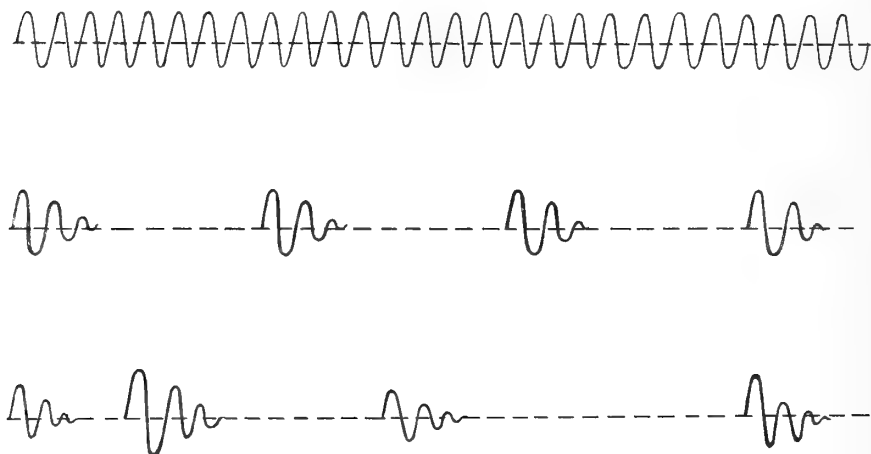



Fig. 2.

piego di un apparecchio illustrato nella fig. 3, che consiste di un disco metallico isolato *a* avente prominenze metalliche fissate a regolari intervalli sulla periferia e perpendicolari al piano del disco. Il disco è fatto girare a grande velocità, mediante un apposito motore, fra due altri dischi *b b*. Le prominenze del disco centrale sono di lunghezza tale da toccare quasi i due dischi esterni, chiudendo in questo modo il circuito a regolari intervalli. La chiusura subitanea del circuito diminuisce notevolmente la resistenza della scintilla, con relativa diminuzione dello smorzamento delle onde, mentre poi il subitaneo aprirsi del circuito, appena le prominenze del disco centrale si allontanano dalla periferia dei dischi laterali *b b*, smorza le oscillazioni che ancora potessero esistere nel circuito del condensatore, per modo che, dato un giusto valore di accoppiamento fra il circuito del condensatore e il radiatore, l'energia del circuito del condensatore passa tutta al radiatore, senza che avvenga la nota reazione fra circuiti accoppiati.

Il vantaggio di questo sistema è che vengono irradiati gruppi regolari di oscillazioni elettriche, l'intervallo fra i gruppi essendo tale da produrre

nel ricevitore una nota musicale facilmente distinguibile dai suoni e dai rumori prodotti dai disturbi causati dalla elettricità atmosferica.

Il sistema di onde discontinue, alle quali ho ora accennato, è quello attualmente in uso in tutte le stazioni ultrapotenti impiantate dalla Compagnia Marconi.

Il concetto che ho avuto nell'adottare i dispositivi che ora descriverò è stato quello di ottenere gruppi di oscillazioni sufficientemente ravvicinati e in fase fra di loro in modo tale che il loro effetto induttivo su di un circuito risuonante sia quello di indurvi e mantenervi una corrente alternata ad alta frequenza.

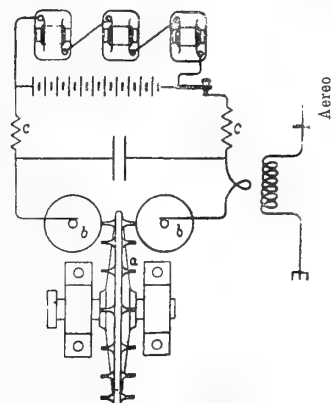



Fig. 3.

Il sistema di onde continue, a cui ora mi riferisco, è basato sull'effetto cumulativo di un ciclo di scariche allo stesso periodo e tutte in fase, che agiscono induttivamente su di un comune radiatore.

Infatti, se consideriamo bene il sistema indicato nella fig. 2, linea seconda, risulta evidente che, se si potessero sufficientemente riavvicinare fra di loro i varii gruppi di oscillazioni, si potrebbe ottenere una oscillazione continua; ma a ciò si oppongono due ostacoli negli apparecchi ordinarî. Il primo ostacolo è causato dal tempo richiesto per la carica del condensatore, essendo ovvio che il condensatore non può venire caricato e scaricato al medesimo tempo; e il secondo ostacolo è causato dal fatto che i gruppi successivi di oscillazioni debbono essere in fase gli uni con gli altri, come pure col periodo di oscillazione del radiatore.

Tentativi di ottenere gruppi assai ravvicinati, senza riguardo alla loro fase, sono già stati fatti da varî studiosi sperimentatori.

Io credo di aver risolto il problema facendo uso dell'apparecchio che descriverò con l'aiuto della fig. 4.

In questo sistema vengono impiegati un numero di circuiti oscillanti 1, 2, 3, 4. caricati mediante la medesima sorgente di energia attraverso

le rispettive induttanze. Ogni circuito di scarica comprende una ruota metallica dentata, D_1, D_2, D_3, D_4, un condensatore e una induttanza collegata induttivamente al radiatore o ad un circuito intermedio il quale in questo caso è accoppiato al radiatore.

Le ruote dentate sono isolate fra di loro, ma montate rigidamente su di medesimo asse e disposte in modo che i condensatori vengono scaricati e ricaricati successivamente a regolari intervalli uno dopo l'altro, cosicchè, a date velocità, l'intervallo fra il principio della scarica di un condensatore e il principio della scarica del condensatore successivo sia eguale al periodo di oscillazione dell'aereo o del circuito intermedio, oppure sia un multiplo esatto di detto periodo di oscillazione.

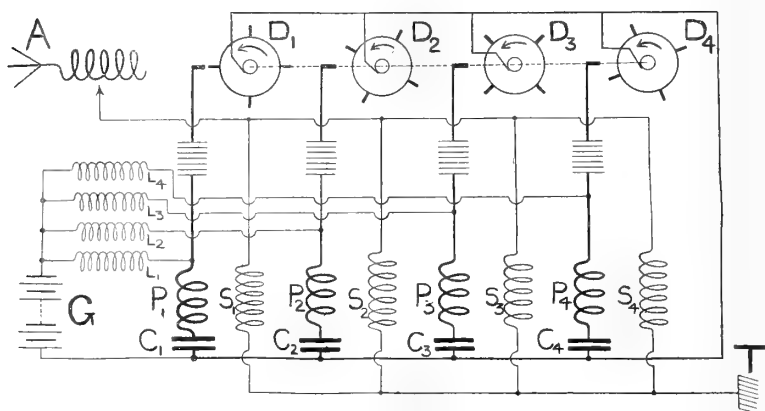



Fig. 4.

Per assicurare che il principio di ciascuna scarica avvenga esattamente al tempo prestabilito, viene fatto uso, nel circuito di scarica, di una scintilla ausiliaria fatta scattare mediante un altro disco, che per semplicità è omesso nella figura: questa scintilla avviene ad un potenziale maggiore di quello della scarica principale ed è ottenuta mediante piccoli condensatori ausiliarî.

L'effetto finale di questo sistema è indicato nella fig. 5, ove sono indicate le oscillazioni prodotte in ordine di rotazione dai quattro circuiti e la oscillazione continua risultante, indotta nell'aereo.

Riguardo a tale sistema di produzione di onde continue, la Commissione tecnica nominata dal Governo Inglese per riferire sui meriti dei sistemi esistenti di radiotelegrafia a lunga distanza, ed in particolare sulla loro capacità per continue comunicazioni attraverso distanze di 2000 miglia, dichiarò nella Relazione Ufficiale del 30 aprile 1913, che il sistema sopra descritto è il solo che sia stato visto dalla detta Commissione applicato con successo per lunghe distanze.

Potrebbe sembrare che con dischi giranti alle più grandi velocità praticamente realizzabili dovesse essere impossibile ottenere una frequenza abbastanza alta per scopi radiotelegrafici; ma questa difficoltà più non si presenta in riguardo alle stazioni funzionanti a distanza di 4000 o più chilometri, nelle quali oscillazioni di frequenza superiore ai 50000 periodi non trovano utile impiego.

Sino a quando si credette necessario di dover adoperare onde di centinaia di migliaia di periodi, come quelle prodotte dalle scariche dei condensatori ordinarî, vi fu pochissima speranza di poter costruire alternatori o altri macchinarii capaci di produrre oscillazioni di sì alta frequenza.

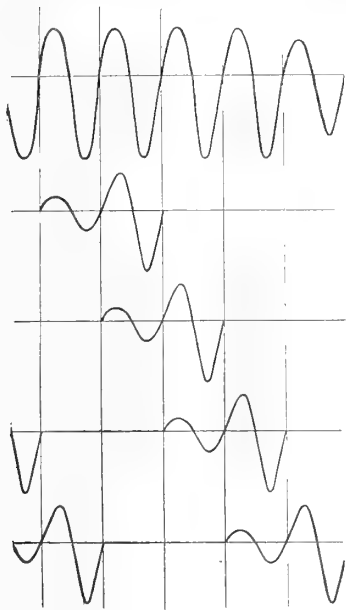



Fig. 5.

Dieci anni or sono, si credeva generalmente che per la radiotelegrafia fossero necessarie frequenze elevate, di almeno 100000 periodi al secondo. L'esperienza da me acquistata nelle trasmissioni attraverso le grandi distanze mi ha dimostrato che frequenze superiori a quella di 40000 periodi offrono un rendimento assai minore di quello assicurato dalle frequenze più basse; io ho potuto in pari tempo scoprire che onde lunghe dieci o più chilometri si propagano a distanza assai maggiore, a parità di energia, di quella raggiunta con onde di un chilometro o meno. Questa scoperta ha grandemente facilitato e incoraggiato lo studio e la costruzione di alternatori ad alta frequenza ed anche quello degli altri sistemi che ho più sopra descritto.

Per meglio illustrare il principio mediante il quale ho trovato possibile di riunire consecutivamente in fase una serie di gruppi di oscillazioni in

modo da produrre oscillazioni continue, eseguirò un pratico esperimento che spiegherò con l'aiuto della fig. 6.

Mi è però impossibile il dimostrare qui in funzionamento un dispositivo identico a quello che ho già descritto, mancando la corrente continua ad alto potenziale.

In luogo dei condensatori caricati ad alto potenziale, faccio qui uso di una induttanza L_1 caricata, mi si permetta l'espressione, con una corrente fornita da una batteria B.

Quando la spazzola K è in contatto con un dente del disco D, una corrente passa attraverso a L_1 e quando, in conseguenza del movimento rotativo del disco, il contatto è rotto, l'energia del campo magnetico L_1 è trasferita induttivamente al circuito $L_2 C$, e per conseguenza il circuito $L_2 C$ comincia ad oscillare con la frequenza del suo proprio periodo elettrico. Se

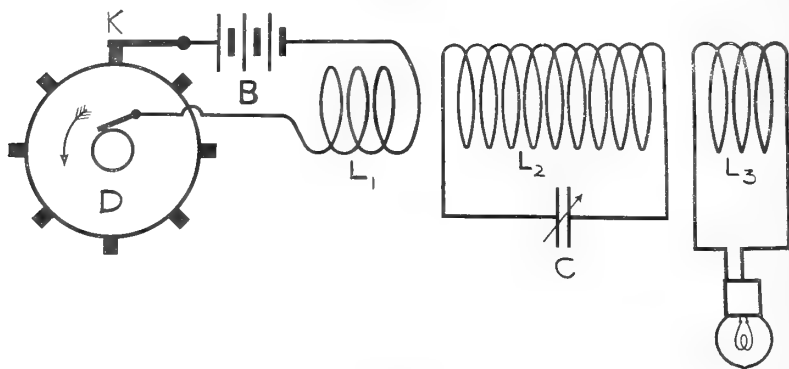



Fig. 6.

viene disposto che la velocità del disco dentato D sia tale che i denti successivi facciano e rompano contatto con la spazzola K in modo tale che le oscillazioni susseguenti siano tutte in fase con le oscillazioni precedenti, allora tutti questi gruppi di oscillazioni, se sufficientemente vicini, agiranno in modo da sommare i loro effetti producendo oscillazioni continue sul circuito $L_2 C$.

Appare evidente che la produzione delle oscillazioni continue può solo avvenire quando la velocità del disco è tale che le oscillazioni prodotte nel circuito $L_2 C$ siano in fase fra di loro, altrimenti i diversi gruppi di oscillazioni tenderebbero a neutralizzarsi ed interferire a vicenda.

Ora vedremo come una lampada si accenda in virtù delle oscillazioni indotte nel circuito $L_2 C$ quando tali oscillazioni siano in fase fra di loro.

Da tale esperimento si rileva altresì:

1°) che il massimo e il minimo valore di corrente si ottiene variando la capacità del condensatore C sino a dati valori, cioè variando opportunamente il periodo elettrico del circuito mentre la velocità del disco è mantenuta costante;

2°) che inoltre il massimo e il minimo valore di corrente sono ottenuti quando il periodo del circuito è mantenuto fisso, mentre la velocità del disco è variata sino a dati valori.

*
* *

L' uso che ora si comincia a fare delle onde persistenti non è affatto dovuto, come qualcuno crede, a proprietà speciali possedute da queste onde, in virtù delle quali tali onde otterrebbero di superare grandi distanze con minor spesa di energia di quella richiesta dalle onde discontinue, ma è piuttosto dovuto al desiderio di ottenere, nei ricevitori, migliori effetti sintonici, atti a permettere:

1°) di rendere minimi i disturbi causati da elettricità atmosferica;

2°) di rendere possibile il funzionamento di un numero maggiore di stazioni vicine, senza disturbo reciproco.

In riguardo alla eliminazione dei disturbi atmosferici, ho trovato che, in pratica, una accurata sintonia e un accoppiamento lasco fra i circuiti del ricevitore giovano pochissimo per diminuire l'influenza dannosa di questi disturbi.

Le onde elettriche prodotte dalla natura — delle quali sappiamo invero, al giorno d'oggi, pochissimo — hanno la proprietà di dare impulsi elettrici ai sistemi aerei dei ricevitori facendoli vibrare elettricamente col periodo proprio degli aerei stessi che è di necessità quello dell'onda che si desidera ricevere.

L'effetto perturbatore di queste onde naturali, chiamate spesso « intrusi » dai radiotelegrafisti, diviene rapidamente più intenso coll'aumentare della lunghezza d'onda per la quale il ricevitore è accordato. Di ciò si trova probabilmente la spiegazione nello stesso fatto che le onde lunghe attraversano grandi distanze con minori perdite che non le corte.

L'effetto ottenuto indebolendo l'accoppiamento dei ricevitori si risolve, in pratica, in una riduzione presso a poco in eguale proporzione tanto dei segnali quanto degli intrusi; e per conseguenza con tale prccedimento si ottiene ben poco vantaggio. Tuttavia esistono alcune differenze fra le onde prodotte dalle scariche atmosferiche e quelle utilizzate per la trasmissione dei segnali radiotelegrafici; tali differenze ci permettono di eliminare almeno una buona parte della influenza dannosa delle onde perturbatrici.

Colle onde discontinue, quando si fa uso di un sistema a disco come quello indicato nella fig. 3, la successione dei gruppi di onde produce nel telefono ricevitore una nota musicale caratteristica, facilmente distinguibile dai suoni prodotti dai disturbi atmosferici. Il poter far produrre un suono chiaro e caratteristico, è importantissimo; e sinora io non ho trovato alcun sistema che dia risultati tante sicuri quanto quelli nei quali si fa uso della nota musicale.

Il cosiddetto « intruso » in generale consiste di un impulso elettrico o di una piccola successione di impulsi irregolari producenti un effetto induttivo istantaneo assai rilevante.

I suoni prodotti nel telefono dell'apparecchio ricevitore dalle scintille elettriche cosiddette musicali, sono causati da un numero rilevantissimo di piccoli impulsi succedentisi a brevi e regolari intervalli.

I ricevitori moderni sono costruiti in modo da usufruire della differenza esistente fra gli intrusi e i segnali; così l'effetto dannoso dei disturbi atmosferici viene in gran parte eliminato.

Il ricevitore del quale è stato fatto uso per oltre due anni nelle stazioni adibite alle comunicazioni transatlantiche, è dimostrato nella fig. 7. In questa figura, P è il primario di un trasformatore di oscillazioni collegato all'aereo ricevente; S è il secondario.

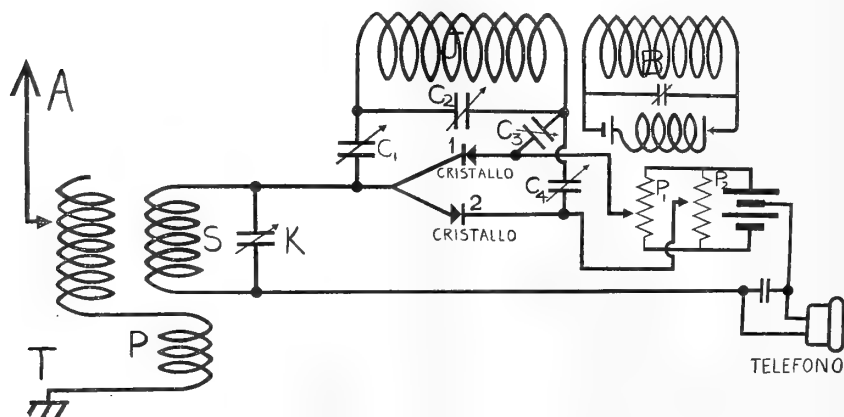



Fig. 7.

1 e 2 sono due cristalli sensibili o valvole di Fleming disposti in modo, con i relativi potenziometri, che, quando uno di essi è regolato per la massima sensibilità mentre l'altro è distaccato dal circuito, entrambi collegati insieme producono effetti opposti in maniera tale da non rilevare nè segnali nè intrusi. Si trova allora che se la regolazione del potenziometro P_2 è variata in modo tale che la forza elettromotrice in senso opposto prodotta da P_2 sia appena sufficiente da lasciare il cristallo 2 in istato non conduttivo per i segnali che si stanno ricevendo, le oscillazioni ricevute verranno efficientemente raddrizzate da 1, mentre i disturbi o i segnali di intensità maggiore faranno sì che impulsi di corrente del cristallo 2 si oppongano a quelli del cristallo 1.

Rendendo la resistenza di 2 un po' minore di quella di 1 si possono anche migliorare i risultati.

L'esperienza acquistata nell'uso delle onde continue specialmente mediante l'impiego delle scintille ausiliarie, ha suggerito un nuovo metodo di ricezione per tali onde continue, studiato da Mr. H. J. Round. Questo metodo è stato adottato con successo nelle trasmissioni a lunghissima distanza; esso offre

il vantaggio di usufruire dei principî utilizzati per la recezione delle onde discontinue e di produrre nei ricevitori una nota caratteristica, dipendente dal periodo di oscillazione delle onde trasmesse. Il dispositivo impiegato è semplicemente una modificazione del mio ricevitore che ho già sopra descritto; con tale dispositivo viene utilizzato il sistema, da me ideato, dei due rivelatori in opposizione (fig. 7).

Questi rivelatori sono disposti in modo che i loro effetti vengono a contrastarsi, ma in maniera che ognuno di tali rivelatori può solo ricevere i segnali se questi sono assai forti. I cristalli o rivelatori sono allora sottoposti all'azione di un vibratore in un circuito B che emette un'onda assai corta, di modo che, per brevissimi intervalli di tempo, i cristalli sono resi conduttori.

In tal modo si ottiene l'effetto di liberare l'energia immagazzinata nel circuito SK per brevissimi intervalli. Si rileva allora che se i gruppi di onde prodotte dal vibratore hanno un periodo di poco differente da un sottomultiplo del periodo dell'onda da riceversi, allora i segnali sono ricevuti con una chiara nota musicale.

Cosicchè, se la frequenza dell'onda da riceversi è di 50000 periodi ed il vibratore produce 4900 gruppi per secondo, una scarica avviene attraverso il telefono ogni dieci oscillazioni, col risultato che la nota ricevuta avrà un periodo di 1000 al secondo.

Questo metodo di recezione ha qualche analogia col mio sistema già descritto per la produzione dello onde continue.

A mio parere, i metodi di ricezione delle onde continue, che sono all'inizio del loro sviluppo, aprono un nuovo e grande campo sperimentale, promettente un importante passo nel progresso della radiotelegrafia e della radiotelefonia.

Matematica. — *Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Sia

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) f_1(\xi, x) d\xi$$

l'equazione risolvente dell'equazione integrale

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) f(\xi, x) d\xi .$$

Fra il nucleo dell'equazione primitiva e quello della risolvente passano le relazioni (1)

$$f(x, y) + f_1(x, y) = -\int_x^y f(x, \xi) f_1(\xi, y) d\xi = -\int_x^y f_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi .$$

Se il nucleo dell'equazione primitiva è della forma $f(x - \xi)$, ossia appartiene al *gruppo del ciclo chiuso* vi apparterrà anche il nucleo risolvente che avrà quindi la forma $f_1(x - \xi)$; e l'equazione precedente si scriverà:

$$\text{(I)} \qquad f(x) + f_1(x) = -\int_0^x f(\xi) f_1(x - \xi)\, d\xi = -\int_0^x f_1(\xi) f(x - \xi) d\xi .$$

Il prof. Tedone, in una recente Nota (2), si domanda quando il nucleo risolvente possa ottenersi dal primitivo mediante un numero finito di operazioni di derivazione e d'integrazione.

Risolviamo il problema nel caso in cui il nucleo risolvente si voglia che resulti dato da una espressione lineare a coefficienti costanti delle derivate e di integrali del nucleo primitivo; cioè:

$$\text{(1)} \quad f_1(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) + b_0 + b_1 \int_0^x f(\xi) d\xi + \\ + b_2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \cdots$$

2. Facendo uso delle notazioni impiegate per la composizione (3), la (I) si scriverà:

$$\text{(2)} \qquad f + f_1 = -\overset{\times}{f}\overset{\times}{f_1}$$

(1) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Paris, Gauthier-Villars 1913, pag. 67, form. (E) e (E').

(2) Rend. Acc. dei Lincei, seduta 1° febbraio 1914.

(3) Vedi le lezioni precedentemente citate, cap. IX.

ossia

$$f_1 = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}} .$$

D'altra parte,

$$\int_0^x f(\xi)d\xi = \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}$$

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)d\eta = \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Sia

$$f(0) = c_0 \quad , \quad f'(0) = c_1 \quad , \quad f''(0) = 2c_2 \, , \cdots , f^{(m)}(0) = m!\, c_m ;$$

sarà

$$f - c_0 = \overset{\times}{f'}\,\overset{\times}{1} \;,\; f - c_0 - c_1 x = \overset{\times}{f''}\,\overset{\times}{1}{}^2, \cdots , f - c_0 - c_1 x \cdots - c_m x^m = \overset{\times}{f^{(m)}}\,\overset{\times}{1}{}^m$$

e, facendo uso del simbolo di divisione [1],

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\;\overset{\times}{1}{}^{-1} = f' \quad , \quad \overset{\times}{\overline{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\;\overset{\times}{1}{}^{-2} = f'' \cdots$$

$$\overset{\times}{\overline{f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}}}\;\overset{\times}{1}{}^{-m} = f^{(m)} .$$

Avremo dunque [2]

$$a_0 f + a_1 \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\;\overset{\times}{1}{}^{-1} + a_2 \overset{\times}{\overline{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\;\overset{\times}{1}{}^{-2} + \cdots + b_0 + b_1 \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1} + b_2 \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^2 + \cdots = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}} .$$

Le operazioni simboliche di divisione e di moltiplicazione possono trattarsi come operazioni algebriche; quindi, riducendo a forma intera, avremo:

$$(3)\; \Big[a_0 \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^m + a_1 \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\;\overset{\times}{1}{}^{m-1} + \cdots + a_m (f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}) + \overset{\times}{b^0}\,\overset{\times}{1}{}^m + b_1 \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^{m+1} + b_2 \overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^{m+2} + \cdots \Big](1 + \overset{\times}{f}) = -\overset{\times}{f}\,\overset{\times}{1}{}^m .$$

Questa è una equazione integrale di secondo grado della cui soluzione mi sono occupato nelle mie lezioni sulle funzioni di linee [3].

[1] Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 16.

[2] L'uso di questo simbolo è qui intuitivo. L'ho già impiegato più in genrale nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton, che vedranno presto la luce.

[3] Per trasformare la equazione (2) nella (3) sarebbe bastato applicare m volte la integrazione alla equazione (2).

3. Come esempio, risolviamo il problema di *trovare un nucleo tale che il nucleo risolvente sia la derivata del primitivo*, cioè si abbia

$$f + f' = -\overset{\times\times}{f f'},$$

ossia

$$f' = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}\,.$$

Ma

$$f' = \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}{}^{-1}$$

quindi

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}{}^{-1} = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}$$

e, riducendo a forma intera,

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,(1+\overset{\times}{f}) = -\overset{\times\times}{f1}\,.$$

Questa equazione integrale si scrive, supponendo $c_0 = 1$ per trattare il caso più semplice,

$$\overset{\times}{f}{}^2 + f - 1 = 0\,.$$

Per risolverla, basta considerare l'equazione algebrica (¹)

$$y^2 + y - z = 0\,,$$

da cui segue

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4z}}{2}$$

Prendiamo la radice che si annulla per $z = 0$ e sviluppiamola in serie di potenze di z. Si otterrà

$$y = \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}\, \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{n!}\, z^n\,.$$

Sostituiamo, al posto di z, $\overset{\times}{1}$ e consideriamone le potenze simboliche come composizioni, cioè

$$\overset{\times}{1}{}^2 = x \quad , \quad \overset{\times}{1}{}^3 = \frac{x^2}{2!}, \ldots, \overset{\times}{1}{}^n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

(¹) Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 13.

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n! \, (n-1)!} x^{n-1} .$$

Questa funzione resulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione f doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Colle questioni che concernono il rotolamento di una superficie sopra un'altra applicabile, si collegano varie specie di problemi, ove ogni volta si tratta di determinare tutte le coppie di superficie applicabili che soddisfano a certe condizioni geometriche. In due Note, recentemente inserite in questi Rendiconti (¹), mi sono occupato dei problemi più direttamente attinenti alla teoria del rotolamento; nella presente mi propongo di risolvere un problema affine, che conduce ad una classe di superficie strettamente connesse colle deformate delle quadriche di rotazione e coi teoremi di Guichard.

A) *Trovare tutte le coppie di superficie applicabili* Σ, $\overline{\Sigma}$, *per le quali le distanze di un punto fisso* O *dello spazio da ogni coppia* $(P, \overline{P})$ *di punti corrispondenti nell'applicabilità hanno un rapporto costante* n.

Formeremo subito un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, della quale sono integrali le superficie cercate, procedendo nel modo seguente. Indichiamo con

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

la prima forma fondamentale comune a Σ, $\overline{\Sigma}$, e con 2ϱ, $2\overline{\varrho}$ rispettivamente i quadrati delle distanze dell'origine O da due punti corrispondenti $P \equiv (u, v)$, $\overline{P} \equiv (u, v)$; avremo, per ipotesi,

$$\overline{\varrho} = n^2 \varrho , \tag{2}$$

(¹) Vedi i fascicoli del 4 gennaio e del 1° febbraio 1914.

con n costante, intendendo per altro escluso il caso $n^2 = 1$, ove, come è ben noto, le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ sarebbero congruenti.

Ora sappiamo che ϱ soddisfa all'*equazione dell'applicabilità* (¹):

$$(3) \qquad \Delta_2\varrho - \Delta_{22}\varrho = 1 + \mathrm{K}(\Delta_1\varrho - 2\varrho),$$

dove i parametri differenziali e la curvatura K si riferiscono alla forma differenziale (1).

Scrivendo che $\overline{\varrho}$ soddisfa, alla sua volta, alla medesima (3), abbiamo

$$n^2\Delta_2\varrho - n^4\Delta_{22}\varrho = 1 + \mathrm{K}(n^4\Delta_1\varrho - 2n^2\varrho),$$

ed eliminando, colla (3), il $\Delta_{22}\varrho$, col sopprimere il fattore non nullo $1 - n^2$, resta l'equazione equivalente

$$(3^*) \qquad n^2\Delta_2\varrho = 1 + n^2 - 2\varrho\, n^2\mathrm{K}.$$

Questa esprime la condizione *necessaria e sufficiente* cui deve soddisfare la superficie Σ, perchè esista una sua deformata $\overline{\Sigma}$ nelle condizioni del problema.

Ora se, adottando le notazioni usate da Weingarten nelle sue ultime ricerche sulla teoria dell'applicabilità, poniamo

$$2\varrho = 2q,$$

e indichiamo con p la distanza algebrica dell'origine O dal piano tangente a Σ nel punto (u, v), con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di Σ, abbiamo (*Lezioni*, loc. cit.)

$$(4) \qquad \Delta_2\varrho = 2 - p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad , \quad \mathrm{K} = \frac{1}{r_1 r_2},$$

onde la (3*) si traduce nell'equazione finale

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{1 - n^2}{n^2} r_1 r_2 + p(r_1 + r_2) - 2q = 0 .$$

Dunque: *Le superficie Σ domandate sono tutte e sole le superficie integrali della equazione del secondo ordine* (I).

Questa ha precisamente la forma d'Ampère, considerata nelle citate ricerche di Weingarten, e corrisponde a porre

$$\varphi = \sqrt{p^2 + \frac{n^2}{1 - n^2} \cdot 2q}\ ;$$

la classe di superficie applicabili che ne deriva col metodo di Weingarten è quella delle deformate delle quadriche di rotazione (a centro).

(¹) Vedi le mie *Lezioni*, vol. I, § 69.

Non lascieremo di osservare che le superficie Σ così caratterizzate corrispondono anche, secondo il teorema di Malus, ad un problema di ottica. Supponiamo che i raggi emananti dal punto O si rifrangano attraversando Σ, secondo l'indice n di rifrazione; e si immaginino i raggi rifratti invariabilmente legati alla Σ nelle sue deformazioni. *Quando* Σ *si applica sulla* $\overline{\Sigma}$, *i raggi rifratti si concentrano nuovamente in un punto* O', *ed è costante* $= n$ *il rapporto dei segmenli* $\frac{O'P}{OP}$, *al variare di* P.

2. Abbiasi una superficie Σ integrale della (I), e quindi una sua deformata $\overline{\Sigma}$: e siano

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$
$$\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2$$

le due rispettive loro *seconde* forme fondamentali. Dalle formole delle *Lezioni* (§ 69), indicando con ϱ_{11}, ϱ_{12}, ϱ_{22} le derivate seconde covarianti di ϱ, abbiamo

$$(5)\qquad D = \frac{\varrho_{11} - E}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1\varrho}}\ ,\quad D' = \frac{\varrho_{12} - F}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1\varrho}}\ ,\quad D'' = \frac{\varrho_{22} - G}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1\varrho}}\ ,$$

e le analoghe per $\overline{\Sigma}$

$$(5^*)\qquad \overline{D} = \frac{n^2\varrho_{11} - E}{n\sqrt{2\varrho - n^2\Delta_1\varrho}}\ ,\quad \overline{D}' = \frac{n^2\varrho_{12} - F}{n\sqrt{2\varrho - n^2\Delta_1\varrho}}\ ,\quad \overline{D}'' = \frac{n^2\varrho_{22} - G}{n\sqrt{2\varrho - n^2\Delta_1\varrho}}\ .$$

In riguardo per altro alla realità di questa deformata $\overline{\Sigma}$, è da osservarsi che deve risultare positiva la quantità sotto il segno radicale nelle (5*), cioè

$$n^2 p^2 + (1 - n^2)\,2q.$$

Questo ha sempre luogo per $n^2 < 1$, mentre per $n^2 > 1$ una regione soltanto di Σ troverà una corrispondente reale sopra $\overline{\Sigma}$.

Dalle (5) (5*) segue che

$$\overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2$$

è una combinazione lineare delle due forme fondamentali di Σ, cioè

$$\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2 = \alpha(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) + \\ + \beta(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2)\,,$$

ove

$$\alpha = \frac{n^2 - 1}{n\sqrt{2\varrho - n^2\Delta_1\varrho}}\ ,\quad \beta = n\,\frac{\sqrt{2\varrho - \Delta_1\varrho}}{\sqrt{2\varrho - n^2\Delta_1\varrho}}\,.$$

Ne segue che l'equazione differenziale delle linee di curvatura,

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,dv + D''\,dv \end{vmatrix} = 0 ,$$

è la medesima per Σ, $\overline{\Sigma}$; cioè: *Sulle due superficie applicabili* Σ, $\overline{\Sigma}$ *si corrispondono le linee di curvatura.*

La circostanza ora osservata e noti teoremi generali (*Lezioni*, vol. II, § 240 e § 393) dimostrano che sussiste la proprietà seguente:

Le due superficie applicabili Σ, $\overline{\Sigma}$ *hanno rispettivamente a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura con due superficie a curvatura costante positiva, trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra.*

3. Le coppie di superficie applicabili $\Sigma, \overline{\Sigma}$ si sono già presentate nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard per le deformate delle quadriche di rotazione ([1]), e le formole che risultano da questa teoria saranno invocate più oltre per provare l'esistenza di *famiglie di Lamé* composte di superficie integrali della (I).

Qui aggiungiamo alcune altre osservazioni, dalle quali risulterà meglio il legame fra le attuali superficie Σ e le deformate delle quadriche di rotazione. In primo luogo dimostriamo: *L'inversione per raggi vettori reciproci col centro nel punto* O *cangia ogni superficie* Σ *integrale della* (I) *in un'altra superficie integrale* Σ'.

E infatti, se indichiamo cogli accenti le quantità relative a Σ', valgono in generale le formole

$$\left\{\begin{aligned} 2q' &= \frac{1}{2q} \quad , \quad p' = -\frac{p}{2q} \\ \frac{1}{r_1'} &= \frac{2q}{r_1} - p \quad , \quad \frac{1}{r_2'} = \frac{2q}{r_2} - p , \end{aligned}\right.$$

colle quali la (I) si trasforma in sè stessa.

Due tali superficie Σ, Σ', integrali della (I) ed inverse l'una dall'altra, hanno rispettivamente a comune l'immagine sferica delle loro linee di curvatura con due superficie S, S' colla (medesima) curvatura media costante. Ora si ha che: *Le superficie a curvatura media costante* S, S' *possono collocarsi nello spazio in guisa da formare le due falde di un inviluppo di sfere di Guichard, coi centri distribuiti sopra una deformata* Φ *di una quadrica rotonda, i raggi delle sfere eguagliando la distanza del centro da un fuoco principale quando* Φ *si applica sulla quadrica* ([2]).

([1]) Cfr. particolarmente i §§ 24, 25 della mia Memoria *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante.* Annali di matematica, serie 3ª, TOMO III.

([2]) Si noti che questa quadrica è un ellissoide allungato se $n^2 > 1$; è un iperboloide a due falde, quando $n^2 < 1$.

Inoltre, se con P, P' indichiamo due punti qualunque corrispondenti di Σ, Σ' (allineati con O), la retta OPP' è parallela alla congiungente i due punti corrispondenti di S, S', cioè alla normale alla deformata Φ della quadrica rotonda.

Dopo ciò, se supponiamo data Φ, e quindi le due superficie S, S' a curvatura media costante, ovvero le loro due parallele a curvatura costante positiva, le superficie Σ, Σ' sono perfettamente determinate (ciascuna a meno di un'omotetia) dalla costruzione seguente:

Dal centro O *si conduca la parallela alla normale generica di* Φ *e se ne stacchi un tale segmento* $OP = R$ *che la superficie* Σ, *luogo di* P, *abbia la normale parallela a quella di* S *nel punto* M *corrispondente, ciò che determina (per quadrature)* R *a meno di un fattor costante. La superficie* Σ *così ottenuta è un integrale della* (I); *e la sua reciproca* Σ', *ottenuta staccando il segmento inverso* $OP' = \frac{1}{R}$, *ha le normali parallele alle corrispondenti di* S'.

Si vede adunque che le trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva, date dalla inversione dei teoremi di Guichard (Mem. cit.), acquistano il più semplice significato per le superficie Σ integrali della (I), venendo a coincidere colla inversione per raggi vettori reciproci.

Un'altra osservazione importante è la seguente: Si sa che sulla deformata Φ della quadrica rotonda Q alle linee di curvatura di (S, S'), (Σ, Σ') corrispondono le linee del *sistema coniugato permanente*, cioè di quel sistema coniugato di Φ che si conserva coniugato sulla quadrica Q. Ne risulta il teorema:

Le projezioni sferiche delle linee di curvatura di una superficie Σ *integrale della* (I), *fatte dall'origine* O *sopra una sfera col centro in* O, *sono le immagini di Gauss del sistema coniugato permanente per una deformata* Φ *della quadrica rotonda.*

4. Dalle deformate delle quadriche rotonde *a centro* passiamo a quelle del paraboloide rotondo, sostituendo al problema A) del n. 1, che concerne deformazioni finite, un problema analogo per deformazioni *infinitesime*:

A*) *Trovare le superficie* Σ *che ammettono una deformazione infinitesima, per la quale le distanze di un punto fisso* O *nello spazio dai punti di* Σ *vengono alterate in un rapporto costante (infinitamente prossimo all'unità).*

Indicando con $\delta\varrho$ la variazione di ϱ, avremo

$$\delta\varrho = \varepsilon\varrho,$$

con ε costante infinitesima. Ne seguono le formole

$$\delta\Delta_1\varrho = 2\varepsilon\Delta_1\varrho$$
$$\delta\varrho_{11} = \varepsilon\varrho_{11} \quad , \quad \delta\varrho_{12} = \varepsilon\varrho_{12} \quad , \quad \delta\varrho_{22} = \varepsilon\varrho_{22}$$
$$\delta\Delta_2\varrho = \varepsilon\Delta_2\varrho \quad , \quad \delta\Delta_{22}\varrho = 2\varepsilon\Delta_{22}\varrho$$

Variando la (3) n. 1, ne risulta, quale condizione necessaria e sufficiente,

$$\Delta_2\varrho - 2\Delta_{22}\varrho = \mathrm{K}(2\,\Delta_1\varrho - 2\varrho)\ ,$$

ovvero, combinando colla (3), l'equazione equivalente

$$\Delta_2\varrho = 2 - \mathrm{K}\,.\,2\varrho\,.$$

Questa, ricorrendo alle (4), si scrive sotto la forma

$$(\mathrm{I}^*) \qquad r_1 + r_2 = \frac{2q}{p}\ ,$$

che corrisponde a fare, nella (I), $n^2 = 1$ (o, propriamente, $n^2 = 1 + \varepsilon$).

Vediamo adunque che: *Le superficie* Σ *con deformazioni infinitesime della specie richiesta sono tutte e sole le superficie integrali della* (I*).

In queste deformazioni infinitesime le linee di curvatura si conservano, come si rileva sia dal considerare questo come un caso limite delle deformazioni finite ai nn. 1 e 2, sia dal calcolare la *variazione* della seconda forma fondamentale di Σ, che si compone linearmente colle due forme fondamentali. Da un noto teorema di Weingarten [1] segue, allora, che le attuali superficie Σ hanno per immagine sferica delle loro linee di curvatura un sistema isotermo, ossia hanno a comune *con una superficie d'area minima* l'immagine sferica delle linee di curvatura.

Tutte le proprietà che abbiamo descritte nei numeri precedenti per le superficie Σ integrali della (I), valgono ancora per le superficie integrali della (I*); ma soltanto le superficie a curvatura media costante S, S' sono da sostituirsi, nel caso attuale, con superficie d'area minima: e la quadrica rotonda a centro diventa ora il *paraboloide rotondo.*

5. Delle proprietà che abbiamo riconosciuto nelle superficie integrali della (I) e della (I*), la maggior parte è già contenuta nei miei citati lavori del 1899. Qui vogliamo stabilire l'altra, notevole:

Esistono famiglie di Lamé (*appartenenti a sistemi tripli ortogonali*) *costituite da superficie* Σ *integrali della* (I) *e della* (I*); *in queste si può dare ad arbitrio una particolare superficie* Σ *ed una delle curve traiettorie ortogonali della famiglia.*.

Trattando nel presente n.° il caso della equazione (I), dimostreremo che le nuove famiglie di Lamé si ottengono applicando convenientemente la *trasformazione di Combescure* alle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva. Questa curvatura potrebbe anche supporsi variabile da superficie a superficie, arrivando al medesimo risultato; ma qui, per abbreviare, considereremo solo il caso che la curvatura sia la stessa per tutte, e la porremo $= +1$.

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 227.

Un tale sistema triplo ortogonale (u, v, w), ossia un sistema di Weingarten, è definito dalla forma

$$(6) \qquad ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dell'elemento lineare dello spazio, soddisfacendo θ al sistema caratteristico di equazioni a derivate parziali [1]:

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh}\theta\cosh\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = -\operatorname{senh}\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} - \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right) = \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -\cosh\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} - \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,. \end{cases}$$

Indicando ora con c una costante arbitraria, tale, però, che sia

$$c(c+1) > 0,$$

denotiamo con

$$\Phi\,,\ \Lambda\,,\ \mathrm{M}\,,\ \mathrm{W}$$

una quaderna di funzioni incognite di u, v, w, assoggettate a soddisfare al seguente sistema differenziale, lineare ed omogeneo:

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\,.\,\Lambda\,, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial v} = \cosh\theta\,.\,\mathrm{M}\,, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial w} = \dfrac{\partial\theta}{\partial w}\,.\,\mathrm{W} \\ \dfrac{\partial\Lambda}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mathrm{M} + c\operatorname{senh}\theta\,.\,\Phi - (c+1)\cosh\theta\,.\,\mathrm{W}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\Lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mathrm{M}\,, \quad \dfrac{\partial\Lambda}{\partial w} = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\,.\,\mathrm{W}\,; \\ \dfrac{\partial\mathrm{M}}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\Lambda\,, \quad \dfrac{\partial\mathrm{M}}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\Lambda\,. + c\cosh\theta\,.\,\Phi - (c+1)\operatorname{senh}\theta\,.\,\mathrm{W}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\mathrm{M}}{\partial w} = \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{W}\,; \\ \dfrac{\partial\mathrm{W}}{\partial u} = \cosh\theta\,.\,\Lambda\,, \quad \dfrac{\partial\mathrm{W}}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\,.\,\mathrm{M}\,, \\ \qquad (c+1)\dfrac{\partial\mathrm{W}}{\partial w} = c\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\Phi - \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\Lambda - \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{M}\,. \end{cases}$$

[1] *Lezioni*, vol. II, § 431.

In forza delle (a), questo è un sistema *illimitatamente integrabile*, onde possono scegliersi ad arbitrio i valori iniziali di Φ , Λ , M , W per un sistema di valori iniziali di u , v , w. Il sistema (A) possiede inoltre l' integrale quadratico

$$\Lambda^2 + M^2 - C\Phi^2 + (C+1) W^2 = \text{cost};$$

e noi intendiamo scelti i valori iniziali di Φ , Λ , M , W per modo che *la costante del secondo membro sia nulla*; sarà dunque, identicamente,

$$\Lambda^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1) W^2 = 0. \tag{7}$$

Dopo ciò, nella quaderna integrale (Φ , Λ , M , W) resteranno, a prescindere da una costante moltiplicativa, *due costanti arbitrarie*.

6. Ciò premesso, supposta scelta una quaderna integrale (Φ , Λ , M , W) di (A), e indicando con ξ , η , ζ le coordinate di un punto nello spazio, poniamo

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \Lambda X_1 + M X_2 + W X_3 \\ \eta &= \Lambda Y_1 + M Y_2 + W Y_3 \\ \zeta &= \Lambda Z_1 + M Z_2 + W Z_3 , \end{aligned} \right.$$

dove $(X_1\, Y_1\, Z_1)$, $(X_2\, Y_2\, Z_2)$, $X_3\, Y_3\, Z_3)$ denotano i coseni delle tre direzioni principali nel sistema triplo ortogonale (6) di Weingarten.

Dimostreremo che: *le formole* (8) *definiscono un sistema triplo ortogonale* [*trasformato di Combescure del sistema* (6) *di Weingarten*], *nel quale la famiglia* $w = cost$ *è formata di superficie* Σ *integrali della* (I) *con* $c = \dfrac{n^2}{1-n^2}$.

Derivando le (8), coll'aver riguardo alle (A) ed alle formole per le derivate dei coseni, si trova

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= c(\operatorname{senh}\theta\, \Phi - \cosh\theta\, .\, W)\, .\, X_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= c(\cosh\theta\, \Phi - \operatorname{senh}\theta\, W)\, X_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= c\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\Phi - \frac{\partial W}{\partial w}\right) . X_3 \, , \end{aligned} \right.$$

colle analoghe per η, ζ; ne segue

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = c^2 \left\{ (\operatorname{senh}\theta\, \Phi - \cosh\theta\, W)^2 du^2 + \right.$$
$$\left. + (\cosh\theta\, \Phi - \operatorname{senh}\theta\, W)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\Phi - \frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 dw^2 \right\} .$$

Queste formole pongono in evidenza appunto che le (8) definiscono un sistema triplo ortogonale, trasformato di Combescure del sistema (6) di Weingarten.

Ma di più, se calcoliamo i raggi principali ϱ_1 ϱ_2 di curvatura delle superficie $w = \text{cost}$ nel nuovo sistema, troviamo

$$\varrho_1 = c\,(\coth \theta\Phi - \mathrm{W}) \;,\; \varrho_2 = c\,(\mathrm{tgh}\, \theta\Phi - \mathrm{W}),$$

e, quindi,

$$\varrho_1\,\varrho_2 + c\mathrm{W}\,(\varrho_1 + \varrho_2) = c^2\,(\Phi^2 - \mathrm{W}^2),$$

ossia, per la (7),

$$\varrho_1\,\varrho_2 + c\mathrm{W}\,(\varrho_1 + \varrho_2) - c\,(\mathit{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2) = 0 .$$

Ma, dalle (8), abbiamo

$$p = \Sigma\xi\,\mathrm{X}_3 = \mathrm{W} \;,\; 2q = \Sigma\xi^2 = \mathit{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2,$$

e la precedente si scrive quindi,

$$\varrho_1\,\varrho_2 + cp\,(\varrho_1 + \varrho_2) - c\,.\,2q = 0\,,$$

che combina colla (I) ove si faccia

$$c = \frac{n^2}{1 - n^2}\,.$$

Così è provato quanto si voleva; e, di più, dalla arbitrarietà sussistente nei sistemi di Weingarten, facilmente si deduce che una superficie Σ della famiglia $w = \text{cost}$ può scegliersi ad arbitrio, e così pure può ad arbitrio prescriversi una delle curve (w) trajettorie ortogonali.

È manifesto poi dal n.° 3 che da un tale sistema triplo ortogonale (Σ) se ne deduce subito un secondo (Σ') con una inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine. I due sistemi di Weingarten aventi a comune le immagini sferiche con (Σ), (Σ'), sono dedotti l'uno dall'altro con una delle trasformazioni *reali*, studiate nella citata Memoria, che si compongono di due trasformazioni di Bäcklund coniugate immaginarie.

7. Da ultimo vogliamo provare che anche con superficie Σ integrali della (I*) si possono comporre famiglie di Lamé, e col medesimo grado di generalità.

Qui otterremo lo scopo, *in modo molto più semplice*, partendo da una famiglia di sfere di raggio costante $= 1$. Consideriamo adunque una sfera mobile (di raggio $= 1$), il cui centro percorra una curva arbitraria dello spazio; e indichiamo con w un parametro che fissa la posizione del centro sulla curva. Sopra una delle sfere segniamo, arbitrariamente, un sistema doppio di linee $(u\,,v)$ ortogonale ed isotermo. Si sa che le trajettorie orto-

gonali delle sfere segneranno corrispondentemente su ciascuna sfera $w = \text{cost}$ un sistema ortogonale isotermo (u, v) (¹). All'elemento lineare dello spazio, riferito a questo sistema triplo ortogonale (u, v, w), in cui le $w = \text{cost}$ sono sfere, si può dare la forma caratteristica

$$ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2) + dw^2, \tag{9}$$

dove θ dovrà soddisfare alle corrispondenti equazioni di Lamé:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta} \\ & \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{-\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w} + e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} \\ & \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = -e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} \\ & \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} \\ & \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = -e^{-\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w} + e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

L'integrazione di questo sistema è, per quanto precede, geometricamente immediata.

Scriviamo ancora le formole che valgono per le derivate dei coseni delle direzioni principali.

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}X_2 + e^{-\theta}X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3 \\ & \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}X_1 + e^{-\theta}X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_3 \\ & \frac{\partial X_3}{\partial u} = -e^{-\theta}X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta}X_2, \\ & \qquad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}X_1 - e^{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}X_3. \end{aligned} \right.$$

Indicando con m una costante arbitraria non nulla [parametro del paraboloide rotondo associato alle superficie Σ integrali della (I*)], consideriamo ora il sistema lineare seguente nella quaderna

$$(\Phi, \Lambda, M, W)$$

(¹) La corrispondenza segnata sulle sfere dalle loro trajettorie ortogonali è una rappresentazione conforme: precisamente un'affinità circolare di Moebius (*Lezioni*, vol. I, § 22).

di funzioni incognite:

$$
(B)\begin{cases}
\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = -e^{\theta} \mathit{\Lambda} \;,\quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = e^{\theta}\, \mathrm{M} \;, \\[2mm]
\qquad m\dfrac{\partial \Phi}{\partial w} = m\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\Phi + e^{\theta}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w}\mathit{\Lambda} + e^{\theta}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w}\mathrm{M} - \dfrac{\partial \theta}{\partial w}\mathrm{W} \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathit{\Lambda}}{\partial u} = -me^{-\theta}\Phi + \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\mathrm{M} + (e^{-\theta} - me^{\theta})\,\mathrm{W} \;,\quad \dfrac{\partial \mathit{\Lambda}}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\mathrm{M}\,, \\[2mm]
\qquad \dfrac{\partial \mathit{\Lambda}}{\partial w} = e^{\theta}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w}\mathrm{W} \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\mathit{\Lambda} \;,\quad \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = -me^{-\theta}\Phi + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\mathit{\Lambda} + (e^{-\theta} + me^{\theta})\,\mathrm{W}\;, \\[2mm]
\qquad \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial w} = e^{\theta}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{W} \\[2mm]
\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u} = -e^{-\theta}\mathit{\Lambda} \;,\quad \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v} = -e^{-\theta}\mathrm{M} \;,\quad \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial w} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\mathrm{W}\,.
\end{cases}
$$

Questo è nuovamente, a causa delle (b), un sistema completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico

$$\mathit{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 - 2m\,\Phi\mathrm{W} = \text{cost.}$$

Pensiamo ancora scelti i valori iniziali Φ, $\mathit{\Lambda}$, M, W per modo che la costante del secondo membro si annulli, e si abbia quindi, identicamente,

$$\mathit{\Lambda}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 = 2m\,\Phi\mathrm{W}. \tag{11}$$

Poniamo nuovamente, come in (8),

$$\xi = \mathit{\Lambda}X_1 + \mathrm{M}X_2 + \mathrm{W}X_3\,,\ \text{ecc.} \tag{12}$$

e dimostriamo che queste formole ci daranno il sistema triplo ortogonale domandato. Derivando, coll'osservare le (6) e le (10), troviamo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -m(e^{\theta}\,\mathrm{W} + e^{-\theta}\,\Phi)\,X_1\;,\quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = m(e^{\theta}\,\mathrm{W} - e^{-\theta}\,\Phi)\,X_2\,,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = m\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial w}\Phi\right).\,X_3\,,$$

e le analoghe, da cui

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = m^2\Big\{(e^{\theta}\,\mathrm{W} + e^{-\theta}\,\Phi)^2\,du^2 + (e^{\theta}\,\mathrm{W} - e^{-\theta}\,\Phi)^2\,dv^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial w}\Phi\right)^2 dw^2\Big\}\,,$$

formola che pone in evidenza il sistema triplo ortogonale.

Inoltre i raggi principali di curvatura ϱ_1, ϱ_2 delle $w = \text{cost}$ sono dati da

$$\varrho_1 = m(\Phi - e^{2\theta} \mathrm{W}), \quad \varrho_2 = m(\Phi + e^{2\theta} \mathrm{W}),$$

onde risulta

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2m\Phi.$$

Ma, a causa delle (11), (12), abbiamo

$$2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \Lambda^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{W}^2 = 2m\Phi\mathrm{W}$$

$$p = \xi \mathrm{X}_3 + \eta \mathrm{Y}_3 + \zeta \mathrm{Z}_3 = \mathrm{W}$$

e la precedente si scrive quindi

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2q}{p}.$$

Dunque la famiglia di Lamé $w = \text{cost}$ è costituita di superficie Σ integrali della (I*), come si era asserito.

Geologia. — *Su una nota di Steinmann intorno ai Diaspri di Prato in Toscana.* Nota del Socio C. De Stefani.

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota I del Socio Carlo Somigliana.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Benzine nitrosostituite, ottenute dai corrispondenti aminoderivati.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

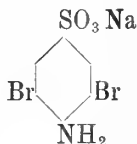
Nella precedente Nota [1] era stata descritta una serie di para-dinitrobenzine dialogenate, ottenute per sostituzione diretta del gruppo amidico con un nitro-gruppo passando attraverso al corrispondente diazocomposto. Tale sostituzione si raggiunse facendo scomporre da sola lentamente la soluzione acquosa del nitrito del diazocomposto a freddo.

Noi abbiamo applicato lo stesso sistema a molte altre aniline sostituite, ed abbiamo constatato, come del resto era prevedibile, che per molte di esse la sostituzione dell'amido-gruppo col gruppo nitrico si effettua assai facilmente e con ottima resa; per altre, invece, o la reazione non avviene affatto, o avviene con rendimenti tali da non essere degni di nota.

L'anilina ordinaria, per esempio, trasformata nel corrispondente nitrato e diazotata in corrente di acido nitroso, per trattamento con nitrito sodico non dà che tracce di nitrobenzolo. In modo analogo si comportano la orto, la meta e la para-nitroanilina. Invece una soluzione acquosa di acido bibromosolfanilico

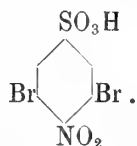
SO_3Na

Br ⬡ Br

NH_2

trattata a 0° con acido nitroso, indi con un eccesso di nitrito sodico in soluzione acquosa (due molecole per una molecola di acido bibromosolfanilico), e portato il liquido all'ebullizione per parecchio tempo, dà quantitativamente, dopo acidificazione con acido solforico diluito, l'acido bibromonitrosolfonico:

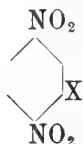
SO_3H

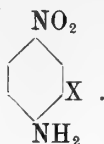
Br ⬡ Br.

NO_2

Così in modo analogo, come vedremo in seguito, si possono ottenere facilmente le dinitro-benzine monoalogenate del tipo:

NO_2

⬡ X

NO_2

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie V, 2° semestre, fascicolo 12, pag. 625.

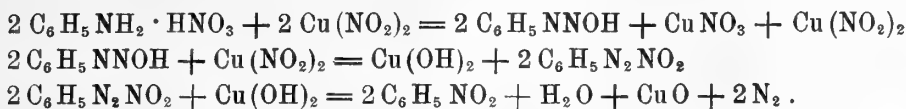
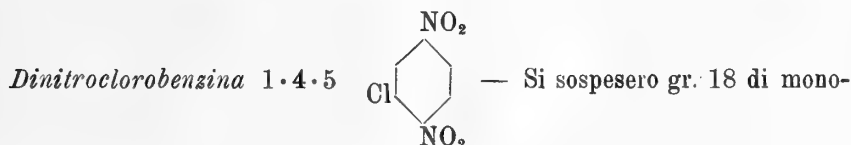
partendo dalle corrispondenti nitroaniline

Nei casi sopra esposti, nei quali la reazione non si effettua nel senso e con la resa desiderata, si può raggiungere lo scopo sostituendo alla soluzione di nitrito sodico o potassico una soluzione acquosa costituita da una miscela di solfato rameico (una molecola) e nitrito sodico o potassico (due molecole). Con questo sistema, oggi facilmente sono accessibili la para-dinitro e la ortodinitrobenzina partendo dalle corrispondenti nitroaniline. Così per ottenere la paradinitrobenzina si sospesero gr. 56 di paranitroanilina in ugual peso di acido nitrico concentrato della densità 1,4, e la poltiglia, raffreddata a 0°, venne fatta attraversare da una corrente di acido nitroso sino a completa diazotazione; scacciato l'eccesso dei vapori nitrosi con una corrente d'aria, il nitrato del diazocomposto si versò sopra ghiaccio finamente pestato, e il tutto si trattò con una miscela costituita da gr. 350 di solfato di rame cristallizzato e disciolto nell'acqua, e gr. 190 di nitrito sodico. Lasciato a sè il miscuglio per parecchie ore, si riscaldò, in seguito, a bagnomaria fino a cessazione dello svolgimento dei gas; si raccolse il precipitato nel filtro, e, dopo lavaggio, si sottopose a distillazione in corrente di vapor acqueo. Nel distillato si separava così la paradinitrobenzina con una resa del 75-80 °/₀ del calcolato teorico. In modo perfettamente analogo si prepara la ortodinitrobenzina; va solo notato che in questo caso si può adoperare più comodamente la quantità di acido nitrico strettamente calcolata per formare il nitrato dell'anilina stessa, diluire la massa con poca acqua e sottoporre in ultimo la poltiglia alla corrente dei vapori nitrosi.

In questo modo però non si può raggiungere ancora la sostituzione del gruppo amidico col gruppo nitrico nella metanitroanilina. Si raggiunge lo scopo seguendo una via ancor più semplice, applicabile solo però a quelle aniline che dànno sali piuttosto difficilmente dissociabili in soluzione acquosa.

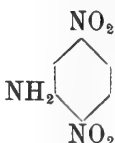
In un mortaio vennero macinati gr. 14 di metanitroanilina con la quantità strettamente necessaria di acido nitrico (densità 1,38) per trasformarla nel corrispondente nitrato (gr. 11). Alla poltiglia bianca venne aggiunta una soluzione fredda a 0° formata da gr. 100 di solfato di rame cristallizzato, e gr. 50 di nitrito di sodio in cc. 500 d'acqua. Si agita continuamente col pestello la miscela. Da principio si separa una massa fioccosa verde-chiara che, dopo poco, tempo diventa bruno-nera; e contemporaneamente si svolge una notevole quantità di gas. Il tutto venne lasciato a sè per una notte; indi, raccolto il precipitato sul filtro e lavato, venne distillato in corrente di vapor d'acqua. La resa in dinitrobenzina non è grande; ma si ottiene però subito

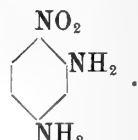
un prodotto purissimo. Da gr. 14 di metanitroanilina si ebbero gr. 5,5 di metadinitrobenzina. Questo modo di procedere dà ottimi risultati anche con l'anilina ordinaria e con l'ortonitroanilina. In quest'ultimo caso si ottiene un rendimento del 70 % sul calcolo teorico.

Secondo ogni probabilità, in questo processo la reazione avviene secondo lo schema:

$$2\,C_6H_5NH_2 \cdot HNO_3 + 2\,Cu(NO_2)_2 = 2\,C_6H_5NNOH + CuNO_3 + Cu(NO_2)_2$$
$$2\,C_6H_5NNOH + Cu(NO_2)_2 = Cu(OH)_2 + 2\,C_6H_5N_2NO_2$$
$$2\,C_6H_5N_2NO_2 + Cu(OH)_2 = 2\,C_6H_5NO_2 + H_2O + CuO + 2\,N_2\,.$$

Le paranitroaniline che contengono un atomo alogenico in posizione orto rispetto all'amido-gruppo, non sono trasformabili nelle paradinitrobenzine corrispondenti mediante la scomposizione del nitrato del loro diazocomposto in presenza della sopracitata soluzione di solfato ramico e nitrito sodico. Si deve ricorrere, in questo caso, alla reazione da noi descritta nella Nota precedente.

Dinitroclorobenzina 1·4·5 (formula: anello benzenico con NO_2, Cl, NO_2) — Si sospesero gr. 18 di monocloroparanitroanilina [1] in gr. 12 di acido nitrico della densità 1,38, e si aggiunsero cc. 30 di acqua. La poltiglia, sottoposta all'azione dei vapori nitrosi fino a completa diazotazione, e scacciato l'eccesso degli ossidi d'azoto con una corrente d'aria, venne versata sopra molto ghiaccio finamente pestato; indi si aggiunse una soluzione acquosa di nitrito sodico (gr. 45 in cc. 500 d'acqua), e il tutto venne lasciato a sè per una notte. Si raccolse il precipitato su filtro e, dopo lavaggio, venne distillato in corrente di vapor d'acqua. Dal distillato si separano laminette bianche lucenti del dinitroclorobenzolo, che, raccolte e cristallizzate dall'alcool bollente, si separano in forme di aghi quasi incolori o, per lenta evaporazione dallo stesso solvente, in prismi splendenti, fusibili a 64°. La resa è di circa il 45 % del calcolato teorico.

Lo studio cristallografico della sostanza è in corso. La determinazione dell'azoto ha dato:

Sostanza gr. 0,253.

Azoto cc. 29,4 a $t^o = 10$; $H^o = 740$

" trovato % = 13,9

" calcolato per $C_6H_3(NO_2)_2Cl = 13,8$.

[1] Questa monocloroparanitroanilina fu preparata col metodo descritto da Flürsheim (Journ. Chem. Soc. 93, pag. 1773), metodo che abbiamo sempre seguito dopo constatato che quello del Brevetto Cassella fornisce un prodotto contenente circa 50 % di dicloroparanitroanilina.

Scaldata con ammoniaca alcoolica a 100° per dieci ore, la dinitroclorobenzina descritta si trasforma in tre differenti sostanze. Una parte di essa sostituisce l'atomo alogenico con un gruppo amidico, dando luogo alla formazione della dinitroanilina $NH_2 C_6H_3 (NO_2)_2$ (formula di struttura: anello benzenico con NH_2 e due NO_2) fondente a 137°, già descritta dal Wender [1] e ottenuta dalla nitrazione diretta della metanitroacetanilide. In parte sostituisce l'atomo alogenico e uno dei gruppi nitrici con due gruppi amidici dando luogo alla formazione di una nitrofenilendiammina fusibile a 161° e cristallizzata in aghi gialloarancio alla quale spetta la formula $C_6H_3 NO_2 (NH_2)_2$ (anello benzenico con NO_2, NH_2, NH_2).

E da ultimo una parte lascia sostituire il gruppo nitrico, adiacente all'atomo alogenico, col gruppo NH_2, rigenerando la cloronitroanilina dalla quale si era partiti. Dosando la quantità di alogeno uscita in questa reazione, si trova che essa corrisponde a un quarto dell'alogeno totale presente, e per ciò i tre quarti della sostanza si trasformano nella cloronitroanilina; e per un quarto, in proporzioni pressochè eguali, si ottengono nitrofenilendiamina e dinitroanilina.

Per separare questi tre prodotti, si evaporò la soluzione ammoniacale a secco; e il residuo solido, lavato con acqua, venne sottoposto a distillazione in corrente di vapore. Nel distillato passa una piccola parte della dinitroclorobenzina rimasta inalterata insieme con la cloronitroanilina. Si estrae con etere il liquido; e l'estratto etereo, cristallizzato dall'acqua bollente dà per raffreddamento la cloronitroanilina pura. La parte non distillabile con vapor acqueo, cristallizzata dall'alcool bollente, abbandona, per raffreddamento, da prima grossi mammelloni duri di color rosso-arancio che, cristallizzati dall'alcool due volte con poco nero animale, si trasformano negli aghi giallo arancio della nitrofenilendiammina fusibile a 161°. Analizzati, diedero:

Sostanza gr. 0,1102.

Azoto cc. 26,6 a $t^0 = 11$; a $H = 746$

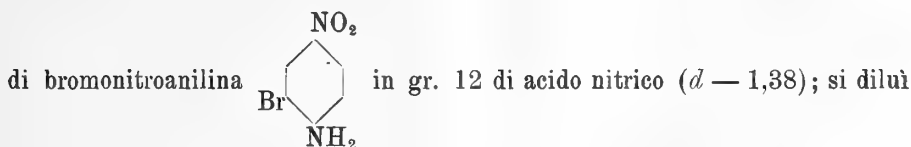
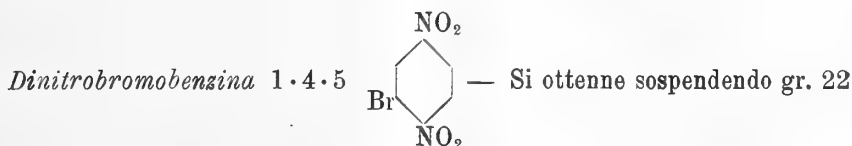
» calcolato per $C_6 H_3 NO_2 (NH_2)_2$ 27,45 %

» trovato 27·4 » .

Dalle acque madri alcooliche si separa in seguito buona parte della cloronitroanilina che non si era potuta distillare in corrente di vapore; e si

[1] Gazzetta chimica ital., XIX, pag. 226.

purifica ulteriormente per cristallizzazione dall'acqua, o per nuova distillazione in corrente di vapore. Nelle ultime acque madri è contenuta ancora la binitroanilina insieme con poca nitrofenilendiammina; ambedue si separano cristallizzandole frazionatamente dall'alcool. Rispetto alla maniera in cui si è formata la dinitrofenilendiammina, si può escludere che essa provenga dalla azione dell'ammoniaca alcoolica sopra la dinitroanilina generatasi eventualmente nella prima fase; poichè a 100° l'ammoniaca alcoolica è senza azione su questo prodotto.

Noi stiamo ancora istituendo prove per stabilire quale sia l'ordine di queste trasformazioni e quale influenza abbiano la temperatura e la concentrazione dell'ammoniaca nella formazione di questi prodotti.

Dinitrobromobenzina 1·4·5 ($C_6H_3(NO_2)_2Br$: anello con NO_2, Br, NO_2) — Si ottenne sospendendo gr. 22 di bromonitroanilina ($C_6H_3(NO_2)(NH_2)Br$: anello con NO_2, Br, NH_2) in gr. 12 di acido nitrico (*d* — 1,38); si diluì in seguito la massa col doppio del suo peso di acqua, e si sottopose alla corrente di acido nitroso a 0°. Per il resto si operò come nel caso precedente. La resa in dinitrobromobenzina è, in questo caso, assai inferiore al precedente; da gr. 36 di anilina si ebbero gr. 15 di prodotto. Nè il rendimento si può migliorare adoperando la miscela di solfato di rame e nitrito si sodio; anzi, con questo trattamento, non si hanno che tracce di dinitrobromobenzene. Per poter disporre di una certa quantità della nuova sostanza, abbiamo dovuto cercare un metodo comodo e facile per preparare la bromonitroanilina, essendo, quelli ora impiegati, lunghi e costosi.

Il metodo da noi seguìto è il seguente: Si sciolsero gr. 140 di paranitroanilina in gr. 2000 di acido acetico glaciale a b. m.; ed alla soluzione calda si aggiunsero gr. 160 di bromo disciolti in gr. 700 di acido acetico. Si agita e si lascia raffreddare. Si separano per raffreddamento lamine lucenti bianche di bromidrato di bromonitroanilina in quantità pressocchè teorica. Il precipitato, raccolto su rete di platino e lavato con poco acido acetico, venne in seguito versato in molta acqua per dissociare il sale. L'anilina formatasi, raccolta su filtro e lavata, venne cristallizzata dall'acqua bollente.

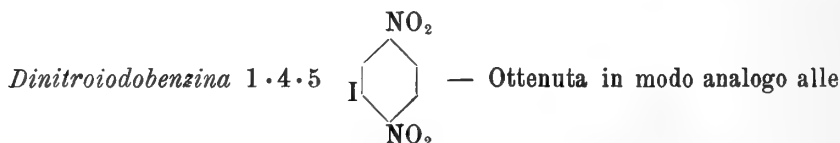
La dinitrobromobenzina ottenuta nel modo sopra esposto, cristallizza dall'alcool in aghi splendenti, quasi incolori e; dall'alcool e etere per lenta evaporazione si ottiene in grossi prismi fusibili a 70.° La determinazione di azoto ha dato:

Sostanza gr. 0,2012.

Azoto cc. 9,68 a $t^0 = 12$; a $H = 756$

" calcolato per $C_6H_3(NO_2)_2Br$ % = 11.33

" trovato % = 11,3.

Verso l'ammoniaca alcoolica si comporta in modo analogo alla corrispondente dinitroclorobenzina.

Dinitroiodobenzina 1·4·5 (formula: NO_2, I, NO_2) — Ottenuta in modo analogo alle precedenti, diazotando in corrente di acido nitroso a 0° la nitroiodoanilina

fusibile a 109° (gr. 26) sospesa in acido nitrico d = 1,38 (gr. 12) diluito in seguito con poca acqua. Si opera, per il resto, come nei casi precedenti. La resa è pressocchè quantitativa. Il prodotto, distillato in corrente di vapore, si cristallizza dall'alcool, nel quale solvente è solubile a caldo nelle proporzioni di uno ad otto e mezzo, e per raffreddamento si separa in aghi tozzi, quasi incolori, fusibili a 117°,4. Dalla soluzione etereo-alcoolica, satura a freddo, per lenta evaporazione si ottengono prismi giallo-chiari. La determinazione di azoto ha dato:

Sostanza gr. 0,255.

Azoto cc. 17,6 a $t^0 = 13$; a $H^0 = 740$

" calcolato per $C_6H_3(NO_2)_2I$ % = 9,53

" trovato % = 9,6.

L'ammoniaca alcoolica non altera questo prodotto a 100°; a 170° solo incomincia l'attacco, e la sostanza subisce un'alterazione assai profonda che è ancora sotto studio.

Stiamo studiando la sostituzione del gruppo amidico (NH_2) col gruppo nitrosile (NO_2) anche nelle diverse dinitroaniline; e riferiremo su questo argomento fra poco. Possiamo per altro affermare che tale sostituzione è possibile per tutte; solamente non è ancor possibile di stabilire *a priori* le migliori condizioni della reazione, variando esse da caso a caso.

Meccanica. — *Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica.* Nota del Corrisp. Emilio Almansi.

1. In un liquido omogeneo, indefinito (praticamente abbastanza esteso in tutte le direzioni), si abbia un numero qualunque di corpi $C, C', C'', \dots$, i quali subiscano rapide variazioni di forma, od anche solo di posizione, tali che il fenomeno presenti, nel suo insieme, un periodo θ piccolissimo.

Quando siano verificate certe condizioni che accenno più avanti, avviene che, per ogni corpo, la forza risultante delle pressioni che il liquido esercita sugli elementi della sua superficie ha, in un intervallo di tempo multiplo di θ, un valor medio corrispondente all'attrazione che su quel corpo eserciterebbero gli altri, se i corpi del sistema possedessero certe masse m, m', m'', ..., le quali si attraessero secondo la legge di Newton.

Questo interessante fenomeno, ed altri analoghi, furono per la prima volta studiati, in casi particolari, sia dal lato matematico, sia sperimentalmente, dal prof. C. A. Bjerknes. L'argomento è stato poi ripreso, ed ampiamente svolto in un suo corso di lezioni, dal figlio prof. V. Bjerknes (¹).

I procedimenti analitici da me seguìti in altra Nota (²), permettono di arrivare al risultato nel modo più semplice e generale.

2. Supporremo che nel movimento indotto nel liquido la velocità sia ovunque continua, derivi da un potenziale φ, e si annulli all'infinito; che i pesi delle particelle liquide siano trascurabili; che la densità sia uguale ad 1.

Denotiamo con (F) la forza che al tempo t agisce sopra un corpo C del sistema. Essa può decomporsi (Nota preced.) in due forze (F_0) ed (F). Le proiezioni X_0, Y_0, Z_0 sopra gli assi coordinati della forza (F_0) sono derivate esatte rispetto al tempo di funzioni periodiche col periodo θ: onde il valore medio (in un intervallo multiplo di θ) della forza stessa — vale a dire la forza che ha per proiezioni i valori medii di X_0, Y_0, Z_0 — è nullo. Noi trascureremo questa forza (F_0).

Le proiezioni della forza (F) sono

$$X = \int_\sigma \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} \alpha - \right.$$
$$\left. - \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] d\sigma,$$

(¹) *Fields of force,* Columbia University Press. New-York, 1906. Vedasi anche la Memoria di W. Voigt, *Beiträge zur Hidrodynamik,* Gött. Nachr., 1891.

(²) *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida,* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, dicembre 1913.

ecc., rappresentando σ la superficie del corpo, ed α, β, γ i coseni della normale esterna [1].

Il potenziale di velocità φ presenta, in ogni istante, tutti i caratteri del potenziale newtoniano di masse $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ distribuite negli spazî $S, S', S'', \ldots$ occupati dai corpi. Infinite distribuzioni dànno luogo, nello spazio esterno, allo stesso potenziale φ: noi supporremo di fissarne una. Verremo così a definire la funzione φ anche negli spazî $S, S', S'', \ldots$ Supporremo che essa risulti, in ciascuno di questi spazî, finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde. Attraversando le superficie dei corpi, la funzione φ e le sue derivate prime non dovranno subire discontinuità. La densità ϱ relativa a questa distribuzione di masse ideali sarà:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}.$$

Ciò posto, trasformiamo, nella espressione di X, l'integrale esteso a σ in un integrale esteso allo spazio S limitato da σ. Otterremo:

$$X = -\int_S \left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dS .$$

Poniamo

$$X_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad Y_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad , \quad Z_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} ,$$

e teniamo conto della espressione di ϱ. Avremo:

$$X = 4\pi \int_S X_1\, \varrho\, dS ,$$

e, analogamente,

$$Y = 4\pi \int_S Y_1\, \varrho\, dS \quad , \quad Z = 4\pi \int_S Z_1\, \varrho\, dS .$$

Queste formule possiamo interpretarle dicendo che *la forza* (F) *relativa al corpo* C *è, in ogni istante, quella stessa che si avrebbe se le masse* $\varrho\, dS$ *si attraessero secondo la legge di Newton, e la costante dell'attrazione fosse uguale a* 4π.

Parimente si potrebbe dimostrare che i momenti rispetto agli assi coordinati delle pressioni esercitate dal liquido sugli elementi di σ sono uguali ai momenti delle forze $4\pi X_1 \varrho\, dS$, ecc.

3. Supponiamo, ora, che le mutue distanze fra i corpi $C, C', C'', \ldots$ siano grandissime rispetto alle loro dimensioni lineari. Denoti P un punto

[1] Nella Nota preced. le X ed X_0 di questa Nota sono chiamate X_1 ed X_2; la quantità sotto il segno d'integrazione nella espressione di X (X_1) è denotata con —H. La espressione di H è data a pag. 537.

fisso, che si trovi costantemente nello spazio S occupato da C. Così per gli altri corpi C′, C″, ..., consideriamo i punti fissi P′, P″, ...

Nelle formule precedenti noi possiamo ritenere che X_1, Y_1, Z_1 siano le derivate del potenziale φ_1 dovuto alle sole masse esterne μ', μ'', ... (la resultante delle mutue azioni che si esercitano tra le masse elementari $\varrho\, dS$ di uno stesso corpo essendo identicamente nulla). Invece di X_1, Y_1, Z_1 scriviamo $X_1 + \delta X_1$, $Y_1 + \delta Y_1$, $Z_1 + \delta Z_1$, intendendo ora che X_1, Y_1, Z_1 siano le derivate, nel punto P, del potenziale φ_1 calcolato come se le masse μ', μ'', ... fossero concentrate nei punti P′, P″, ... Ponendo

$$\delta X = 4\pi \int_S \delta X_1\, \varrho\, dS, \text{ ecc.},$$

avremo: $X = 4\pi X_1 \mu + \delta X$, ecc. Ammettiamo che la forza di componenti δX, δY, δZ sia trascurabile rispetto alla forza di componenti $4\pi X_1 \mu$, $4\pi Y_1 \mu$, $4\pi Z_1 \mu$ (ciò che potrà non avvenire; per es., se $\mu = 0$). Potremo allora ritenere $X = 4\pi X_1 \mu$, ecc. Onde, detta r la distanza costante PP′, e posto

$$f = 4\pi \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

la forza (F) risulterà, in ogni istante, dall'attrazione (f) dovuta al corpo C′, e delle altre analoghe dovute agli altri corpi.

Le masse μ, μ', ... si possono esprimere molto semplicemente mediante i volumi S, S′, ... dei corpi corrispondenti. Si ha infatti:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

E poichè $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale alla componente, secondo la normale esterna, della velocità di un punto di σ, se diciamo ora dS l'incremento che subisce, nel tempo dt, il volume S, sarà

$$dS = dt \,.\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

e, perciò,

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \frac{dS}{dt}.$$

Analogamente sarà $\mu' = -\frac{1}{4\pi} \frac{dS'}{dt}$. Onde, ponendo

$$q = \frac{1}{4\pi} \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dS'}{dt},$$

avremo

$$f = \frac{q}{r^2}:$$

dalle quali formule vediamo che se in un certo istante i volumi S, S′ sono ambedue crescenti od ambedue decrescenti, e quindi $q > 0$, la forza (f) è realmente un'attrazione; altrimenti, è una ripulsione.

4. Il valor medio (F′) della forza (F), quindi ancora della forza (**F**), in un intervallo multiplo di θ, o uguale a θ, sarà la risultante della forza (f') di grandezza

$$f' = \frac{q'}{r^2},$$

ove q' è il valore medio di q, e delle analoghe relative agli altri corpi. Avremo dunque:

$$q' = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta q\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^\theta \frac{dS}{dt}\frac{dS'}{dt}\frac{dt}{\theta}\,.$$

Facciamo ora un'ipotesi più particolare intorno al modo di variare dei volumi S, S′, ecc.: supponiamo cioè che si abbia

$$S = S_0(1 + h\varepsilon)\,,\ \text{ecc.},$$

ove S_0 ed h rappresentano due quantità costanti per il corpo C, ε una funzione del tempo, periodica con periodo θ, uguale per tutti i corpi. Se poniamo $m = hS_0$, $m' = hS'$, sarà: $\frac{dS}{dt} = m\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{dS'}{dt} = m'\frac{d\varepsilon}{dt}$. E, perciò,

$$q' = \frac{m\,m'}{4\pi}\int_0^\theta \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 \frac{dt}{\theta}\,;$$

quindi

$$f' = k\frac{m\,m'}{r^2}\,,$$

essendo

$$k = \frac{1}{4\pi}\int_0^\theta \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 \frac{dt}{\theta}\,.$$

In questo caso, dunque, attribuito alla costante dell'attrazione il valore dato dall'ultima formula, si ha una perfetta analogia tra la forza (F′) e le attrazioni newtoniane delle masse ideali (costanti) m, m', ...

5. Nella formula $S = S_0(1 + h\varepsilon)$ noi possiamo sostituire ad ε una funzione lineare di ε, con che verranno solo a variare le costanti S_0 ed h. Potremo allora fare in modo che il massimo e il minimo valore della funzione periodica ε siano $+1$ e -1. Diciamo S_1 ed S_2 i valori corrispondenti di S (notando che, se la costante h è negativa, S_1 rappresenterà il valor *minimo* di S). Si avrà $S_1 - S_2 = 2hS_0 = 2m$; quindi

$$m = \tfrac{1}{2}(S_1 - S_2)\,.$$

Le masse m vengono così ad essere le semi-differenze fra i valori estremi dei volumi dei corpi.

Quanto alla costante k, osserviamo che, se s'introduce la variabile $\tau = \frac{t}{\theta}$, si ha $d\tau = \frac{dt}{\theta}$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\theta}\frac{d\varepsilon}{d\tau}$,

$$k = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}\right)^2 d\tau .$$

Di qui vediamo che per una determinata funzione $\varepsilon(\tau)$ (per esempio, se $\varepsilon = \operatorname{sen} 2\pi\tau = \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\theta}$) *la costante dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato del periodo.*

Matematica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota II del Corrispondente F. Enriques.

8. La costruzione delle superficie con un fascio di curve ellittiche C, di determinante 1, si desume dall'analisi fatta nella mia Nota citata, del gennaio 1912.

Tipo di codeste superficie di determinante 1 è un cono doppio di genere $p_g - p_a$ (per $p_a \geq 0$), avente una curva di diramazione che interseca le generatrici in tre punti variabili.

Nel caso delle *superficie regolari*, a cui possiamo riferirci per semplicità di discorso, si ha dunque come tipo *un tipo doppio con curva di diramazione d'ordine* $2n$, *dotata d'un punto* $(2n - 3)$ plo.

Appare così (accanto al determinante d, che nel nostro caso è preso $= 1$) *un secondo carattere intero delle superficie con* $p'' = 1$ $(p^{(1)} P_{12} > 1)$, cioè il numero n, *che può ricevere qualsiasi valore*

$$n = 4 , 5 , \ldots$$

(per $n = 3$ si ha una superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1 ;$$

per $n = 2$, una superficie razionale).

Se si assume ad arbitrio nel piano una curva di diramazione K_{2n} di ordine $2n$, con un punto $(2n - 3)$ plo, O, si ha un piano doppio che ha, *in generale*, i caratteri seguenti:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} p^{(1)} = 1 \\ p = p_a = p_g = n - 2 . \end{cases}$$

Ma i generi geometrici si abbassano in corrispondenza a punti tripli di K_{2n} infinitamente vicini ad O, o a punti quadrupli di K_{2n} non vicini ad O.

Quindi si possono avere per K_{2n} le singolarità seguenti:

(β) un punto 4-plo distinto da O, che porta

$$p = p_a = p_g = n - 3 :$$

oppure

(γ) $\sigma = 1, 2, \ldots \left(\sigma \leq \left[\frac{2n-3}{3}\right]\right)$ punti tripli infinitamente vicini ad O, che portano

$$p = p_a = p_g = n - 2 - \sigma .$$

Se la K_{2n} possiede altre singolarità, il suo ordine può essere abbassato con una trasformazione birazionale del piano.

In conclusione: *le superficie regolari con* $p^{(1)} = 1$, $p_g P_{12} > 1$, *di determinante* 1, *formano un'infinità numerabile di famiglie di piani doppi, la cui curva di diramazione ha l'ordine minimo*

$$2n = 8, 10, \ldots$$

Ad ogni valore di n *corrispondono* $\left[\frac{2n-3}{2}\right] + 2$ *famiglie di superficie, per cui*

$$p = p_a = p_g = n - 2, n - 3, \ldots n - 2 - \left[\frac{2n-3}{3}\right]$$

$$P_i = i(p-1) + 1 ;$$

vi sono due famiglie distinte per $p = n - 3$.

Le famiglie suindicate si possono caratterizzare come segue:

famiglia α): $p = n = 2$; *piano doppio privo di curve eccezionali*, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, dotata di punto $(2n-3)$ plo;

famiglia β): $p = n - 3$; *quadrica doppia priva di curve eccezionali*, con curva di diramazione, K_{2n}, d'ordine $2n$, composta di una generatrice r e d'una curva K_{2n-1} d'ordine $2n-1$, trisecante le generatrici dell'altro sistema;

famiglia γ):

$$\left(p = n - 2 - \sigma, \ \sigma = 1, 2, \ldots \left[\frac{2n-3}{3}\right]\right) ;$$

cono doppio, d'ordine $\sigma + 1$ *in* $S_{\sigma+2}$, *privo di curve eccezionali*, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, trisecante le generatrici.

9. È facile determinare la *base* delle superficie F' delle famiglie α), β), γ). Anzitutto osserviamo che, *in generale non vi sono, nel fascio di*

curve ellittiche C, *curve spezzate.* Curve C spezzate si presenteranno infatti quando la K_{2n} possieda un punto doppio o quando vi sia una tangente in O che tocca altrove K_{2n}; circostanze che non si avverano per la *più generale* superficie di alcuna delle famiglie suddette.

Ora si consideri sopra F′ una curva qualsiasi χ, secante in $\nu > 1$ punti le C. Sopra F′ esiste già — per ipotesi — una curva L, unisecante la C, corrispondente, sul piano doppio, al punto $(2n-3)$-plo di K_{2n}. Si può quindi [1] costruire su F′ una curva L_1 che seghi le C in *un* punto il quale, sommato con l'intersezione di L contata V — 1 volte, dia un gruppo equivalente all'intersezione di χ; si avrà dunque, per un noto criterio di equivalenza [2],

$$L_1 + (\nu - 1)\,L = \chi\,.$$

Si deduce, di qui, che *la base di una superficie* $F'(p^{(1)} = 1\,, p_g\,P_4 > 1)$ *di determinante* 1, *è costituita dal fascio di curve ellittiche* C *e da curve unisecanti le* C.

Ora si cerchi di determinare sul piano doppio. con una K_{2n} di diramazione, immagine di F′, una curva K_m d'ordine m, passante $m-1$ volte per il punto $(2n-3)$ plo di K_{2n}, la quale rappresenti una curva di F′ unisecante le C. Il calcolo di costanti che a tale scopo ho svolto nella citata Nota del gennaio 1912, è affetto di un errore che deve correggersi nel senso qui indicato; si correggerà quindi l'enunciato che ne consegue, che pure viene appresso riferito nella forma rettificata.

Le K_m con O $(m-1)$ plo dipendono linearmente da

$$2\,m$$

costanti. Affinchè una K_m (d'ordine dispari) rappresenti *due* unisecanti le C su F′, occorre che i

$$2n + 3(m-1)$$

punti intersezioni di essa con K_{2n} si riducano a

$$n + \frac{3(m-1)}{2}$$

contatti; ed occorre, altresì che gli $m-1$ punti di K_m infinitamente vicini ad O si riducano a

$$\frac{m-1}{2}$$

coppie di punti coincidenti.

Si hanno dunque

$$n + 2(m-1)$$

[1] Enriques, Nota citata, Lincei, gennaio 1912.

[2] Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (n. 6), Annali di Mat. 1905.

condizioni da soddisfare coi $2m$ parametri della K_m, il che è, *in generale*, impossibile. Affinchè esista una K_m rispondente al problema, bisogna [nel caso α)] che la K_{2n} soddisfi a

$$p = n - 2$$

condizioni.

Se la K_{2n} ha un punto 4-plo A fuori di O, le K_m per A dipendono da

$$2m - 1$$

costanti e le condizioni richieste sono 2 di meno. Si hanno dunque, nel caso β),

$$p = n - 3$$

condizioni per l'esistenza di K_m.

Se la K_{2n} ha σ punti tripli infinitamente vicini ad O, le K_m per essi dipendono da

$$2m - \sigma$$

costanti. I punti d'intersezione con K_{2n}, fuori di O, sono

$$2n + 3(m - 1 - \sigma)$$

da ridursi a

$$n + 3\,\frac{(m - 1 - \sigma)}{2}$$

contatti; e i punti infinitamente vicini ad O, oltre i punti tripli, sono

$$m - 1 - \sigma$$

da ridursi a

$$\frac{m - 1 - \sigma}{2}$$

coppie di punti coincidenti. Quindi le condizioni per l'esistenza della K_m richiesta, sono, nel caso γ),

$$n + 2(m - 1 - \sigma) - (2m - \sigma) = n - 2 - \sigma = p\,.$$

Si conclude che:

Sulle superficie F' *la base è in generale costituita dal fascio di curve ellittiche* C *e dalla loro unisecante; affinchè esista un'altra curva unisecante la* C, *indipendente dalla prima, la superficie deve soddisfare a* p *condizioni. Queste condizioni caratterizzano le superficie con un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (1).

(1) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rendic. Lincei (1905).

Una superficie F^d di determinante F^d avrà pure in generale il numero-base nguale a 2; e le *condizioni* perchè la base sia più ampia in guisa che esista un *gruppo discontinuo* di trasformazioni [1], si riducono alle condizioni analoghe per la superficie di determinante 1, F', che corrisponde a F^d (Cfr. Nota I).

Così, p. es., le superficie d'ordine $n > 3$, con retta $(n-3)$ pla, sono superficie con $p^{(1)} = 1$, possedenti un fascio di cubiche (determinante 3), le quali non ammettono in generale un gruppo discontinuo di trasformazioni in se stesse.

10. Calcoliamo ora il numero M dei moduli appartenenti alle famiglie α), β), γ) di superficie regolari F' (n 8).

α) $(p = n-2)$. Una K_{2n} con un punto $(2n-3)$ plo fisso dipende da

$$8n - 3 = \frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{2}$$

costanti. Essendoci ∞^6 omografie piane che lasciano fermo il punto suddetto, si otterranno

$$M = 8n - 9 = 8p + 7$$

moduli.

β) $(p = n-3)$. Le K_{2n} piane, aventi un punto $(2n-2)$ plo A e un punto 4-plo B, dipendono da

$$8n - 13 = \frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{2} - 10$$

costanti. Tenendo conto che ci sono ∞^6 trasformazioni quadratiche lascianti invariato il sistema delle coniche per A e B, si deduce

$$M = 8n - 19 = 8p + 5 .$$

γ) $(p = n - 2 - \sigma)$. Le K_{2n} con un punto $(2n-3)$-plo e σ punti tripli infinitamente vicini, dipendono da

$$8n - 3 - 6\sigma$$

costanti. Bisogna defalcare l'infinità delle trasformazioni proiettive del cono razionale normale d'ordine $\sigma + 1$ in $S_{\sigma+2}$, che è

$$\sigma + 6 .$$

Si ottiene quindi

$$M = 8n - 7\sigma - 9 ,$$

cioè

$$M = 8p + \sigma + 7 .$$

Questi numeri dànno luogo ad alcune osservazioni.

[1] Loc. cit.

Le superficie regolari di genere superficiale $p_a = p_g = p$, e di genere lineare $p^{(1)}$ $(P_{12} > 0)$, contengono, in generale ([1]),

$$M = 9p - 2p^{(1)} + 12 + \Theta$$

moduli, dove, *in ogni caso*,

$$\Theta \geq 0 .$$

Ora, per le superficie α) si trova

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 9 , \qquad (p^{(1)} = 1)$$

per le β)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 7 ,$$

per le γ)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + \sigma + 9 .$$

Accade dunque che nei casi α) β) e nel caso γ) per $\sigma \leq p + 2$, il numero dei moduli da cui dipendono le superficie F′ risulta inferiore a quello che viene indicato dalla formula generale:

La contraddizione apparente si risolve osservando che le superficie F′ *appartengono ad una più ampia famiglia di superficie con* $p^{(1)} = 1$, *di determinante* 2, *aventi il medesimo genere* p; entro questa famiglia, le F′ si distinguono per una *particolarità aritmetica* che diminuisce il numero dei moduli.

Infatti, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 3)$-plo, è un caso particolare del piano doppio con K_{2n}, di diramazione dotata di un punto $(2n - 4)$-plo. I moduli di queste ultime superfici F^2 risultano

$$M = 10n - 12 = 10p + 8 ,$$

cioè

α)
$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10 .$$

Similmente, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 3)$-plo e d'un punto 4-plo, è caso particolare del piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n - 4)$-plo e d'un punto 4-plo, il quale contiene

$$M = 10n - 22 = 10p + 8 ,$$

cioè

β)
$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10$$

moduli.

Onde risulta che, nei casi α) e β),

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10 \geq 9p - 2p^{(1)} + 12$$

se

$$p > 1 .$$

[1] Enriques, Rendic. Acc. Lincei, giugno 1908.

Per $p = 1$ manca *un* modulo, e ciò corrisponde al fatto che le nostre superficie coi generi $p = P_2 = 1$, contenenti un fascio di curve ellittiche, fan parte di una più ampia famiglia di superficie cogli stessi generi, che non contengono fasci di curve ellittiche: tali sono, nel caso α), i piani doppî con sestica K_6 di diramazione affatto generale; e nel caso β) le superficie del 4° ordine, che solo in casi particolari si riducono a quadriche doppie con curva K_8 di diramazione.

Resta infine da considerare il caso γ) per

$$\sigma < p + 3 ,$$

cioè per

$$\sigma \leq p + 2 \qquad (p = n - 2 - \sigma)$$

$$\sigma \leq \frac{n-2}{2} + 1 .$$

E per spiegare la circostanza segnalata, basta notare che, in questo caso, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata di un punto O $(2n - 3)$-plo e σ punti tripli infinitamente vicini, è un *caso particolare* di quello con curva di diramazione K_{2n} dotata di un punto $(2n - 4)$-plo e di σ punti quadrupli; piano doppio che si riduce ad avere una curva di diramazione d'ordine più basso, e che contiene un maggior numero di moduli.

Geologia. — *Sulla presenza di una breccia ossifera quaternaria nelle Formiche di Grosseto.* Nota del Corrispondente Federico Millosevich.

Nel luglio dell'anno scorso, S. M. il Re mi fece pervenire, per mezzo del suo primo aiutante di campo generale Brusati, alcuni campioni di rocce raccolti in uno dei suoi viaggi nel Tirreno e precisamente nelle isolette dette le Formiche di Grosseto.

Mentre compio il gradito dovere di esprimere i sensi della mia profonda gratitudine a S. M. il Re per aver voluto personalmente contribuire ai miei studî mineralogici e litologici sull'arcipelago Toscano, sono ben lieto di poter nello stesso tempo comunicare all'Accademia qualche breve notizia intorno ad alcuni di detti campioni, che hanno importanza per la storia geologica delle isole del Tirreno.

Le Formiche di Grosseto formano un piccolo gruppo a breve distanza dalla costa della Maremma Toscana. L'isola maggiore è situata ad una ventina di chilometri all'incirca a ponente di Talamone e si solleva nel suo punto più alto soltanto 11 metri sul livello del mare; la sua lunghezza nell'asse maggiore sorpassa appena il mezzo chilometro. Un'altra isoletta di

dimensioni minori è appena alta 6 m. sul livello del mare; due scogli completano il gruppo (¹).

Per la loro piccolezza e nessuna importanza, queste isole non attrassero l'attenzione dei geologi, cosicchè niente di particolareggiato si sa su di esse. Il Pareto (²) soltanto dedica qualche parola alla loro costituzione geologica e le dice formate da calcare giurassico. Il Lotti (³), senza farne cenno particolare nel testo, le indica, nella carta geologica, col colore del calcare retico, il quale costituisce anche l'isola di Giannutri ed ha una grande estensione nel promontorio Argentario e nei Monti dell' Uccellina, che si trovano presso la costa maremmana dirimpetto alle Formiche.

I campioni da me esaminati permettono di stabilire che, oltre al calcare retico vi sono in queste isolette dei lembi di terreno quaternario recente.

Fra di essi, quelli che presentano maggior importanza sono dei blocchi di una breccia rossastra con frammenti angolosi di calcare e grossi pezzi di ossa.

Della calcite cristallina a struttura stalattitica, o lamellare spatica, o granulare od anche in grandi ma imperfetti cristalli a terminazione romboedrica, riunisce e cementa i frammenti riempiendo anche le cavità delle ossa. Altri campioni sono costituiti soltanto da queste varietà di calcite.

Purtroppo, la determinazione delle specie cui appartengono le ossa della breccia riesce difficilissima se non impossibile, perchè mancano le facce articolari e si tratta di frammenti rotti prima di cementarsi. Evidentemente sono avanzi fossili di ruminanti; e l'illustre collega De Stefani, che gentilmente volle esaminare i campioni, è di parere che sieno da attribuire al genere *Cervus*, senza che sia possibile una determinazione specifica.

È noto che brecce ossifere consimili, talune anche con abbondante fauna di mammiferi, sono state osservate e descritte in altre isole del Tirreno, ed attribuite al quaternario recente: tali sono quelle dell' isola di Pianosa, quella della Caverna degli Orsi a Terranera presso Longone nell' Elba e quella della Caverna di Punta degli Stretti sull'Argentario, che è anch'esso un' isola riunita di recente alla terraferma. Il Forsyth Major (⁴) — che, come è noto, è stato lo scienziato che con argomenti specialmente zoologici e paleontologici fu il più strenuo assertore della teoria della cosiddetta Tirennide — parla di un ritrovamento consimile nell' isola di Giannutri.

¹) Carta d'Italia dell'Ist. geogr. militare Foglio 135. Tavoletta di Talamone al 50000.

Pareto L., *Costituzione geologica delle isole di Pianosa, Giglio, Giannutri, Monte Cristo e Formiche di Grosseto.* Atti della V Riunione degli scienziati italiani (Lucca, 1843, pag. 270).

(³) Lotti B., *Geologia della Toscana.* R. Ufficio Geologico, Roma, 1910, con carta geologica.

(⁴) C. J. Forsyth Major, *L'origine della fauna nelle nostre isole.* Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat., Pisa, III, 1881. *Die Thyrrenis,* Kosmos, VII, 1883.

Senza pretendere di entrare nella vessata questione della Tirennide ancora dibattuta fra i geologi, mi limito a segnalare l'importanza del fatto, che anche nelle piccole Formiche di Grosseto, ormai battute e quasi demolite dal mare, si trovino, come in altre isole del Tirreno, gli avanzi di una fauna numerosa, alla cui vita era certamente necessaria una terra ben più vasta, di cui le isole attuali possono non esser altro che l'ultimo residuo.

Fisiologia — *Ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. P. I. Dei fenomeni tonici e clonici e della loro genesi nei muscoli striati e lisci.* Memoria del Corrisp. F. Bottazzi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media.* Nota di Luigi Amoroso, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

Il sistema che considero è quello a cui soddisfano la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una funzione di due variabili complesse $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, e cioè

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0. \end{cases}$$

Secondo il teorema di Gauss, una funzione $u\,(x\,,y)$, armonica in un certo campo finito, è, in ogni punto, la media dei valori che essa prende sopra ogni circonferenza, che ha centro in quel punto; e viceversa — secondo il Levi [1] — ogni funzione $u\,(x\,,y)$ continua entro un certo campo, che inoltre in ogni punto abbia come valore la media dei valori che assume sopra una circonferenza arbitraria di centro quel punto, è armonica.

Segue, come corollario immediato, che, se $u\,(x_1\,,y_1 \mid x_2\,,y_2)$ è una funzione armonica tanto rispetto alla coppia di variabili $x_1\,,y_1$, quanto rispetto alla coppia di variabili $x_2\,,y_2$, entro un campo finito S a quattro dimensioni, essa assume, in ogni punto $x_1\,,y_1 \mid x_2\,,y_2$ di questo campo, la media

[1] Cfr. E. E. Levi, *Sovra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche,* Rend. Accad. Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1°, 1909. Sullo stesso argomento cfr. V. Volterra, *Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione,* Rend. Accad. Lincei, serie 5ª, vol. XVIII, 1909; Tonelli, Rend. Accad. Lincei, serie 5ª, vol. XVIII, 1909; Vitali, Rend. Accad. Lincei, serie 5°, vol. XXI, 1912.

dei valori, che assume sopra la intersezione completa delle due varietà a tre dimensioni

$$(2) \quad (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 = R_1^2 \ , \ (X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2) = R_2^2 \ ,$$

R_1, R_2 essendo *costanti arbitrarie.*

In formule, è

$$(3)_1 \quad u(x_1 , y_1 | x_2 , y_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1 \cos\theta_1 , y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2 \cos\theta_2 , y_2 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \,.$$

E, *viceversa*, ogni funzione $u\,(x_1 , y_1 \mid x_2 , y_2)$, continua entro un certo campo S a quattro dimensioni, che assuma, in ogni punto $x_1 , y_1 \mid x_2 , y_2$ di questo campo, la media dei valori che assume sopra la intersezione completa di due varietà (2), R_1, R_2 essendo costanti arbitrarie, è armonica tanto rispetto alla coppia di variabili x_1 , y_1, quanto rispetto alla coppia di variabili x_2 , y_2.

Ma una funzione armonica in x , y è la parte reale di una funzione della variabile complessa $x + iy$: invece, la parte reale di una funzione delle due variabili complesse $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, non solo è armonica rispetto ad ambedue le coppie di variabili $x_1 , y_1 \mid x_2 , y_2$, [il che porta che sono verificate le due equazioni (1) della prima orizzotale], ma soddisfa *a tutte e quattro* le equazioni del sistema (1); onde il corollario precedente, se dà una proprietà di questo sistema, non dà tuttavia una proprietà *caratteristica* del sistema stesso.

2. È notevole che una tale proprietà caratteristica si ottiene, associando alla condizione espressa dalla $(3)_1$ la quale porta sulla media dei valori di u sulle varietà (2), due condizioni che esprimono ancora proprietà delle medie, *convenientemente ponderate*, dei valori di u sempre sulle varietà medesime: e, propriamente, associando alla $(3)_1$ le due seguenti relazioni:

$$(3)_2 \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1 \cos\theta_1 , y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2 \cos\theta_2 , \\ \qquad\qquad y_2 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \ , \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R_1 \cos\theta , y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 | x_2 + R_2 \cos\theta_2 , \\ \qquad\qquad y_2 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \,. \end{cases}$$

Sussistono invero le due proposizioni seguenti, detto (3) il sistema formato dalle $(3)_1$ e $(3)_2$:

I. *Ogni funzione continua entro un certo campo* S *a quattro dimensioni, che verifica ivi al sistema* (3), *è un integrale regolare* [1] *di* (1).

[1] cioè continuo e limitato, colle derivate dei primi due ordini continue e limitate.

II. *Viceversa, un integrale di* (1) *regolare* (1) *verifica, nel campo in cui è definito, al sistema* (3).

DIMOSTRAZIONE DELLA PRIMA PROPOSIZIONE.

3. Sia u una funzione continua entro un campo S a 4 dimensioni, che ivi verifica al sistema (3).

Dalla $(3)_1$, applicando la formula (4) del Levi (Nota citata), segue che esiste $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e che

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta_1\,u\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_1\,u\,d\theta_1\,d\theta_2\,,\ \text{ecc.} \tag{5}$$

Ma allora, poichè dalla $(3)_1$, derivando sotto il segno

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

risulta che anche $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ verifica alla stessa $(3)_1$ consegue, applicando di nuovo le formule precedenti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\theta_1\,d\theta_2$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}=\frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_1\,\frac{\partial u}{\partial y_1}\,d\theta_1\,d\theta_2\,,$$

per cui è (cfr. la Nota citata del Levi alle formule (6) e seguente)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}=0\,,\ \text{ecc.}$$

Infine, analogamente,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}&=\frac{1}{4\pi^2 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_1\,\partial y_2}&=\frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial y_2}\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2\,;\end{aligned}\right. \tag{6}$$

e perciò:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big\{ \cos\theta_1 \left(\cos\theta_2 \frac{\partial u}{\partial R_2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \operatorname{sen}\theta_2 \right) +$$

$$+ \operatorname{sen}\theta_1 \left(\operatorname{sen}\theta_2 \frac{\partial u}{\partial R_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \cos\theta_2 \right) \Big\} d\theta_1 \, d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial u}{\partial R_2} d\theta_1 \, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial u}{\partial \theta_2} d\theta_1 \, d\theta_2$$

e infine tenendo conto delle (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{4\pi^2 R_1} \frac{\partial u(x_1, y_1 | x_2, y_2)}{\partial R_2} + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 R_1 R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \cos(\theta_1 - \theta_2) \, d\theta_1 \, d\theta_2 = 0, \text{ ecc.}$$

Dimostrazione della seconda proposizione.

4. Sia u un integrale di (1), regolare entro un campo S a quattro dimensioni. Per il corollario, di cui al n. 1, u verifica allora alla $(3)_1$: sussistono quindi, secondo quanto precedentemente, al n. 3, abbiamo dimostrato, le formule (4), (5), (6), e analoghe. Ma, per ipotesi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0;$$

onde consegue, tenuta presente la (7):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \cos(\theta_1 - \theta_2) \, d\theta_1 \, d\theta_2 = 0, \text{ ecc.}$$

Osservazione 1ª.

5. La $(3)_1$ può scriversi

$$r_1 r_2 u(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{r_1 r_2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r_1 \cos\theta_1, y_1 + r_1 \operatorname{sen}\theta_1 |$$

$$x_2 + r_2 \cos\theta_2, y_2 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2) \, d\theta_1 \, d\theta_2,$$

da cui segue, integrando rispetto ad r_1 da O a R_1, e rispetto ad r_2 da O ad R_2, e dividendo per R_1 R_2,

$$u(x_1 \cdot y_1 , x_2 , y_2) = \frac{1}{\pi^2 R_1^2 R_2^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} u(x_1 + R_1 \cos\theta_1 , y_1 + R_1 \operatorname{sen}\theta_1 ,$$
$$x_2 + r_2 \cos\theta_2 , y_2 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 ,$$

σ_1 essendo, nel piano delle variabili x_1 , y_1, l'area del cerchio che ha centro in x_1 , y_1 e raggio R_1, ecc. — *Questa formula rappresenta una seconda forma, in cui può esser posto il teorema della media.* Analoga trasformazione può farsi per le altre due $(3)_1$.

Vale ancora la pena di osservare che teoremi di media *ponderata*, analoghi a quelli espressi dalle $(3)_2$, si hanno tutte le volte che si sostituiscono le equazioni del secondo rigo di (1) con altre simili equazioni lineari a coefficienti costanti nelle u e nelle derivate. Al variare di queste equazioni, variano le funzioni che danno il peso.

Osservazione 2ª.

6. È assai facile di vedere che l'ipotesi della continuità per la funzione u relativamente alla dimostrazione della prima proposizione è troppo restrittiva. Tenendo presente le citate Note dei prof. Levi, Tonelli, Vitali, si riconosce, a prima vista, che ad essa può sostituirsi un'ipotesi assai più larga e che consiste nel ripetere, per ambedue le coppie di variabili $x_1 , y_1 \mid x_2 , y_2$, le le condizioni che gli autori sopra citati pongono per ciascuna delle due coppie stesse.

Osservazione 3ª.

7. Credo opportuno, terminando, richiamare l'attenzione sopra il fatto che *ogni teorema della media*, in sostanza, porta ad una notevole proprietà dello sviluppo di Fourier. Consideriamo, per es., una funzione u armonica nelle due variabili x ed y: supposto che r , θ denotino un sistema di coordinate polari col polo in x , y lo sviluppo sopra accennato dà

$$u(x + r\cos\theta , y + r \operatorname{sen}\theta) =$$
$$= A_0 + r\,(A_1 \cos\theta + A_2 \operatorname{sen}\theta) + r^2\,(B_1 \cos 2\,\theta + B_2 \operatorname{sen} 2\,\theta) + \ldots ;$$

le A_r, B_r essendo funzioni di x , y. Segue, calcolando i coefficient, di Fourier, e tenendo presente il significato delle A e delle B:

$$u(x , y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta , y + r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta ,$$

$$\frac{\partial u(x , y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta , y + R \operatorname{sen}\theta) \cos\theta\, d\theta , .. \text{ ecc.}$$

formole valide, qualunque sia R al secondo membro.

Il teorema della media porta, in sostanza, a questo: che, *dalla prima di queste formule, relativa alla funzione u*

$$u(x\,,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\theta\,,$$

derivano come conseguenza tutte le altre, relative alle derivate della funzione u, sempre che la precedente si supponga verificata per un punto generico del piano delle variabili x y e per ogni valore generico di R.

Analoga considerazione potrebbe svilupparsi pel teorema dimostrato in questa Nota, relativo al sistema (1).

Meccanica celeste. — *Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull' origine delle comete.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il prof. A. Crommelin, in un recente articolo intitolato « The origin and nature of comets », pubblicato nella Rivista di scienza [1], ha profondamente studiato il problema dell'origine delle comete.

Egli si domanda (come del resto aveva già scritto il Fabry qualche anno prima) come mai non sia stata fin qui osservata alcuna cometa nettamente iperbolica. Non potendo ammettere che tutti questi astri entrino nella sfera d'attrazione del sole, con velocità estremamente piccola, dichiara che questo fatto costituisce una prova innegabile dell'origine solare delle comete.

Ora a me sembra che tale ragionamento abbia un punto debole: il Crommelin e il Fabry infatti non tengono conto della distanza perielia che deve risultare assai piccola perchè la cometa sia osservabile.

La cometa di Tempel II, p. es., che è una delle più lontane, ha per distanza perielia $p = 2{,}073322$. Per distanze notevolmente maggiori sembra che i raggi solari siano impotenti a determinare nel nucleo cometario lo svolgimento di quelle emanazioni che generano la coda e la chioma. Partendo da questo fatto, e basandomi su concetti generalmente ammessi, io mi propongo di dimostrare che, anche nell'ipotesi che molte comete provengano dall'esterno del sistema solare, la probabilità di osservarne una con orbita nettamente iperbolica risulta sempre immensamente piccola.

La mancanza di tale osservazione non potrà perciò essere invocata come argomento decisivo contro l'ipotesi stessa, come fanno il Fabry ed il Crommelin.

(1) « Rivista di scienza », anno VII (1910), vol. IV.

Formule di partenza.

Prendendo per centro il sole S, immaginiamo una sfera σ di raggio r, tale che, in essa, l'attrazione solare sia preponderante rispetto a quella degli astri. Indichiamo con $N(v, r)$, o semplicemente con N, il numero delle comete che entrano in σ, in un certo tempo τ, con velocità fisicamente uguale a v. Sceglieremo τ in modo che N risulti possibilmente grande, tanto da poter applicare senza errore sensibile il noto teorema di Bernouilli.

Indichiamo con $\varphi(\omega, r)d\omega$ la probabilità che l'angolo d'incidenza (contato dalla normale interna), con cui una delle N comete entra nella sfera σ, sia compreso tra ω e $\omega + d\omega$, ammettendo per semplicità che φ non dipenda dal punto in cui la cometa passa attraverso σ, ma solo da r e da ω.

Avremo allora, qualunque sia r,

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega, r)\, d\omega = 1\,;$$

mentre, d'altra parte, il numero N_α delle comete che entrano in σ con un angolo minore o, al più, eguale ad α, sarà dato prossimamente da

$$(2) \qquad N_\alpha = N \int_0^{\alpha} \varphi(\omega, r)\, d\omega\,.$$

Relazione tra le funzioni φ.

Ciò posto, indichiamo con σ_1 una nuova sfera concentrica ed interna a σ, e con ϱ il suo raggio, $(\varrho < r)$. Si tratta di trovare una relazione tra $\varphi(\omega, r)$ e $\varphi(\omega, \varrho)$.

A tale scopo, supponiamo che una cometa entrata in σ con angolo di d'incidenza λ e con velocità v, entri in σ_1 con angolo d'incidenza μ e con velocità v_1. Le quantità v_1 e μ saranno legate a v e λ dalle relazioni

$$(3) \qquad rv \operatorname{sen} \lambda = \varrho\, v_1 \operatorname{sen} \mu$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2} v^2 - \frac{Mf}{r} = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{Mf}{\varrho} = h$$

la prima delle quali è data dal teorema delle aree, la seconda da quello delle forze vive: M ed f indicano la massa solare e il coefficiente attrattivo; h è la costante delle forze vive.

Escludiamo le comete ellittiche che non entrano nelle nostre considerazioni, e supponiamo, perciò, $v \geq \sqrt{\frac{2Mf}{r}}$.

Avremo allora, eliminando v_1 tra la (3) e la (4),

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\mu}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\,. \tag{5}$$

Il secondo membro (che non può mai annullarsi perchè si ha $\varrho < r$) è una funzione crescente di ϱ, come possiamo facilmente dimostrare prendendone la derivata. Poichè $\operatorname{sen}\mu$, in valore assoluto, deve essere necessariamente minore o, al più, eguale, ad 1, ne segue che, delle N comete considerate, entreranno in σ_1 soltanto quelle che hanno traversato la sfera σ con un angolo d'incidenza non superiore a ψ; essendo ψ dato dalla relazione

$$\operatorname{sen}\psi=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\,. \tag{6}$$

Soddisfacendo v alla condizione di parabolicità o iperbolicità, risulta $|\operatorname{sen}\psi| \leq \left|\sqrt{\frac{\varrho}{r}}\right| < 1$; e quindi il calcolo è sempre possibile.

Dalla 6), ricordando il teorema di Bernouilli che, come abbiamo detto, può qui applicarsi senza errore, ricaviamo che il numero N_ρ delle comete che entrano in σ_1 è dato dall'espressione:

$$N_\rho = N\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc.sen}\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}}\varphi(\omega\,,r)\,d\omega\,. \tag{7}$$

Sia λ minore di ψ: le comete entrate in σ con un angolo d'incidenza minore o, al più, eguale a λ (supponendo sempre la velocita d'ingresso eguale a v), entreranno in σ, con un angolo d'incidenza minore, o, al più, eguale a μ: $\operatorname{sen}\lambda$ e $\operatorname{sen}\mu$ essendo legati dalla relazione (5).

Noi avremo dunque:

$$N\int_0^\lambda \varphi(\omega\,,r)\,d\omega = N_\rho\int_0^\mu \varphi(\omega\,,\varrho)\,d\omega\,, \tag{8}$$

da cui, eliminando N_ρ per mezzo della (7), avremo:

$$\int_{\omega=0}^{\omega=\mu}\varphi(\omega\,,\varrho)\,d\omega = \frac{\displaystyle\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\,.\operatorname{sen}\mu\right\}}\varphi(\omega\,,r)\,d\omega}{\displaystyle\int_{\omega=0}^{\omega=\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{\varrho}{r}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)}\right\}}\varphi(\omega\,,r)\,d\omega}\,, \tag{9}$$

che è la relazione funzionale a cui volevamo giungere. In essa, μ figura come un parametro arbitrario; il quale, per ciò che precede, è evidentemente sottomesso alla condizione $\mu \leq \frac{\pi}{2}$. Facendo, p. es., $\mu = \frac{\pi}{2}$, ritroviamo la formola (1) come caso particolare. Differenziando la (9) rispetto a μ, si otterrebbero altri importanti relazioni, che per brevità tralasciamo perchè non necessarie per ciò che diremo.

Probabilità di vedere una cometa; valore probabile della distanza perieliaca, dell'eccentricità, ecc.

Supponiamo ora data tanto la funzione $\varphi(\omega, r_1)$, relativa al valore particolare del raggio $r = r_1$, quanto il numero N_1 di comete che nel tempo τ entrano nella sfera s di raggio r_1, con velocità v. È facile allora il calcolare quante di esse saranno visibili. Infatti, se noi prendiamo come unità di lunghezza il semiasse dell'orbita terrestre, e costruiamo una seconda sfera avente ancora per centro il sole e il cui raggio sia uguale all'incirca a 2, allora, per ciò chè stato detto in principio, potremo considerare come visibili quelle comete che vi entrano.

Chiamando con n_1 il numero di queste comete, si ha:

$$(10) \qquad \frac{n_1}{N_1} = \int_{\omega=0}^{\omega = \text{arc}.\,\text{sen}\,\frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega \,.$$

Possiamo anche calcolare il valore probabile δ dell'angolo d'incidenza con cui le n_1 comete visibili entrano nella sfera di raggio 2, o sfera di visibilità. La quantità δ deve infatti soddisfare alla relazione

$$(11) \qquad \int_{\omega=0}^{\omega=\delta} \varphi(r = 2\,;\,\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}\,.$$

Ora, $\varphi(r = 2\,;\,\omega)$ è incognita, ma noi possiamo valerci dell'equazione funzionale (9). Da essa infatti ricaviamo

$$(12) \qquad \int_{\omega=0}^{\omega = \text{arc}\left\{\text{sen} = \frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}\cdot \text{sen}\,\delta\right\}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\omega=0}^{\omega = \text{arc}\left\{\text{sen} = \frac{2}{r_1}\sqrt{1+\frac{2Mf}{v^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)}\right\}} \varphi(\omega, r_1)\, d\omega\,,$$

e poichè, per ipotesi, $\varphi(\omega, r_1)$ è nota, la (12) ci darà $\text{sen}\,\delta$.

Analogamente potremo conoscere il valore probabile della distanza del perielio e dell'eccentricità delle n_1 comete visibili; la formula (9) ha perciò molta importanza in questa teoria.

Applicazione al caso particolare in cui si supponga che le comete, nelle regioni lontane dagli astri, si muovano in modo che tutte le direzioni risultino egualmente probabili.

Per applicare ora la nostra formula all'esame delle teoria del Crommelin, occorre fare un'ipotesi sulla funzione φ.

Ci fonderemo perciò sul seguente

Postulato. — « Facendo astrazione dalle regioni prossime agli astri, « le comete dello spazio si muovono con legge tale che tutte le direzioni « risultano egualmente probabili ». Ammetteremo ancora che *dentro certi limiti*, tutte le velocità siano equamente ripartite.

Prendiamo ora una sfera Σ_1 avente per centro il sole e il cui raggio R sia assai grande: p. es., sia eguale a 100.000 la lunghezza del semiasse dell'orbita terrestre. Nell'interno di questa sfera l'attrazione del sole è certo preponderante; mentre, d'altra parte, dato il grande valore di R, possiamo ammettere, almeno in prima approssimazione, che tutte le direzioni d'ingresso delle comete in Σ_1 sieno ugualmente probabili. Allora la probabilità che l'angolo d'incidenza di una cometa in Σ_1 sia compreso tra 0 o γ, è data dal rapporto tra l'area di una calotta sferica limitata dal parallelo di conlatitudine γ e l'area della semisfera corrispondente.

Abbiamo dunque:

$$\int_{\omega=0}^{\omega=\gamma} \varphi(r=100.000\,;\omega)\,d\omega = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\gamma\,; \tag{13}$$

da cui:

$$\varphi(r=100.000\,;\omega) = 2\,\mathrm{sen}\,\omega\,. \tag{14}$$

La (10) ci dà allora, eseguendo i calcoli,

$$\frac{n_1}{N_1} = 1 - \sqrt{1 - 4\,\frac{Rv^2 - 2fM + RfM}{R^3\,v^2}} \qquad (R = 10^5)\,. \tag{15}$$

Eliminiamo ora v, introducendo la costante delle forze vive, h, data dall'equazione (4); e sostituiamo alle lettere i numeri scegliendo, come è stato detto, per unità di lunghezza il semiasse dell'orbita terrestre e per unità di tempo il giorno solare medio. L'unità di massa può essere qualsiasi, giacchè il prodotto Mf ha le dimensioni $[L^3\,T^{-2}]$.

Avremo:

$$W = \frac{n_1}{N_1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{4h + 0,000605}{30,26 + 10^{10}h}} \qquad (h \geq 0). \tag{16}$$

La quantità W (che chiameremo col nome di coefficiente di visibilità) gode della proprietà che, moltiplicata per il numero N_1 delle comete entrate in Σ_1 dall'esterno ci dà il numero n_1 di esse che risulta probabilmente visibile.

Risultato. — Ora la formola (16) ci mostra che W *decresce in maniera estremamente rapida appena h supera 0, cioè appena la traiettoria si allontana dalla parabola cangiandosi in iperbole.*

Supponiamo, per dare un esempio, che cento bilioni di comete (10^{11}) entrino nella sfera Σ_1 o sfera d'attrazione del sole. Se la velocità d'ingresso è inferiore a 130 metri circa al minuto secondo, h è negativa e l'orbita risulta ellittica. Immaginiamo perciò che tutte le velocità d'ingresso siano comprese tra un minimo p. es. di 200 metri e un massimo p. es. di 100 km. al secondo, (massimo notevolmente elevato); e che tra questi limiti siano equamente distribuite.

Divideremo, per semplicitá, le nostre comete in cento classi, ammettendo nella 1ª quelle con velocità d'ingresso inferiore ad 1 km; nella 2ª quelle con velocità d'ingresso compresa tra 1 e 2 km, e così di seguito. Per l'ipotesi fatta sull'uniforme distribuzione delle velocità, ogni classe conterrà circa un bilione di comete. Ricordando la nota relazione tra l'eccentricità e, la distanza perieliaca p, e la costante h; poichè per le comete visibili si ha $p \leqq 2$, avremo per queste:

$$e \leqq 1 + \frac{4h}{Mf}. \tag{17}$$

Servendoci allora del coefficiente W, dato dalla formula (16) sarà facile calcolare la seguente [1]:

Tabella.

Classe	Numero delle comete visibili	e	Classe	Numero delle comete visibili	e
1ª	5000	$e \leqq 1,0001$	6ª	7	$e \leqq 1,05$
2ª	180	$e \leqq 1,002$	7ª	5	$e \leqq 1,08$
3ª	48	$e \leqq 1,009$	8ª	4	$e \leqq 1,10$
4ª	20	$e \leqq 1,02$	9ª	3	$e \leqq 1,13$
5ª	12	$e \leqq 1,03$	10ª	2	$e \leqq 1,16$
			ecc.	ecc.	

[1] Risultati numerici poco dissimili si avrebbero, sia tenendo conto del moto del sistema planetario nello spazio, sia modificando il postulato in modo che le deboli inclinazioni risultino preferite ecc.

Da questa tabella risulta che per spiegare come le comete fin qui osservate non abbiano mai presentato un'orbita nettamente iperbolica, non è necessario di supporre per tutte un'origine interna al sistema solare. *Anche se molte comete pervenissero dall'esterno, la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressochè nulla.* Non può quindi essere considerata come soddisfacente la teoria del Fabry e del Crommelin, i quali hanno creduto che la mancata osservazione di orbite nettamente iperboliche sia una prova incontestabile della origine solare dei nuclei cometarii.

Matematica. — *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Nota II di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Dans deux Notes précédentes (Comptes rendus, 4 aout 1913, Reale Accademia dei Lincei, 21 décembre 1913), j'ai étudié la représentation, par la limite d'une somme d'intégrales multiples, d'une fonctionnelle $U|[z]|$ définie et continue dans le champ des fonctions $z(\alpha)$, ces fonctions $z(\alpha)$ étant définies, réelles et continues pour $a \leq \alpha \leq b$.

Je me propose d'étudier dans la présente Note ce que deviennent les résultats précédemment obtenus, quand les fonctions $z(\alpha)$ sont définies pour toutes les valeurs réelles de α.

2. Je désignerai par Ω l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ définies, réelles et continues pour toutes les valeurs de la variable réelle α.

$A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ étant deux fonctions de Ω telles que $A(\alpha) \leq B(\alpha)$, je désignerai par $\Omega\,(A\,,B)$ l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$ de Ω, telles que

$$A(\alpha) \leq z(\alpha) \leq B(\alpha).$$

Je dirai que la fonction $z_1(\alpha)$ a pour limite la fonction $z_2(\alpha)$, si $z_1(\alpha)$ tend vers $z_2(\alpha)$ pour chaque valeur de α, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

D'après cela, je puis définir un écart de deux fonctions $z_1(\alpha)\,,z_2(\alpha)$. Je considère la fonction du nombre positif l:

$$\frac{1}{l} + \text{maximum dans } (-l\,,l) \text{ de } |z_1(\alpha) - z_2(\alpha)|.$$

Cette fonction de l admet un minimum que j'appellerai *écart des fonctions* $z_1(\alpha)\,,z_2(\alpha)$. Il est aisé de voir qu'il possède bien les propriétés d'un écart.

Les expressions *fonctionnelle continue*, *fonctionnelle uniformément continue*, *ensemble compact de fonctions* ont maintenant un sens parfaitement

déterminé (Voir par exemple: Fréchet, Thèse, Circolo matematico di Palermo, 1906).

3. J'emploierai, pour représenter approximativement une telle fonctionnelle, des expressions de la forme:

$$(1)\quad V^{(n)}|[z]| = K_0 + \sum_s^{1,\dots,r} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\, z(\alpha_1) \dots z(\alpha_s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_s .$$

K_0 est une constante; K_s, une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses variables; n est un entier positif, qui, adjoint à la lettre V comme indice supérieur, indique uniquement les limites entre lesquelles sont prises les intégrales. Pour distinguer entre elles plusieurs expressions (1), j'affecterai la lettre V d'indices inférieurs, qui devront également affecter K_0, K_s, r.

4. Dans les paragraphes II et III, toutes les fois qu'un passage à la limite sera indiqué il sera sous-entendu que la convergence est uniforme dans tout ensemble compact des fonctions considérées, soient z, soient z et δz.

II. — Représentation d'une fonctionnelle continue.

1. Une méthode analogue à celle qui est indiquée dans la première Note citée conduit aux résultats suivants:

2. *Soit* $U|[z]|$ *une fonctionnelle réelle, définie et continue soit dans* Ω, *soit dans* $\Omega(A, B)$. *On peut déterminer une suite* $V_n^{(n)}|[z]|$ *telle que:*

$$U|[z]| = \lim_{n \to \infty} V_n^{(n)}|[z]| .$$

3. Définissons la variation première d'une fonctionnelle $U|[z]|$ par l'égalité:

$$\delta U|[z, \delta z]| = \frac{d}{d\lambda} U_{(\lambda=0)} |[z + \lambda \delta z]|$$

Dans chacun des deux cas précédents, supposons que $U[z]|$ *admette une variation première* $\delta U|[z, \delta z]|$ *définie et continue par rapport à l'ensemble des fonctions* z, δz, *quelle que soit* z *appartenant au domaine d'existence de* U, *et quelle que soit la fonction continue* δz. *On peut choisir les expressions* $V^{(n)}$ *des seconds membres de telle sorte que la variation première de* U *soit la limite des variations premières des* $V^{(n)}$.

4. Les $V^{(n)}$ ont une variation première linéaire par rapport à δz. La variation première de U, qui en est la limite, est donc distributive par rapport à δz. Comme elle est continue, elle est linéaire. D'où une condition suffisante pour que la variation première d'une fonctionnelle soit linéaire:

Considérons la fonctionnelle $U|[z]|$ *définie, réelle et continue, soit dans* Ω, *soit dans* $\Omega(A, B)$. *Supposons qu'elle admette une variation première* $\delta U|[z, \delta z]|$ *continue par rapport à l'ensemble des fonctions* $z, \delta z$, *quelle que soit* z *appartenant au domaine d'existence de* U, *et quelle que soit la fonction continue* δz. *Cette variation première est linéaire par rapport à* δz.

III. — Représentation d'une fonctionnelle d'ordre entier.

Désignons par Ω' l'ensemble des fonctions $z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$, définies et continues pour toutes les valeurs de la variable réelle α. Définissons la limite et l'écart pour les fonctions $z(\alpha)$ comme au paragraphe I.

Nous dirons qu'une fonctionnelle $U|[z]|$ définie dans Ω' est *d'ordre* m, si elle est continue, et si $U|[\lambda z + \lambda' z']|$ est un polynome de degré m par rapport aux nombres complexes λ, λ'.

Si ce polynome est homogène de degré m, nous dirons que la fonctionnelle est *homo- gène d'ordre* m.

Si $U|[z]|$ *est une fonctionnelle d'ordre* m, *on peut la mettre sous la forme:*

$$U|[z]| = U_0 + U_1|[z]| + \cdots + U_p|[z]| + \cdots + U_m|[z]|,$$

U_0 *étant une constante*, U_p *une fonctionnelle homogène d'ordre* p, *qui admet la représentation suivante:*

$$U_p|[z]| = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p,$$

K_n *étant une fonction complexe continue de* p *variables réelles.*

En particulier, $U_1|[z]|$ étant une *fonctionnelle linéaire* :

$$U_1|[z]| = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} K_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha .$$

IV. — Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonctionnelle définie dans $\Omega(A, B)$ soit limite d'expressions (1), la convergence étant uniforme.

Nous avons obtenu (II, 2) une représentation d'une fonctionnelle définie dans $\Omega(A, B)$, en la supposant simplement continue. Dans cette hypothèse, la convergence est uniforme, non pas dans tout le domaine, mais dans tout ensemble compact de fonctions. Restreignant la généralité des fonctionnelles considérées, le théorème suivant nous donne une représentation avec convergence uniforme dans tout le domaine $\Omega(A, B)$.

THÉORÈME. — *Soit* $U|[z]|$ *une fonctionnelle définie dans* $\Omega(A, B)$. *Pour qu'on puisse déterminer une suite*

$$V_1^{(1)}|[z]|, V_2^{(2)}|[z]|, \dots, V_n^{(n)}|[z]|, \dots \tag{2}$$

tendant vers $U|[z]|$, *la convergence étant uniforme dans* $\Omega(A, B)$, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε *positif*,

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *tels que, si* $z_1(\alpha)$ *et* $z_2(\alpha)$ *satisfont dans l'intervalle* $(-l, l)$ *à l'inégalité* $|z_1(\alpha) - z_2(\alpha)| < \eta$, *on ait* $|U|[z_1]| - U|[z_2]|| < \varepsilon$;

2°) *on puisse déterminer un intervalle* $(-l', l')$ *et une division de cet intervalle en intervalles partiels, tels que, si* $z_1(\alpha), z_2(\alpha)$ *ont même valeur moyenne dans chacun d'eux, on ait* $|U[z_1]| - U|[z_2]|| < \varepsilon$.

La condition 1°) peut encore s'énoncer: *que* $U|[z]|$ *soit uniformément continue dans* $\Omega(A, B)$.

A) La condition est nécessaire. Je suppose que U soit limite d'une suite (2), la convergence étant uniforme; et je veux démontrer qu'elle satisfait aux conditions 1°) et 2°).

Soit ε le nombre positif arbitraire. Je puis déterminer n tel que:

$$|U|[z]| - V_n^{(n)}|[z]|| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{α}$$

Je prends alors $l = l' = n$. $V_n^{(n)}|[z]|$ ne dépendant de z que dans l'intervalle fini $(-n, n)$, d'après le théorème démontré dans la deuxième Note citée ([1]) (I, 1), on peut déterminer η tel que, si l'on a dans cet intervalle $|z_1 - z_2| < \eta$, on ait aussi:

$$|V_n^{(n)}|[z_1]| - V_n^{(n)}|[z_2]|| < \frac{\varepsilon}{2};$$

et, en se reportant à l'inégalité (α):

$$|U|[z_1]| - U|[z_2]|| < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On peut de même déterminer une division de l'intervalle $(-n, n)$ en intervalles partiels, tels que, si z_1, z_2 ont même valeur moyenne dans chacun d'eux, on ait:

$$|V_n^{(n)}|[z_1]| - V_n^{(n)}|[z_2]|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

([1]) Dans cette Note, l'intervalle de variation de α est $(0, 1)$ et les fonctions $z(\alpha)$ sont comprises entre deux constantes A et B. Mais le théorème s'étend immédiatement au cas où l'intervalle $(0, 1)$ est remplacé par $(-n, n)$ et les constantes A, B par $A(\alpha)$, $B(\alpha)$.

et, d'après (α):

$$|\mathrm{U}|[z_1]| - \mathrm{U}|[z_2]|| < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

B) La condition est suffisante. Je suppose que U satisfasse aux conditions 1°) et 2°). Je me donne ε positif, et je me propose de former une expression $\mathrm{V}^{(n)}|[z]|$ telle que:

$$|\mathrm{U}[z]| - \mathrm{V}^{(n)}|[z]|| < \varepsilon\,.$$

a) Je considère la fonction $\mathrm{C}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{A}(\alpha) + \mathrm{B}(\alpha)}{2}$. Soit un intervalle $(-l, l)$, l étant un nombre positif quelconque. Je réserverai la notation $t(\alpha)$ pour désigner une fonction discontinue, égale, dans l'intervalle fermé $(-l, l)$, à une fonction continue comprise (au sens large) entre $\mathrm{A}(\alpha)$ et $\mathrm{B}(\alpha)$, et égale à $\mathrm{C}(\alpha)$ hors de cet intervalle.

Soit h un nombre positif. Je désignerai par $\theta_h(\alpha)$ une fonction de $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ égale à $t(\alpha)$ hors des intervalles $(-l-h, -l), (l, l+h)$, et ayant, dans chacun de ces intervalles même valeur moyenne que $\mathrm{C}(\alpha)$.

Je démontre que si h tend vers 0, $\mathrm{U}|[\theta_h]|$ tend vers une limite, que j'attache à $t(\alpha)$ et que je note $\mathrm{U}|[t]|$.

b) Je remarque que $\mathrm{U}|[t]|$ ne dépend que des valeurs de $t(\alpha)$ correspondant à $-l \leq \alpha \leq l$.

Je démontre ensuite qu'étant donné ε_1 positif, on peut déterminer une division de l'intervalle $(-l, l)$ telle que, si t_1, t_2 ont même valeur moyenne dans chaque intervalle partiel, on ait $|\mathrm{U}|[t_1]| - \mathrm{U}|[t_2]|| < \varepsilon_1$.

Puis, que $\mathrm{U}|[t]|$ est uniformément continue.

c) Ces préliminaires établis, je puis déterminer un intervalle $(-n, n)$ (n entier positif) tel que, si z_1, z_2 diffèrent seulement hors de cet intervalle, on ait $|\mathrm{U}|[z_1]| - \mathrm{U}|[z_2]|| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

À toute fonction $z(\alpha)$ de $\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, je fais correspondre la fontion $t(\alpha)$ relative à l'intervalle $(-n, n)$ et qui se confond avec $z(\alpha)$ dans cet intervalle. On voit facilement que:

$$(\beta) \qquad |\mathrm{U}|[z]| - \mathrm{U}|[t]|| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Mais $\mathrm{U}|[t]|$ satisfaisant aux conditions *b*), d'après le théorème démontré dans la deuxième Note citée (I, 1), je puis déterminer une expression:

$$\mathrm{K}_0 + \sum_s^{1,\dots,r} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} \mathrm{K}_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\, z(\alpha_1) \dots z(\alpha_s)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

que je puis désigner par $V^{(n)}|[z]|$, telle que ($z \equiv t$ dans l'intervalle $(-n, n)$):

$$|U|[t]| - V^{(n)}|[z]|| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Et en se reportant à l'inégalité (β), il vient:

$$|U|[z]| - V^{(n)}|[z]|| < \varepsilon .$$

$V^{(n)}|[z]|$ répond à la question.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Matematica — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm.* Nota II di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Come nella Nota I [1], data l'equazione integrale di prima specie

$$\int_a^b K(x, y)\, F(y)\, dy = f(x) , \tag{1}$$

in cui $K(x, y)$ ed $f(x)$ sono funzioni note continue, e per la quale esista almeno una soluzione $F(y)$, sommabile insieme col suo quadrato, sia

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n , \ldots$$

[1] Questi Rendiconti, 1° sem., fasc. 3°, 1914. Valgono per il seguito le osservazioni ivi fatte, contenute nelle note [2] e [3].

la successione delle costanti del nucleo $K(x, y)$, e

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \tag{2}$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots, \tag{3}$$

la successione delle coppie di funzioni ortogonali dello stesso nucleo, per le quali risulta:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, y)\, \psi_n(y)\, dy$$

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(y, x)\, \varphi_n(y)\, dy \quad (^1).$$

A complemento di quanto è stato ivi detto sul modo di rappresentare la soluzione generale della (1), mi propongo di far vedere, che si può costruire una funzione

$$\Psi(x, d_1, d_2, \dots), \tag{4}$$

contenente, se il sistema delle funzioni ortogonali (3) non è chiuso, un insieme finito o numerabile di costanti arbitrarie, soggette in quest' ultimo caso alla condizione che converga la serie dei loro quadrati; in guisa che, per valori comunque assegnati a tali costanti, la (4) rappresenti una soluzione della (1), sommabile insieme col suo quadrato, e che d'altra parte ogni soluzione cosiffatta venga dalla (4) rappresentata, quando si fissino convenientemente le costanti medesime. Il numero delle costanti arbitrarie è finito, se le (3) ammettono un sistema complementare finito, un sistema, cioè composto di un numero finito di funzioni, che, aggregate alle (3), diano luogo ad un sistema chiuso di funzioni ortogonali.

1. Supposto il sistema delle funzioni ortogonali (3) non chiuso, s' indichi con

$$\chi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{5}$$

una successione di funzioni, sommabili insieme coi loro quadrati, tali che non esistano soluzioni effettive per le equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \chi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots);$$

in particolare può considerarsi la successione

$$\chi_i(x) = x^{i-1} \; (^2) \qquad (i = 1, 2, \dots),$$

o un determinato sistema chiuso, qualsivoglia, di funzioni ortogonali.

(1) Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, pag. 461.

(2) Cfr. C. Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI, 2° sem. 1913, § 10.

Mediante le (5), si costruisca [1] per il sistema (3) un sistema complementare:

(6) $$\psi'_1(x) \,.\, \psi'_2(x) \,, \ldots , \psi'_j(x) \,, \ldots$$

È facile il vedere che ogni soluzione $\eta(x)$ delle equazioni integrali

(7) $$\int_a^b \eta(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1 , 2 , \ldots),$$

cioè dell'equazione

(8) $$\int_a^b \mathrm{K}(x , y)\, \eta(y)\, dy = 0 ,$$

è rappresentata dalla serie

(9) $$\eta(x) = \mathrm{T}_1(x) + \sum\nolimits_\nu \left[\mathrm{T}_{\nu+1}(x) - \mathrm{T}_\nu(x)\right],$$

ove

(10) $$\mathrm{T}_\nu(x) = \sum\nolimits_j \frac{c_j}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi'_j(x)\, dx \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x)\, \psi'_j(x)\, dx ,$$

ed

$$h_1 \,, h_2 \,, \ldots , h_\nu \,, \ldots$$

indica una successione, comunque scelta, di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero; in particolare: che si ha anche

(11) $$\eta(x) = \sum\nolimits_j c_j\, \psi'_j(x) \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x)\, \psi'_j(x)\, dx ,$$

se il sistema (6) è composto di un numero finito di funzioni, ovvero la serie $\sum_j c_j\, \psi'_j(x)$ converge nell'intervallo (a , b). A tal'uopo si osservi che, convergendo in media la successione

$$\overline{\mathrm{S}}_m(x) = \sum_1^m{}_j\, c_j\, \psi'_j(x) \qquad (m = 1 , 2 , \ldots) ,$$

esiste una funzione $\overline{\eta}(x)$, sommabile insieme col suo quadrato, unica e ben determinata, se si eccettuano i punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

(12) $$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[\overline{\eta}(x) - \sum_1^m{}_j\, c_j\, \psi'_j(x)\right]^2 dx = 0,$$

ed alla quale compete [2] la rappresentazione

(13) $$\overline{\eta}(x) = \mathrm{T}_1(x) + \sum\nolimits_\nu \left[\mathrm{T}_{\nu+1}(x) - \mathrm{T}_\nu(x)\right],$$

[1] Cfr. C. Severini, loc. cit. [3], § 9.

[2] Cfr. C. Severini, loc. cit. [3], § 9.

ove $T_\nu(x)$ ha il significato dianzi detto; ed anche l'altra:

$$\overline{\eta}(x) = \sum_j c_j \psi'_j(x) \quad , \quad c_j = \int_a^b \eta(x) \psi'_j(x)\, dx , \tag{14}$$

se il sistema (6) è composto di un numero finito di funzioni, ovvero converge la serie $\sum_j c_j \psi'_j(x)$.

Ma si ha, da un canto:

$$\int_a^b \overline{\eta}(x) \psi'_j(x)\, dx = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

donde

$$\int_a^b [\eta(x) - \overline{\eta}(x)] \psi'_j(x)\, dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots); \tag{15}$$

e, d'altro canto:

$$\int_a^b \overline{\eta}(x) \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e quindi

$$\int_a^b [\eta(x) - \overline{\eta}(x)] \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

La (15) e la (16), essendo il sistema formato dalle (3) e dalle (6) chiuso, ci dànno:

$$\eta(x) = \overline{\eta}(x),$$

e però dalla (13) segue la (9), e, quando ne sia il caso, dalla (14) la (11).

Viceversa, se si coordina alle funzioni (6) una qualsivoglia successione di numeri:

$$d_1, d_2, \ldots d_j, \ldots$$

tali che, se le (6) non sono in numero finito, converga la serie

$$\sum_j d_j^2 , \tag{17}$$

e s'indica con $\eta'(x)$ la funzione alla quale converge in media la successione

$$\overline{S}'_m(x) = \sum_1^m{}_j\, d_j \psi'_j(x), \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

si trova, come precedentemente:

$$\int_a^b \eta'(x) \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

e per conseguenza la funzione $\eta'(x)$ è una soluzione delle equazioni integrali (7), per la quale si ha:

$$\eta'(x) = T'_1(x) + \sum_\nu [T'_{\nu+1}(x) - T'_\nu(x)], \tag{18}$$

in cui

$$T'_\nu(x) = \sum_j \frac{d_j}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi'_j(x)\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \dots);$$

ed anche:

$$\eta'(x) = \sum_j d_j\, \psi'_j(x)\,, \tag{19}$$

se le (6) sono in numero infinito, ovvero la serie $\sum_j d_j\, \psi'_j(x)$ è convergente.

Da quanto è stato dianzi detto si ricava il seguente risultato:

Se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *non è chiuso, la soluzione generale delle equazioni integrali* (7), *o, ciò che è lo stesso, dell'equazione* (8), *è rappresentata dalla serie* (18), *ove le d_j sono costanti arbitrarie, soggette, quando non sono in numero finito, alla condizione che converga la serie dei loro quadrati. Nel caso che le* (6) *siano in numero finito, la detta soluzione generale è anche rappresentata dalla* (19).

2. Dalle considerazioni del § precedente segue l'unicità del sistema complementare di un dato sistema non chiuso di funzioni ortogonali, nel senso che, trovato un sistema complementare, ogni altro sistema complementare, o meglio ogni altra soluzione effettiva delle corrispondenti equazioni integrali, si può, come è stato detto, da quello dedurre [1]. L'osservazione presenta specialmente interesse nel caso che esista un sistema complementare finito, nel qual caso, esprimendosi le soluzioni delle dette equazioni linearmente ed omogeneamente per mezzo delle funzioni di questo sistema, si deduce che il numero delle funzioni componenti un sistema complementare è costante, non dipende cioè dal modo col quale il sistema complementare viene realizzato.

Riferendoci al sistema (3), e detto p il numero (supposto finito) delle (6), se potesse esistere un altro sistema complementare

$$\psi''_1(x)\,, \psi''_2(x)\,, \dots\,, \psi''_r(x)\,, \dots\,, \tag{20}$$

contenente più di p funzioni, si potrebbero scrivere $p+1$ relazioni della forma:

$$\psi''_r(x) = \sum_1^p {}_j\, c_{jr}\, \psi'_j(x) \quad , \quad c_{jr} = \int_a^b \psi''_r(x)\, \psi'_j(x)\, dx\,, \tag{21}$$

dalle quali, eliminando le (6), si dedurrebbe una relazione almeno, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, fra le (20): il che è impossibile, essendo le (20) fra loro ortogonali.

Analogamente si prova che non possono le (20) essere in numero minore di p.

[1] Cfr. G. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei (Roma), vol. XXI, serie 5ª, 1° sem. 1912.

Nel caso che il sistema complementare (6) sia finito, abbiamo visto che la soluzione generale delle equazioni (7) è rappresentata dalla (19), e dipende linearmente ed omogeneamente da un numero finito di costanti arbitrarie. È facile vedere che sussiste la proprietà inversa. Si ammetta, infatti, che la soluzione generale delle (7) sia rappresentata da

$$\sum_1^p {}_r\, d'_r\, g_r(x)\,, \tag{22}$$

ove le d'_r sono costanti arbitrarie, e quante si vogliano delle funzioni

$$g_r(x) \qquad (r = 1\,, 2\,, \ldots\,, p)\,, \tag{23}$$

che si intendono sommabili insieme coi loro quadrati, comunque scelte, risultano sempre linearmente indipendenti. La medesima soluzione generale sarà anche rappresentata da

$$\sum_1^p {}_s\, d''_s\, h_s(x)\,,$$

le funzioni

$$h_s(x) \qquad (s = 1\,, 2\,, \ldots\,, p)\,, \tag{24}$$

essendo dedotte dalle (23) mediante ortogonalizzazione [1]; ed è bene evidente che il sistema (24) è complementare per il sistema (3).

Da quanto precede, si ricava il seguente risultato:

Se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *non è chiuso, affinchè la soluzione generale delle equazioni integrali* (7), *cioè dell'equazione* (8), *sia rappresentata da una espressione della forma* (22), *ove le* $g_r(x)$ *soddisfano alle condizioni sopra dette, e dipenda quindi linearmente ed omogeneamente da un numero finito di costanti arbitrarie* d'_r, *è necessario e sufficiente che il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *ammetta un sistema complementare finito. Il numero delle costanti arbitrarie è allora fisso, ed eguale al numero delle funzioni componenti un sistema complementare.*

3. Dal risultato del § 1, e da quanto è stato detto nella Nota I [2], segue per l'equazione integrale di prima specie (1) quest'altro teorema:

Supposte verificate le condizioni occorrenti, indicate nella Nota I (§§ 1 e 2), *se il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *non è chiuso, e con*

$$\psi'_1(x)\,, \psi'_2(x)\,, \ldots\,, \psi'_j(x)\,, \ldots \tag{6}$$

[1] Cfr. E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, II^e série, tome X (1908), pp. 5-98, pag. 50.

[2] Loc. cit. [1].

s'indica un suo sistema complementare, la soluzione generale della (1) *è rappresentata dalla serie*

$$W'_1(x) + \sum_\nu [W'_{\nu+1}(x) - W'_\nu(x)] ,$$

ove

$$W'_\nu(x) = \sum_n \frac{1}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} [\lambda_n \, a_n \, \psi_n(x) + d_n \, \psi'_n(x)] \, dx ,$$

$$a_n = \int_a^b f(x) \, \varphi_n(x) \, dx ,$$

le

$$d_1 , d_2 , \ldots , d_j , \ldots$$

essendo costanti arbitrarie, soggette, quando non sono in numero finito, alla condizione che converga la serie dei loro quadrati, e le

$$h_1 , h_2 , \ldots , h_n , \ldots$$

quantità positive, comunque scelte, decrescenti, tendenti a zero.

Nel caso che le (6) *siano in numero finito, la detta soluzione generale è anche rappresentata dalla serie*

$$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)] + \sum_j d_j \, \psi'_j(x) ,$$

ove

$$U_\nu(x) = \sum_n \frac{\lambda_n \, a_n}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} \psi_n(x) \, dx .$$

In fine, se il sistema delle funzioni ortogonali (3) *è chiuso, l'unica soluzione della* (1), *sommabile insieme col suo quadrato, è data dalla serie*

$$U_1(x) + \sum_\nu [U_{\nu+1}(x) - U_\nu(x)] . \tag{25}$$

4. La condizione caratteristica, per le equazioni integrali di prima specie (1), le cui soluzioni generali dipendono linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie, è fornita dal risultato del § 2. Il teorema che se ne ricava è il seguente:

Sotto le condizioni dei teoremi enunciati nella Nota I (§§ 1 e 2), *l'equazione* (1) *ammette un'unica soluzione, sommabile insieme col suo quadrato, se il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *è chiuso; e viceversa. Se questo sistema non è chiuso, affinchè la soluzione generale della* (1) *sia rappresentata da una serie, ottenuta aggiungendo alla serie* (25) *una espressione della forma* (22), *ove le $g_r(x)$ soddisfano alle condizioni sopra dette, e dipenda quindi linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie d'_r, è necessario e sufficiente che il sistema delle funzioni ortogonali* (3) *ammetta un sistema complementare finito. Il numero delle costanti arbitrarie è allora fisso ed eguale al numero delle funzioni, componenti un sistema complementare.*

4. Le considerazioni dianzi svolte si applicano con vantaggio nella ricerca delle funzioni permutabili di seconda specie con una funzione data. Di ciò mi propongo di occuparmi in una prossima Nota.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione collo spettrometro.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio Pietro Blaserna.

Sebbene non abbia fatto finora uno studio teorico completo della disposizione precedentemente descritta, (nella quale i raggi luminosi emergenti dal reticolo e formanti uno spettro hanno in media la stessa direzione dei raggi incidenti) pure nel caso di un punto luminoso e di raggi giacenti in un piano perpendicolare alla superficie del reticolo, ed alle sue righe è risultato che la condizione di uguaglianza fra l'angolo d'incidenza e quello d'emergenza dei raggi è favorevole alla produzione d'uno spettro nitido.

In conformità della teoria dei reticoli concavi, quale viene esposta dal Kayser (*Handbuch der Spectroscopie*, Bd. I), dal Battelli e Cardani (*Trattato di fisica*, vol. II), siano OX ed OY i due assi cartesiani nel cui piano, e su OX, si trovi il centro della superficie del reticolo; sia ROR' la traccia del reticolo, che ha le linee perpendicolari al piano XOY; siano $P(a, b)$ e $P'(a', b')$ il punto luminoso ed un punto in cui le onde, emesse da P e riflesse o diffratte dal reticolo, arrivino concordanti; siano, inoltre, $M(x, y)$ ed $M_1(x_1, y_1)$ due punti omologhi in due strisce riflettenti successive dimodochè sia $y - y_1 = s$ la lunghezza dell'elemento del reticolo, e si ponga anche $y - y_1 = \delta y$ e $PM + P'M = S$, $PM_1 + P'M_1 = S + \delta S$. La condizione di concordanza delle onde provenienti da M ed M_1 può scriversi:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial . PM}{\partial y} + \frac{\partial . PM'}{\partial y} \right) s = m\lambda,$$

essendo

$$\overline{PM}^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 \quad , \quad \overline{PM'}^2 = (a' - x)^2 + (b' - y)^2;$$

ossia, ponendo $a^2 + b^2 = p^2$, $a'^2 + b'^2 = p'^2$:

$$\overline{PM}^2 = p^2 - 2by - 2ax + x^2 + y^2 \ , \ \overline{PM'}^2 = p'^2 - 2b'y - 2a'x + x^2 + y^2.$$

Se si suppone che sia $x = 0$, cioè che il reticolo sia piano, si ha:

$$\overline{PM}^2 = \left(p - \frac{b}{p} y \right)^2 + \frac{a^2}{p^2} y^2 \quad , \quad \overline{PM'}^2 = \left(p' - \frac{b}{p'} y \right) + \frac{a'^2}{p'^2} y^2;$$

ed estraendo per approssimazione la radice quadrata e, nel coefficiente di y^2 trascurando by/p rispetto a p si avrà:

$$PM = p - \frac{b}{p} y + \frac{a^2}{2p^3} y^2 \quad , \quad PM' = p' - \frac{b'}{p'} y + \frac{a'^2}{2p'^3} y^2,$$

e la condizione di concordanza diviene:

$$\left(\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}\right)s-\left(\frac{a^2}{p^3}+\frac{a'^2}{p'^3}\right)ys=m\lambda,$$

che, per essere soddisfatta per ogni valore di y, richiede che sia:

$$\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}=\frac{m\lambda}{s}\quad,\quad\frac{a^2}{p^3}+\frac{a'^2}{p'^3}=0,$$

cioè, se i ed e sono gli angoli d'incidenza POX e d'emergenza P'OX,

(1) $\quad \operatorname{sen} i+\operatorname{sen} e=m\lambda/s \quad , \quad \cos^2 i/p+\cos^2 e/p'=0\,.$ (2)

Se di x, che è sempre piccolissimo rispetto ad y (mentre y lo è rispetto ad a e b), si tien conto della sola 1ª potenza, siccome si ha $x^2+ y^2=2\mathrm{R}x$, equazione della circonferenza ROR', e, quindi, $(x^2+y^2)\,a/\mathrm{R}= 2ax$, ossia $2ax=ay^2/\mathrm{R}$, si avrà, sostituendo,

$$\overline{\mathrm{PM}^2}=\left(p-\frac{b}{p}y\right)^2+\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)y^2\quad,\quad\mathrm{PM}=p-\frac{b}{p}y+\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)\frac{y^2}{2p},$$

e la condizione di concordanza delle onde diviene,

$$\left(\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}\right)s-\left[\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)/p+\left(\frac{a'^2}{p'^2}-\frac{a'}{\mathrm{R}}\right)/p'\right]ys=m\lambda\,,$$

che, per esser soddisfatta, richiede che sia:

$$\frac{b}{p}+\frac{b'}{p'}=\frac{m\lambda}{s}\quad,\quad\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{\mathrm{R}}\right)/p+\left(\frac{a'^2}{p'^2}-\frac{a'}{\mathrm{R}}\right)/p'=0,$$

ossia: $\operatorname{sen} i+\operatorname{sen} e=\dfrac{m\lambda}{s}$,

(3) $$\frac{\cos^2 i}{p}+\frac{\cos^2 e}{p'}=\frac{\cos i+\cos e}{\mathrm{R}}\quad,\quad\frac{1}{p}\frac{\mathrm{R}\cos^2 i}{\cos i+\cos e}+\frac{1}{p'}\frac{\mathrm{R}\cos^2 e}{\cos i+\cos e}=1\,.$$

La relazione (3) può dedursi dalla (1), tenendo conto della curvatura dell'arco ROR'. Difatti, dalla (1) si ricava, per m e λ costanti,

$$\partial i/\partial e=-\cos e/\cos i\,;$$

inoltre, se si indicano con θ, θ', ε, gli angoli che con una retta fissa qualsiasi (p. es., la OY) fanno i raggi incidente ed emergente, e la normale nel punto d'incidenza (dalla parte del centro), per evidenti ragioni geometriche si ha: $di=d\theta-d\varepsilon$, $de=d\theta'-d\varepsilon$; e siccome dai triangoletti elementari, che hanno per base $\mathrm{R}d\varepsilon$, si ricava $pd\theta=\mathrm{R}d\varepsilon\cos i$, $p'd\theta'=\mathrm{R}d\varepsilon\cos e$, sostituendo questi valori di $d\theta$ e $d\theta'$ in quelli di di e de si ricava appunto la (3).

La relazione (1) dà, con sen e, la direzione in cui si forma, per determinati valori di i, m e λ, l'immagine colorata del punto luminoso; la (3) è della forma solita:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{p'}=1,$$

dove A e B, le distanze focali principali, sono costanti per determinati valori di i, m, λ (e, quindi, anche di e); essa, data la distanza del punto luminoso, dà quella della sua immagine. Allo stesso scopo può servire la solita semplice costruzione geometrica; segnato il punto di coordinate A, B, ogni retta passante per esso taglia, sugli assi, due segmenti: e se uno di questi è lungo p, l'altro sarà lungo p'. È però da notare che A e B sono costanti condizionalmente e che variano (come varia e) al variare di i e di m.

La relazione (3) diviene, come è noto, molto semplice se $p = R \cos i$, cioè se il punto luminoso è sulla circonferenza costruita sul raggio OC del reticolo come diametro, perchè in tal caso la (3) si riduce a $p' = R \cos e$: quindi l'immagine del punto luminoso, qualunque siano i ed m e λ, si forma sulla stessa circonferenza. La stessa relazione notevolmente si semplifica anche se si fa $i = e$, poichè essendo per la (1) $\lambda = 2s \operatorname{sen} i/m$ diviene

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{R\cos i/2};$$

Per $p = \infty$, p' diviene $R \cos i/2$; cioè, l'immagine diffratta del punto luminoso all'infinito si forma, nella direzione dei raggi incidenti, sulla circonferenza tangente al reticolo e di raggio R/4. Se $p = R \cos i/2$ e $p' = \infty$, ritengo che lo spettro formantesi a distanza infinita sia perpendicolare alla direzione dei raggi, e lo siamo quindi anche le sue immagini prodotte da un obbiettivo, o da uno specchio concavo, o da un cannocchiale. Rimarebbe quindi evitato il principale o forse unico inconveniente di questa disposizione, l'obliquità degli spettri rispetto ai raggi che li producono.

Se i e p sono costanti, le immagini del punto luminoso corrispondenti ai diversi valori di λ e di m, cioè i varii spettri, si formano sopra una curva di 6° ordine, la cui natura e proprietà non ho ancora considerate.

Finalmente, se nella suddetta condizione di concordanza delle onde nel punto P' si tiene conto anche della 2ª potenza di x, si ha:

$$\overline{PM}^2 = p^2 - 2by + y^2\left(1-\frac{a}{R}\right) + x^2\left(1-\frac{a}{R}\right)$$
$$= \left(p-\frac{b}{p}y\right)^2 + y^2\left(\frac{a^2}{p^2}-\frac{a}{R}\right) + x^2\left(1-\frac{a}{R}\right);$$

ed estraendo nel modo solito la radice quadrata, per approssimazione, si ha:

$$PM = p - \frac{b}{p} y + \frac{y^2}{2p}\left(\frac{a^2}{p^2} - \frac{a}{R}\right) + \frac{x^2}{2p}\left(1 - \frac{a}{R}\right).$$

Se il punto luminoso si trova sulla suddetta circonferenza avente per diametro il raggio mediano del reticolo, si ha: $p^2 = aR$, $a/R = a^2/p^2$, $(1 - a/R) = b^2/p^2$ come trovasi nei suddetti trattati; ed il termine in x^2, precedentemente trascurato, diviene

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{b^2}{p^3} + \frac{b'^2}{p'^3}\right) \quad \text{o anche} \quad \frac{x^2}{2R}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e}\right),$$

che ha diversi valori a seconda del valore di i e, quindi, di e.

Uguagliando a zero la derivata del fattore tra parentesi (rammentando che $de/di = -\cos i/\cos e$), si trova, come condizione di minimo,

$$\frac{\operatorname{sen} i(1 + \cos^2 i)}{\cos^3 i} = \frac{\operatorname{sen} e(1 + \cos^2 e)}{\cos^3 e}.$$

che è soddisfatto per $i = e$.

Per assicurarsi che tale condizione non indichi invece un massimo del suddetto fattore, si osservi, coll'oculare diretto normalmente al reticolo, cioè per $e = 0$, una certa riga (e sia p. es. $i = 45°$; e quindi $\operatorname{sen} i = \cos i = 0{,}7$, $\lambda = 0{,}7 s/m$); sarà:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e} = 1{,}4.$$

Ora si collochi l'oculare accanto alla fessura, diretto verso il reticolo, e si sposti la fessura coll'oculare, finchè nel campo di questo appaia la stessa riga dello stesso spettro di prima; sarà

$$i = e \ , \ 2 \operatorname{sen} i = 2 \operatorname{sen} e = (m/s)(0{,}7 s/m) = 1{,}4,$$

quindi

$$\operatorname{sen} i = \operatorname{sen} e = 0{,}35 \ , \ \operatorname{sen}^2 i = \operatorname{sen}^2 e = 0{,}12 \ , \ \cos^2 i = \cos^2 e = 0{,}88,$$
$$\cos i = \cos e = 0{,}94 \ ,$$

e sarà, quindi,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} + \frac{\operatorname{sen}^2 e}{\cos e} = 2\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\cos i} = \frac{0{,}24}{0{,}94} = 0{,}25,$$

valore notevolmente minore di quello ottenuto per $e = 0$.

Quindi da questo ragionamento (poco rigoroso, per effetto della estraziene approssimata di radice) risulterebbe che la condizione di concordanza delle onde è soddisfatta più esattamente nel caso di $e = i$, nel caso, cioè, che l'immagine del punto luminoso coincida con questo.

Fisica. — *La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer, e probabili regolarità.* Nota del dott. Antonino Lo Surdo, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

In una Nota anteriore (1), dopo aver riconosciuto che due righe, la H_β e la H_γ, della serie di Balmer si decompongono in modo diverso davanti al catodo, ho accennato alla opportunità di estendere l'indagine sulla scomposizione delle altre righe della serie; ed ho quindi proseguito le ricerche a tale scopo.

Mentre l'osservazione diretta (2) è assai comoda per la H_α e la H_β, per i termini successivi l'occhio è via via meno sensibile, ma si riesce ad ottenere buone immagini fotografiche.

A tal fine aggiustai lo spettrografo per il violetto e la prima parte dell'ultra-violetto. I vapori di mercurio provenienti dalla pompa erano questa volta trattenuti inserendo tra essa e il tubo l'apparecchio di condensazione che si manteneva raffreddato mediante immersione nell'aria liquida.

Il tubo adoperato era di vetro a pareti spesse, del diametro interno di circa mm. 1,5; ed era munito di catodo spostabile, secondo la modificazione apportata dal prof. Puccianti (3), per poterlo usare in diverse fotografie, poichè durante una sola esposizione il deposito catodico non arriva ad essere troppo opaco, purchè si limiti convenientemente, con opportune resistenze, l'intensità della corrente elettrica.

Veramente parecchie righe di impurità sono presenti nell'estremo violetto; ma si evita il pericolo di confonderle cogli elementi di decomposizione se, come nelle mie prime esperienze, si proietta sulla fenditura una immagine del tubo disposto parallelamente ad essa.

Gli elementi di decomposizione hanno il loro massimo allontanamento in vicinanza del catodo, e vanno poi gradatamente riunendosi a mano a mano che l'intensità del campo elettrico diminuisce. Formano quindi una una configurazione a ventaglio che permette sicuramente di distinguerli tra le altre righe non inclinate, e di ricondurli alla riga da cui hanno origine.

Nella figura 1 è rappresentata una di tali scomposizioni in relazione colla sezione del tubo: per esempio per la doppia esterna delle righe osser-

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 18 gennaio 1914.
(2) In questi Rendiconti. Seduta del 15 febbraio 1904.
(3) Ibid.

vate finora, costituita da vibrazioni parallele al campo elettrico. Nella parte sinistra F è la fenditura dello spettroscopio: lungo essa si forma in C l'immagine del catodo, in L quella del primo strato luminoso catodico, in H lo spazio quasi oscuro di Hittorf Crookes che si estende fino in L′ dove comincia

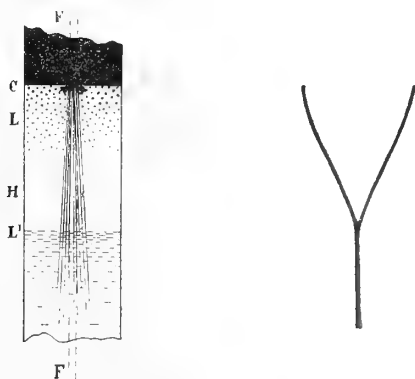



Fig. 1.

il 2° spazio luminoso. Nella parte destra, in corrispondenza, è rappresentato l'aspetto della riga decomposta ([1]).

La disposizione ottica era dunque, in sostanza, quella stessa delle prime esperienze: il tubo, un prisma birifrangente, un doppio anastigmatico Zeiss, erano aggiustati convenientemente sopra un solido banco ottico che permetteva di allinearli esattamente sul prolungamento dell'asse ottico del collimatore. L'apertura dell'obiettivo era più che sufficiente perchè il fascio luminoso coprisse completamente il sistema dei prismi.

La lunghezza dello spazio era circa 2 mm.; la caduta di potenziale totale del tubo, che in buona parte è caduta catodica, era circa 5000 Volta;

([1]) Ogni elemento a a si può quindi considerare come un diagramma della distribuzione del campo nelle diverse sezioni del tubo come si vede schematicamente nella fig. 2, dove l'asse x coincide colla riga non decomposta, e y si prende come asse della detta intensità. Allora, ammettendo che lo scarto sia proporzionale ad essa, l'area compresa rappresenta la caduta di potenziale nella regione catodica, e siccome la riga a a risulta

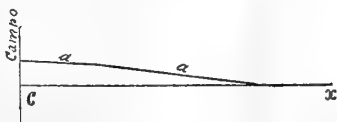



Fig. 2.

molto approssimativamente una retta inclinata sulla x, il valor medio della intensità del campo elettrico si ottiene dividendo la totale caduta catodica per la distanza fra il catodo C e il limite dello spazio oscuro; il massimo di detta intensità in prossimità del catodo, è dato dal doppio di questo valore medio.

l'intensità di circa 1,5 milliampères. L'esposizione durava complessivamente un'ora; ma, per evitare un eccessivo riscaldamento del tubo, la si frazionava in intervalli di pochi minuti intercalati con intervalli di riposo.

Queste fotografie mi hanno dato buone immagini per la H_γ nella forma e coi caratteri già noti, e contengono impressioni della H_δ naturalmente più deboli, ma pure sufficientemente intense per potere riconoscere che la scomposizione di questa riga avviene in sei elementi: i due estremi con vibrazioni (secondo Fresnel) parallele al campo elettrico, i quattro interni con vibrazioni perpendicolari, ciò secondo la previsione analogica ([1]) suggerita dal comportamento delle prime 3 righe. La seguente tabella riassume il comportamento delle 4 righe osservate ([2]) in relazione alla regolarità della serie di Balmer espressa dalla formola:

$$\frac{1}{\lambda} = a - \frac{4a}{n^2} \quad (^3)$$

la quale, per $n = 1$ e 2, darebbe valori non interpretabili, e per $n = 3$, 4, ecc. dà le lunghezze d'onda rispettivamente dei termini 1, 2, 3, ecc.

Righe	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ	6562,1	4860,7	4340,1	4101,2
n	3	4	5	6
N. totale delle componenti. . .	3	4	5	6
N. d'ordine.	1	2	3	4
Componenti a vibrazioni normali.	1	2	3	4
Aspetto delle righe ([4])				

È notevole la coincidenza del numero totale degli elementi col valore del parametro n, e del numero delle componenti interne col numero d'ordine della riga nella serie.

([1]) L. Puccianti, in questi Rendiconti, seduta del 15 febbraio 1914.

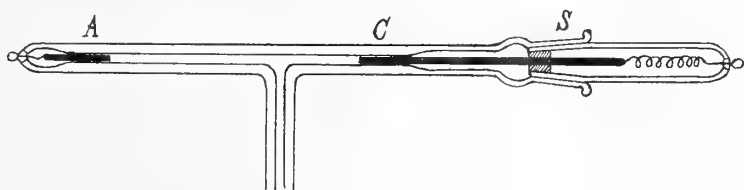
([2]) L. Puccianti, loc. cit.; A. Lo Surdo, in questi Rendiconti, sedute del 21 dicembre 1913 e 18 gennaio 1914.

([3]) H. Kayser, *Handbuch d. Spectroscopie*, vol. II, pag. 514.

([4]) Le componenti spostate verso l'alto sono quelle a vibrazioni parallele al campo.

Fisica. — *La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico*[1]. Nota del prof. Luigi PUCCIANTI, presentata dal Socio A. Ròiti.

Il prof. A. Lo Surdo ha insegnato [2] a osservare, nel primo strato luminoso davanti al catodo, la scomposizione delle righe spettroscopiche, già osservata in altro modo dallo Stark [3]; mostrando come, in tubo sottile, la caduta catodica si concentra in un tratto assai limitato della lunghezza totale, cioè si ottiene un campo intensissimo in cui le componenti delle righe si allontanano notevolmente le une dalle altre.

Questo artifizio mi ha permesso di osservare l'effetto per la riga rossa dell'idrogeno, con uno spettroscopio (costrutto dalla Hilger di Londra) munito di un prisma a deviazione costante, usando un tubo del diametro interno di circa mm. 1,5

Le pareti del tubo bisogna che sieno piuttosto grosse perchè esso, scaldandosi non si ammollisca in vicinanza del catodo, e in ogni modo non si può mantenervi a lungo la corrente data da 5000 accumulatorini senza correr rischio di rottura.

In oltre, in vicinanza del catodo la parete si ricuopre rapidamente di un velo metallico, che dopo poco rende inservibile il tubo.

Per questo mi son fatto un apparecchietto che porta applicato con un cono smerigliato (S) un pezzo facilmente separabile, nel quale è impegnato a sfregamento duro in un tappo (che non fa però tenuta d'aria) il filo di alluminio C, catodo. Si può facilmente, quando il vetro è velato dal deposito catodico, in pochi minuti smontare il tubo, tirare avanti un poco il catodo in modo che giunga alla parte pulita del vetro, e rimontare l'apparecchio.

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.

(2) Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Seduta del 21 dicembre 1913 e del 15 febbraio 1914.

(3) Sitzungsber. der K. Preuss. Ak. der Wiss. 47, 1913.

Il tubo, mediante uu rubinetto a tre vie, può essere messo in comunicazione colla tromba pneumatica di Gaede o con un apparecchio per produrre idrogeno dal formiato e dall'idrato sodico.

La disposizione ottica è la seguente:

La regione catodica del tubo si trova nel fuoco d'una prima lente acromatica che è seguìta dall'analizzatore ottico (il quale si può anche rimuovere), e da un'altra lente che proietta l'immagine del tubo sulla fenditura dello spettroscopio.

Tubo, lenti e analizzatore sono disposti sopra un banco di ottica, e accuratamente aggiustati. Essendo l'asse del tubo orizzontale e la fenditura verticale, è chiaro che in questo modo si osserva solo la luce emessa da una sezione della colonna gassosa, che deve esser vicinissima alla faccia piana del catodo.

Per la H_β (F solare) potei facilmente confermare i risultati del Lo Surdo: riconoscere, cioè, che essa si scompone in due elementi esterni vibranti (secondo Fresnel) parallellemente al campo elettrico, e due interni vibranti perpendicolarmente al campo; e potei accertare che non esiste l'elemento polarizzato centrale indicato dallo Stark.

Per la H_α(C solare), invece, la scomposizione avviene così:

Senza l'analizzatore, si osserva una tripla coll'elemento centrale più intenso di quelli laterali. Introducendo l'analizzatore, si riconosce che questi sono totalmente polarizzati con vibrazioni parallele al campo, mentre l'elemento centrale è totalmente polarizzato con vibrazioni perpendicolari al campo.

Dalle osservazioni di Lo Surdo (¹), e dalle mie, risulta adunque che gli elementi a vibrazioni normali al campo sono rispettivamennte 1, 2, 3 per le righe H_α, H_β, H_γ, cioè il loro numero è uguale al numero d'ordine delle rispettive righe nella serie di Balmer.

Sarà generale questa relazione?

È ciò che il collega Lo Surdo sta ricercando colla fotografia delle righe successive.

(¹) Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, seduta del 18 gennaio 1914.

Fisica. — *Confronto tra la scomposizione catodica della prima e della seconda riga della serie di Balmer* (1). Nota del prof. LUIGI PUCCIANTI, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

La disposizione è quella descritta nella Nota precedente (2); salvo che, trattandosi di tentare qualche misura, si è data una maggiore stabilità allo insieme degli strumenti.

L'analizzatore è un prisma di Glan-Thompson il quale non sposta il fascio luminoso che lo traversa, e quindi non dovrebbe turbare (come potrebbe fare un nicol) l'acromatismo della imagine del tubo sopra la fenditura.

Tale acromatismo sembrerebbe, a prima vista indispensabile per confrontare la distanza tra le componenti delle due righe: perchè, se la immagine azzurra e la rossa non coincidono perfettamente, si verranno a confrontare gli effetti a due diverse distanze dal catodo, mentre si sa che la separazione decresce appunto allontanandosi dal catodo.

Siccome sospettavo l'esistenza di una leggiera aberrazione cromatica, credei necessario disporre in modo che si potesse facilmente capovolgere il tubo così da porre il catodo talora a destra, talora a sinistra della linea visuale.

Per individuare perfettamente la sezione del tubo studiata e la sua distanza dal catodo, serviva un microscopio munito di oculare a scala, allineato coll'asse degli altri pezzi ottici, ma collocato da banda opposta di questi rispetto al tubo. Inviando un fascio luminoso per l'obiettivo entro il collimatore, si vede nel microscopio, per legge di reciprocità ottica, l'immagine della fenditura attraverso alle pareti del tubo. La scala permette di determinarne la distanza dal catodo, la quale si può regolare a volontà con l'aiuto della slitta trasversale portante il tubo. Per rendere possibili tali spostamenti, la connessione colla tromba a mercurio è fatta con una canna di vetro sottile e lunga, più volte ripiegata. Il microscopio serve anche a osservare l'aspetto della luminosità catodica, e a individuare la posizione del limite tra lo spazio quasi oscuro di Hittorf e la seconda luminosità catodica, limite che, essendo assai netto e spostandosi notevolmente al variare della densità del gas, come è noto, serve di criterio assai facile per mantenere costanti le condizioni elettriche, specialmente per rarefazione poco spinta.

(1) La presente ricerca fu eseguita nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto di studî superiori in Firenze.

(2) In questi Rendiconti, seduta del 15 febbraio 1914.

In quest'ultimo caso è preferibile di valersi delle indicazioni di un voltometro elettrostatico che appositamente inserii in parallelo al tubo.

La tromba a mercurio di Gaede si presta benissimo non solo a produrre speditamente la rarefazione, ma a variarla facilmente in più e in meno.

Lo spettroscopio è munito di un micrometro oculare a vite con passo di $^1/_2$ mm, e testa divisa in 50 parti. Occorreva però principalmente, per puntare le componenti della H_β, illuminare i fili a campo oscuro. A tal fine, seguendo un metodo assai noto agli astronomi, inviavo la luce di una lampada a petrolio, mediante un prisma a riflessione totale, entro il cannocchiale di osservazione per l'obiettivo a traverso una piccola regione marginale, la cui immagine, formata dall'oculare nella pupilla di egresso dello strumento, veniva esclusa da un apposito diaframma che lasciava però scoperta la massima parte della pupilla.

Interponevo per le osservazioni della H_β un vetro di cobalto e un vetro verde che davano alla illuminazione dei fili colorazione simile a quella della immagine da misurare; ciò a fine di evitare l'incertezza della messa in foco dipendente dall'aberrazione cromatica dell'oculare e dell'occhio. Per la H_α talvolta ho usato un vetro rosso; ma essa è abbastanza chiara perchè vi si possa veder contro il solco dei fili neri.

L'incertezza della semplice puntata era, in buone condizioni, non superiore a un decimo di divisione della testa di vite per la riga rossa, ed assai inferiore ad una divisione per l'azzurra; essendo i rispettivi sdoppiamenti vicini a 5 e 20 divisioni, l'errore non avrebbe raggiunto il 4 o il 5 per cento sul rapporto. Ma qualche maggiore incertezza proviene da leggiere incostanze del tubo e da qualche altra causa meno precisabile.

Determinai precedentemente il valore in unità Ångström di una divisione della vite nell'intorno delle righe C ed F con l'osservazione di alcune righe di Fraunhofer vicine, valendomi della mappa fotografica di Rowland.

Nella tabella sono riportate le medie delle distanze tra le due componenti a vibrazioni parallele al campo ottenute da due gruppi di misure, nel primo dei quali la costanza del tubo era mantenuta coll'aiuto dell'osservazione al microscopio, nel secondo coll'aiuto del voltometro che segnava 4700 volta.

Dalle distanze ho calcolato le variazioni di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ in unità Ångström, e il loro rapporto che risulta assai vicino a $^3/_2$,

	Larghezza della doppia in μ		$\Delta\lambda_\alpha$	$\Delta\lambda_\beta$	$\frac{\Delta\lambda_\beta}{\Delta\lambda_\alpha}$
	H_α	H_β			
Catodo a sinistra	42	181	7,3	11,3	1,55
" a destra	41	173 ½	7,1	10,8	1,52
Catodo a destra	43 ½	175 ½	7,5	10,9	1,45
" a sinistra	44 ½	178	7,7	11,1	1,44
				media	1,49

Ricordiamo la legge della serie di Balmer

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{m^2}{m^2 - 4},$$

ove λ_∞ è la lunghezza d'onda del limite, e m prende i valori interi: 3 per H_α, 4 per H_β ecc. E si vede subito:

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} = \frac{27}{20}.$$

Quindi il rapporto delle due separazioni in frazioni delle rispettive lunghezze d'onda risulta

$$\frac{\left(\frac{\Delta\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}{\left(\frac{\Delta\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha}\right)} = \frac{\Delta\lambda_\beta}{\Delta\lambda_\alpha}\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} = 1{,}49\,\frac{27}{20} = 2{,}01\,.$$

Si presentano dunque come assai e ugualmente plausibili due relazioni semplicissime:

$$\frac{\Delta\lambda_\beta}{\Delta\lambda_\alpha} = \frac{3}{2} \qquad \frac{\left(\frac{\Delta\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}{\left(\frac{\Delta\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha}\right)} = 2\,;$$

ma devesi avvertire che esse non possono essere entrambe rigorose, perchè il valore $\frac{3}{2}$ del primo rapporto, darebbe per il secondo il valore

$$\frac{3}{2}\,\frac{27}{20} = \frac{81}{40}\,.$$

Le presenti misure non permettono di dire di più essendo limitate a due sole righe. Esse sono destinate a riconnettere lo sdoppiamento della riga, che meno si presta alla fotografia, alle altre della serie che possono essere studiate simultaneamente sulla lastra sensibile.

Chimica. — *Ricerche di chimica sistematica: rutenio, rodio, palladio* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

L'appunto più grave che si può fare al sistema periodico, considerato non soltanto come classificazione degli elementi, ma come la base della classificazione di tutti i composti inorganici, riguarda la sua insufficienza a spiegare come elementi eterologhi possano, nella stessa forma di combinazione, inferiore al limite, dare composti perfettamente analoghi.

Ciò venne riconosciuto anche dal Piccini [2]: « Giova sperare », egli scriveva nel 1899, « che il sistema periodico sarà presto messo in grado di spiegare cose che, per ora, non ispiega e non prevede; e, tra queste, il fatto importantissimo che elementi, diversi per il loro comportamento generale, possono somigliarsi moltissimo quando appariscono nelle stesse forme di combinazione; fatto che, male interpretato, ha servito a introdurre e a conservare nella sistematica gravissimi errori e a falsare il concetto di analogia. Così per esempio, tra il cromo e il vanadio nella forma del sesquiossido e del protossido v'è certamente più analogia che tra il vanadio e il tantalio nella loro forma limite RX_5 caratteristica del gruppo; eppure, questi elementi sono omologhi, e, quelli, eterologhi fra di loro ».

Molti altri esempî potrebbero venir aggiunti a quello citato dal Piccini. Basterà ricordare che i composti di magnesio rassomigliano più a quelli del Mn^{II}, del Fe^{II}, e del Co^{II} che non a quelli di zinco, di cadmio e di mercurio: e che i composti di alluminio, più che a quelli d'indio e di tallio, rassomigliano a quelli del Cr^{III} e del Fe^{III}.

In una breve Nota [3], pubblicata nel 1909, io mostrai che la legge periodica può dar ragione delle somiglianze che esistono tra composti di elementi eterologhi, qualora si dia maggior estensione al concetto di analogia fra gli elementi. Io proponevo — s'intende, dal punto di vista e agli effetti della sistematica — di considerare i composti, corrispondenti alle diverse valenze di uno stesso elemento, come composti di altrettanti elementi diversi, e di equiparare la serie delle forme di combinazione di ogni elemento, avente più valenze, a un periodo incompleto di elementi. Ciò non è, in fondo, che la constatazione del fatto che la legge dell'eterologia, cioè il graduale differenziarsi degli elementi nei periodi col crescere del peso atomico, si verifica,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell'Università di Ferrara.

(2) L'Orosi, 21_{370}; Z. f. anorg. Ch., 19_{304} (1899).

(3) Atti della Società italiana per il progresso delle scienze, 1909.

anche nella serie delle forme di combinazione di ogni elemento a più valenze, col crescere della valenza. Così, per esempio, le variazioni graduali di proprietà, che si riscontrano passando dal manganese bivalente al manganese eptavalente attraverso il tri- il tetra- e l'esavalente, ricordano le variazioni che si osservano passando, nel secondo piccolo periodo, dal magnesio al cloro attraverso l'alluminio, il silicio e lo zolfo.

Come la periodicità dell'eterologia negli elementi determina le analogie tra le forme limiti di questi, così la periodicità dell'eterologia nelle serie di forme di combinazione è la causa determinante delle analogie parziali, cioè delle analogie tra composti corrispondenti a valenze sotto il limite. I composti corrispondenti alle forme VdX_3, CrX_3, MnX_3, FeX_3, CoX_3 presentano analogia non solo tra loro ma anche coi composti di alluminio, perchè il posto, che l'alluminio occupa nel 2° piccolo periodo, corrisponde a quello che le forme suddette occupano in diverse serie di forme di combinazione.

Il su notato parallelismo tra la serie delle forme di combinazione del manganese e il 2° piccolo periodo, si può constatare anche per altri elementi. Riporto alcuni esempî; e, per brevità, esprimo le analogie mediante eguaglianze di rapporti:

$$Ti^{III} : Ti^{IV} = Al : Si$$

$$Vd^{II} : Vd^{III} : Vd^{IV} : Vd^{V} = Mg : Al : Si : P^{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} Cr^{II} : Cr^{III} : Cr^{VI} \\ Fe^{II} : Fe^{III} : Fe^{VI} \\ Ru^{II} : Ru^{III} : Ru^{VI} \end{array}\right\} = Mg : Al : S$$

$$\left.\begin{array}{l} Cu^{I} : Cu^{II} \\ Ag^{I} : Ag^{II} \end{array}\right\} = Na : Mg$$

$$\left.\begin{array}{l} Au^{I} : Au^{III} \\ Tl^{I} : Tl^{III} \end{array}\right\} = Ag^{I} : In^{III}$$

$$Hg^{I} : Hg^{II} = Ag : Cd$$

$$\left.\begin{array}{l} Sn^{II} : Sn^{IV} \\ Pb^{II} : Pb^{IV} \end{array}\right\} = Ca : Ti = Sr : Zr = Ba : Ce^{IV}$$

$$Bi^{III} : Bi^{V} = La : Ta^{V} : In : Sb^{V} .$$

Alcune delle analogie indicate da queste eguaglianze sono evidenti; altre non lo sono punto. Fra i composti di magnesio e quelli dell'Ag^{II} e del Ru^{II} non si conosce alcuna relazione. Ma anche elementi che, secondo il sistema periodico, sono omologhi, avendo peso atomico molto diverso, non presentano alcuna somiglianza, e vengono messi in relazione soltanto interponendo, fra essi, degli elementi a peso atomico intermedio che segnano il passaggio. Così tra il magnesio e il mercurio bisogna interporre lo zinco e il cadmio. Nel nostro caso il magnesio può venir congiunto al Ru^{II} dal Fe^{II}, che dà

ferrocianuri analoghi ai rutenocianuri; e può venir avvicinato all'Ag^{II} dal Cu^{II}, la cui analogia coll'Ag^{II} venne da me dimostrata [1].

La massima analogia parziale si riscontra tra elementi a peso atomico molto vicino, come Vd^{III}, Cr^{III}, Mn^{III}, Fe^{III} ; Mn^{II}, Fe^{II}, Co^{II}, Ni^{II}, Cu^{II}; ecc. Analogia della stessa natura può ritenersi quella che esiste tra gli elementi delle terre rare nella forma trivalente.

Per gli elementi delle terre rare, così difficilmente classificabili, le su riportate uguaglianze giustificano le note analogie tra i sali del Bi^{III} e quelli di lantanio e del cerio trivalente e fanno prevedere nell'indio un termine di passaggio tra gli elementi trivalenti tipo lantanio e quelli tipo alluminio.

Anche gli elementi del platino, che nella chimica inorganica occupano un posto quasi altrettanto singolare quanto quello delle terre rare, non sempre possono venir messi in relazione — specie nelle forme inferiori — cogli elementi più comuni, perchè la loro chimica presenta ancora molte lacune.

Io ho intrapreso delle ricerche tanto sull'indio quanto sugli elementi del platino, coll'intento di allargare la base sperimentale delle considerazioni su esposte.

In una prossima Nota riferirò sopra alcuni sali doppî d'indio. In questa vengono descritte le ricerche che ho finora eseguite sul rutenio, sul rodio, e sul palladio, e i cui risultati principali sono i seguenti:

1°) Il rutenio trivalente forma, coll'acetilacetone, un composto rosso cristallizzato, monomolecolare in bromoformio e solubile, allo stato solido, nell'acetilacetonato di alluminio.

2°. Il rodio, coll'acido molibdico, forma composti complessi — rodimolibdati — che presentano analogia chimica e cristallografica coi corrispondenti molibdati complessi dell'alluminio, del Fe^{III}, del Cr^{III}, e del Co^{III}.

3°) Il palladio bivalente dà un acetilacetonato che è monomolecolare in bromoformio, e che forma cristalli misti coll'acetilacetonato rameico.

Mentre l'analogia tra il Rh^{III} ed altri elementi trivalenti (Co^{III} e Cr^{III}) era stata già dimostrata per varî composti (cianuri e ossalati doppii, allumi, ammoniacati), non era finora noto, per quanto mi risulta dalla letteratura, che il rutenio trivalente potesse essere isomorfogeno coll'alluminio, e il palladio bivalente col rame.

Parte sperimentale.

Acetilacetonato di rutenio.

$$Ru(C_5H_7O_2)_3.$$

Venne ottenuto trattando la soluzione di $RuCl_3$ con bicarbonato potassico (4-6 mol. per un atomo di rutenio) e acetilacetone (4 mol.) a caldo.

[1] Questi Rendiconti, 1912, I_{560}.

I metodi comunemente usati per ottenere gli acetilacetonati (azione dell'acetilacetone sugli ossidi idrati metallici, sui sali in presenza di acetati alcalini o di ammoniaca ecc.), non sono applicabili coi sali di rutenio. Il sesquiossido idrato di rutenio non sembra reagire coll'acetilacetone; e i sali di rutenio, coll'ammoniaca e cogli acetati, formano probabilmente composti complessi.

La soluzione bruna di $RuCl_3$, per aggiunta di $KHCO_3$, diventa verde, poi, per aggiunta di acetilacetone, a caldo, diventa rossa, e lascia depositare una polvere rosso-sangue, cristallina. Dalle acque madri, per prolungata evaporazione, o, meglio, mediante estrazione con cloroformio, si può ricavare una nuova porzione dello stesso prodotto, ma assai meno puro,

La sostanza-rossa ricristallizzata dal benzolo o dal cloroformio, si presenta in prismi microspici, di un rosso rubino, lucenti e trasparenti. È insolubile in acqua; solubile in quasi tutti i solventi organici, con intensissima colorazione rossa. Dagli acidi forti (ad es., dall'acido cloridrico) viene facilmente decomposta. Scaldata nel vuoto sublima, dando un vapore rosso che, all'aria, s' infiamma con lieve esplosione e formazione di una polvere nera.

L'analisi di questo composto non presenta difficoltà notevoli. Il rutenio venne determinato decomponendo il composto a bagno-maria con ripetuti trattamenti con acido cloridrico, e riducendo il cloruro con idrogeno. Nella combustione non si avvertì, come poteva temersi, formazione di tetrossido di rutenio.

Calcolato per $Ru(C_5H_7O_2)_3$		Trovato
Ru	25,50	25,25
C	45,13	45,50
H	5,31	5,54

Venne determinato, per via crioscopica, il peso molecolare dell'acetilacetonato di rutenio in bromoformio ($K = 144$).

gr. 0,1894 di sostanza, sciolti in gr. 17,73 di bromoformio, determinarono un abbassamento di gradi 0,38, da cui si calcola un peso molecolare di 404. Peso molecolare teorico = 399. Dunque l'acetilacetone di rutenio è in soluzione monomolecolare come l'acetilacetonato di alluminio [1] mentre gli acetilacetonati degli elementi trivalenti delle terre rare sono bimolecolari [2].

Se ad una soluzione di acetilacetonato di rutenio in benzolo si aggiunge una soluzione di acetilatonato di alluminio (che, com'è noto, è incoloro), e si lascia evaporare lentamente la soluzione mista si ottengono dei cristalli omogenei tanto più rossi quanto più rutenio conteneva la soluzione. Se il rutenio era presente solo in quantità molto piccola si ottengono dei cristalli

(1) W. Biltz, Ann. 331_{334} (1904).
(2) Loc. cit.

appena rosei. Questi cristalli che contengono ad un tempo alluminio e rutenio sono soluzioni solide cristalline. Ciò prova che l'acetilacetonato di rutenio è isomorfo coll'acetilacetonato di alluminio.

Rodimolibdati.

Rodimolibdato di ammonio.

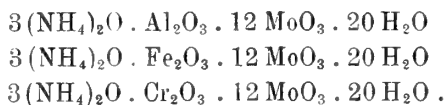
$$3(NH_4)_2O \cdot Rh_2O_3 \cdot 12MoO_3 \cdot 20H_2O \,.$$

A gr. 50 di eptamolibdato di ammonio sciolti, in gr. 200 di acqua a freddo, si aggiungono gr. 10 di cloruro doppio di rodio e sodio sciolti in 25 cc. di acqua, e si scalda a bagno-maria finchè il liquido, da rosso, sia diventato giallo; poi si raffredda. Si separa tosto una polvere cristallina color ambra, che, esaminata al microscopio, risulta formata di laminette trasparenti a forma quadrata. Questa sostanza contiene ammoniaca, rodio e acido molibdico. È poco solubile in acqua a freddo; lo è di più a caldo. Dalle soluzioni in acqua calda cristallizza per raffreddamento. La sua solubilità viene diminuita dalla presenza di sali di ammonio.

Per dosare il rodio, la sostanza venne scaldata fortemente in capsula di platino con un eccesso di carbonato potassico. L'ossido di rodio, che così si ottiene, venne separato per filtrazione, calcinato in corrente di idrogeno, lavato con acido cloridrico, poi di nuovo ridotto. Il molibdeno venne separato dal filtrato come solfuro, e pesato come anidride molibdica.

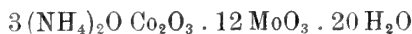
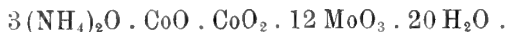
	Calcolato per $3(NH_4)_2O \cdot Rh_2O_3 \cdot 12MoO_3 \cdot 20H_2O$	Trovato
Rh	8,23	8,25
N	3,35	3,29
MoO_3	69,18	68,67

Il rodimolibdato di ammonio corrisponde dunque perfettamente ai molibdati complessi di Al Fe^{III} e Cr^{III}, descritti da Struve [1] fin dal 1854

$$3(NH_4)_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 12\,MoO_3 \cdot 20\,H_2O$$
$$3(NH_4)_2O \cdot Fe_2O_3 \cdot 12\,MoO_3 \cdot 20\,H_2O$$
$$3(NH_4)_2O \cdot Cr_2O_3 \cdot 12\,MoO_3 \cdot 20\,H_2O \,.$$

Friedheim e Keller [2] descrissero nel 1906 un cobaltimolibdato di ammonio, al quale rimasero incerti se attribuire la formula

$$3(NH_4)_2O\ Co_2O_3 \cdot 12\,MoO_3 \cdot 20\,H_2O$$

o l'altra

$$3(NH_4)_2O \cdot CoO \cdot CoO_2 \cdot 12\,MoO_3 \cdot 20\,H_2O \,.$$

[1] Journ. prakt. Chem., 61_{437}.
[2] Ber. 39_{4301}.

Io ho preparato, secondo Friedheim e Keller, del cobaltimolibdato di ammonio, che è un composto cristallizzato verde. In una sua soluzione satura a freddo ho sciolto, a caldo, del rodimolibdato di ammonio. Per raffreddamento, ho ottenuto un deposito cristallino, omogeneamente colorato in verdognolo che conteneva Rh e Co. Il cobaltimolibdato è dunque isomorfo col rodimolibdato, ed è da ritenere che, in esso, il cobalto sia tutto nella forma trivalente. Ciò venne confermato anche preparando analogamente cristalli misti del composto di cobalto con quelli alluminio e di cromo (N.B. Il cromimolibdato di ammonio ha un color roseo-lilla).

Rodimolibdato di potassio.

$$3\,K_2O\,.\,Rh_2O_3\,.\,12\,MoO_3\,.\,20\,H_2O\,.$$

Venne ottenuto trattando una soluzione, calda, e al massimo concentrata di rodimolibdato di ammonio, con una soluzione satura di cloruro potassico. Si separa per raffreddamento in cristalli tabulari, analoghi a quelli del composto ammonico.

	Calcolato per $3K_2O\,.\,Rh_2O_3\,.\,12\,MoO_3\,.\,20\,H_2O$	Trovato
Rh	7,84	7,97
MoO_3	65,84	65,10
K	8,94	9,07

Acetilacetonato di palladio.

$$Pd\,(C_5\,H_7\,O_2)_2\,.$$

A. Werner (1) ottenne l'acetilacetonato del platino bivalente trattando a caldo il cloroplatinito potassico, prima con potassa caustica, poi con acetilacetone. Io ho trovato più conveniente di operare per il palladio come per il rutenio. Una soluzione di cloruro palladoso viene trattata a freddo con bicarbonato potassico in eccesso; poi con acetilacetone in quantità calcolata. Agitando fortemente il liquido perchè l'acetilacetone si mescoli bene con la soluzione, si forma tosto un precipitato cristallino giallo-canario che è l'acetilacetonato di palladio. Esso venne ricristallizzato dal benzolo e, all'analisi diede i seguenti risultati:

	Calcolato per $Pd(C_5\,H_7\,O_2)_2$	Trovato
Pd	35,01	34,61
C	39,37	39,37
H	4,63	4.75

(1) Ber., 34_{2592} (1901).

Come l'acetilacetonato di platino bivalente (1), anche quello di palladio è in soluzione monomolecolare. Ciò venne determinato per via crioscopica in bromoformio ($K = 144$). Gr. 0,2604 di sostanza, sciolti in gr. 18,195 di bromoformio, diedero un abbassamento di gradi 0,69, da cui si calcola un peso molecolare di 298. Peso molecolare teorico = 305.

Col metodo di Retgers venne riconosciuto l'isomorfismo dell'acetilacetonato di palladio coll'acetilacetonato rameico. Dalle soluzioni miste dei due composti in cloroformio si separano cristalli più o meno verdi, o azzurri, o giallastri, a seconda che prevale nella soluzione il rame o il palladio.

Chimica — *Sulle ossime dell' α-naftil-fenil-chetone*. Nota di Mario Betti e di Pasquale Poccianti (2), presentata dal Corrisp. A. Peratoner.

L'α-naftil-fenil-chetone:

$$C_{10}H_7—CO—C_6H_5\,,$$

chetone asimmetrico, fa prevedere la possibilità di due ossime stereoisomeriche:

$$\begin{array}{c} C_{10}H_7—C—C_6H_5 \\ \| \\ N—OH \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} C_{10}H_7—C—C_6H_5 \\ \| \\ HO—N \end{array}.$$

Nella letteratura si trova menzione di un'ossima oleosa, di colore giallastro, preparata da Spiegler nel 1884 (3) per azione del cloridrato di idrossilamina sul naftil-fenil-chetone in soluzione alcoolica bollente. La formazione di questa ossima non è stata confermata dai successivi sperimentatori. Infatti, qualche anno più tardi, Kegel (4), riscaldando a 100-110° il chetone con cloridrato di idrossilamina in soluzione alcoolica ottenne invece un'ossima cristallizzata in ciuffi bianchi fusibili a 140-142°. Nel 1908 Caille (5) descrisse poi un'ossima cristallizzata in aghi bianchi, setacei, fusibili a 73°, tenuta per azione dell'idrossilamina sul chetone in presenza di cloruro di zinco.

L'azione dell'idrossilamina sul naftil-fenil-chetone avviene con una certa difficoltà: forse i due gruppi naftilico e fenilico, per impedimento sterico,

(1) Ber., 34_{2598} (1901).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Siena.

(3) Monatshefte, *5*, 200; Ber. *17*, I, 810 (1884).

(4) Annalen, *247*, 181; Ber. *21*, III, R. 723 (1888).

(5) Bull. Soc. chim. [4], III. 916 (1908).

ostacolano la reazione della base col gruppo carbonilico, come talvolta accade in altri casi simili [1]. Questa difficoltà fu, del resto, rilevata già da altri sperimentatori, e per es. da Rousset, che non riuscì ad ottenere l'ossima dell'α-naftil-fenil-chetone, e poi anche da Caille (loc. cit.), che potè prepararla soltanto in condizioni speciali.

Per azione dell'idrossilamina sull'α-naftil-fenil-chetone, variando opportunamente le condizioni della reazione, come sarà esposto dettagliatamente più avanti, abbiamo potuto ottenere *due composti isomerici*, verosimilmente due ossime stereoisomeriche, *fusibili* l'una a *127°*, l'altra a *161°*, delle quali la prima si trasforma nella seconda.

Il miscuglio di questi due composti fonde a circa 140-145° e corrisponde probabilmente all'ossima descritta da Kegel. Non ci fu invece possibile di ottenere l'ossima fusibile a 73° descritta da Caille, ma nelle condizioni da lui indicate riottenemmo chetone inalterato (f. 73-74°): in condizioni soltanto di poco diverse da quelle ottenemmo un miscuglio dei due composti fusibili rispettivamente a 127° ed a 161°.

α-Naftil-fenil-chetone. $C_{10}H_7—CO—C_6H_5$ — Per la preparazione del chetone fu seguìto il metodo proposto da Grucarevic e Merz [2], consistente nel far bollire a ricadere per 3 o 4 ore gr. 100 di naftalina e gr. 80 di cloruro di benzoile, insieme con un piccolo pezzetto di zinco [3]. Cessato lo sviluppo di acido cloridrico il prodotto si distilla a fiamma diretta. L'olio giallo denso che si raccoglie viene trattato con etere e con un po' di alcool e dopo qualche giorno di riposo per evaporazione parziale del solvente fornisce un'abbondante cristallizzazione di prismi massicci lucenti, costituita per la massima parte di α-chetone. Il β-chetone, che per quanto in proporzione minore si forma insieme con questo, rimane nelle acque madri, e si può ricavare ulteriormente [4].

L'α-chetone si cristallizza dall'alcool e puro fonde a 75°.5 (il chetone β fonde a 82°).

[1] Cfr. Claus e Stiebel, Ber. *20*, 3101 (1887); Beckmann, Ann. *252*, 14 (1889); Hantzsch, Ber. *23*, 2772 (1890); V. Meyer ed altri. Feith e Davies Ber. *24*, 3546 (1891), hanno trovato che a temperatura relativamente bassa l'acetomesitilene non reagisce coll'idrossilamina, ma con più forte riscaldamento si forma un composto che però non è l'ossima, ma è il prodotto corrispondente alla trasposizione di Beckmann.

[2] Ber. *6*, 1238 (1873).

[3] Invece dello zinco può servire come catalizzatore anche una traccia di anidride fosforica, come ha recentemente trovato H. Lecher (Ber. *46*, 2664 (1913).

[4] Per separare i due chetoni α e β, Rousset (Bull. sc. Chim. [3], 15, 71) consiglia di trattare la soluzione benzenica del prodotto greggio con acido picrico: precipita soltanto il chetone β.

α-Naftil-fenil-chetone puro, esente da composto β, si può ottenere secondo G. Reddelien, Ber. *46*, 2718 (1913) facendo agire il cloruro dell'acido α-naftoico sul benzolo in soluzione nel solfuro di carbonio ed in presenza di cloruro d'alluminio.

AZIONE DELL'IDROSSILAMINA SULL'α-NAFTIL-FENIL-CHETONE.

Si ottiene generalmente un prodotto misto, di punto di fusione non netto, che cristallizzato ripetutamente dall'alcool fornisce un composto di punto di fusione costante e di aspetto uniforme. A seconda delle condizioni della preparazione, questo composto corrisponde o all'isomero 127° o a quello 161°. Se si fa agire l'idrossilamina messa in libertà dal suo cloridrato per mezzo dell'alcali, si forma prevalentemente l'isomerico 127°, se si fa agire il cloridrato di idrossilamina, senza aggiunta di alcali, si ha invece in maggiore proporzione il composto fusibile a 161°.

Composto fusibile a 127°. — Si ottiene quasi esclusivamente operando nelle condizioni seguenti. A 5 gr. di chetone disciolti in 25 cc. di alcool ordinario si aggiungono 2 gr. di cloridrato di idrossilamina e 6 cc. di *idrato sodico al 20 %*. Si scalda in autoclave a 130-140° per circa 8 ore, dopo di che il liquido si versa in una bevuta, vi si aggiunge il poco alcool di lavaggio del recipiente dell'autoclave, e si tratta tutto con acqua fino ad incipiente intorbidamento. Col riposo si forma un deposito cristallino che greggio si liquefà verso i 125° ma diviene completamente limpido soltanto verso 145°. Cristallizzato più volte dall'alcool fonde costantemente a 127°. Si presenta in *cristalli bianchi, opachi riuniti in aggregati sferici a forma di cavolfiore.*

Analisi: I gr. 0,1841; CO_2 gr. 0,5582; H_2O gr. 0,0883,
II gr. 0,2844; azoto secco a 24° e 726^{mm} cc. 14,8.

	Trovato %		Calcolato per $C_{17}H_{13}ON$
	I	II	
C	82,69	—	82,59
H	5,33	—	5,30
N	—	5,71	5,67

Peso molecolare per ebullioscopia in cloroformio ($K = 36$):
Sostanza gr. 0,3462; solvente gr. 39,08; $\Delta = 0°,140$.

P. m. trovato	Calcolato per $C_{17}H_{13}ON$
228	247

Alla formula $C_{17}H_{13}ON$ corrisponde l'*ossima dell'α-naftil-fenil-chetone*:

$$C_{10}H_6—C(NOH)—C_6H_5 .$$

Un prodotto fusibile a circa 120°, ma completamente limpido soltanto a 138°, si ottiene aggiungendo a 7 gr. di chetone sciolti in 50 cc. di alcool, 3 gr. di cloridrato di idrossilamina, e gr. 2,25 di *carbonato sodico secco*, e scaldando per 8 o 9 ore a ricadere sotto la pressione di 13 cm. di mer-

curio. Anche questo prodotto è per la massima parte costituito dall' isomerico fusibile a 127°.

Composto fusibile a 161°. — Si ottiene quasi esclusivamente questo isomerico nelle condizioni seguenti. Grammi 7 di chetone sciolti in 30 cc. di alcool ordinario si trattano con 3 gr. di cloridrato di idrossilamina e si scalda in autoclave a 135-140° per circa 8 ore. Il liquido si tratta poi con acqua fino ad incipiente intorbidamento, e col riposo fornisce un prodotto cristallino fusibile a 135-140°. Cristallizzato più volte dall'alcool fonde costantemente a 161°. Si presenta in *cristalletti massicci, incolori, trasparenti*.

Analisi: I gr. 0,2557; CO_2 gr. 0,7730; H_2O gr. 0,1224,
II gr. 0,2142; azoto secco a 16°,2 e 737^{mm} cc. 9,8.

	Trovato %		Calcolato per $C_{17}H_{13}ON$
	I	II	
C	82,45	—	82,59
H	5,32	—	5,30
N	—	5,24	5,67

Peso molecolare per ebullioscopia in cloroformio (K = 36):
Sostanza gr. 0,3780; solvente gr. 36,28; $\Delta = 0°,160$.

P. m. trovato	Calcolato per $C_{17}H_{13}ON$
234	247

Il miscuglio a parti eguali dei due composti ora descritti fonde da 135° a 140°: un miscuglio contenente due parti di composto 161° e una parte di composto 127° fonde a 140-145°. È possibile che questo prodotto misto rappresenti l'ossima descritta da Kegel (loc. cit.) con punto di fusione 140-142°, poichè nelle condizioni da lui accennate (cloridrato di idrossilamina in soluzione alcoolica) si forma appunto in proporzione preponderante l' isomerico 161°.

Furon fatti anche dei *tentativi per ottenere l'ossima con punto di fusione 73°* descritta da Caille.

In una prima prova, seguendo esattamente le indicazioni riportate nella sua Nota (loc. cit.), gr. 6 di chetone sciolti in 60 cc. di alcool a 95° furon trattati con gr. 2,3 di cloridrato di idrossilamina, e con gr. 1,5 di idrato sodico in soluzione alcoolica. Si fece bollire per 5 minuti a bagno-maria, e nel frattempo furono aggiunti al miscuglio 3 gr. di cloruro di zinco fuso e polverizzato. Dopo raffreddamento fu aggiunta dell'acqua bollente acidificata con acido cloridrico, che disciolse prima il precipitato di composti minerali intanto formatosi, e dette poi luogo ad un intorbidamento seguìto dalla formazione di aghi, setacei bianchi. Questi fondevano bensì a 73° ma non contenevano azoto: erano chetone immutato, che fonde anche esso a

73-75°, e che trattato con acido solforico concentrato dà una colorazione rosso-aranciata simile a quella che dànno le sue ossime.

Altri tentativi nei quali fu adoperato alcool assoluto invece che alcool a 95°, oppure maggiore quantità di cloruro di zinco di quella sopra accennata, o cloridrato di idrossilamina in più forte eccesso, o fu scaldato per più lungo tempo, non condussero ad altro che a chetone immutato. Soltanto in un caso, nel quale la quantità dell'idrato sodico aggiunta era maggiore delle altre volte, e la *reazione* del liquido fortemente *alcalina*, fu ottenuto un prodotto misto, che per cristallizzazione frazionata, fornì i due composti 127° e 161°, con prevalenza di quello 127°.

Trasformazione del composto 127° nel composto 161°. — Come abbiamo visto il composto 127° si forma quando il miscuglio della reazione è alcalino, il composto 161° invece quando il miscuglio è acido.

Il composto 127° sciolto nell'alcool ordinario acidificato con acido cloridrico diluito, se si scalda a ricadere per 9 o 10 ore *si trasforma nel composto 161°*. Infatti, per raffreddamento cristallizza un prodotto che ha l'aspetto cristallino di questo, e fonde verso 150°. Dopo cristallizzazione dall'alcool, fonde a 159-160°.

Viceversa *il composto 161°* riscaldato in condizioni analoghe a quelle ora descritte, ma con alcool contenente un po' di soda caustica, *rimane immutato*.

La trasformazione del composto 127° in quello 161° avviene in parte anche *spontaneamente*. Un campione che fondeva nettamente a 127° lasciato a sè per cinque mesi, cambiò di aspetto e per riscaldamento si rammolliva verso 127°, ma fondeva completamente soltanto verso 150°. Viceversa il composto 161° conserva inalterati il suo aspetto, ed il suo punto di fusione.

Derivati benzoilici dei composti fusibili a 127° ed a 161°.

Per la benzoilazione si seguì il metodo di Schotten-Baumann e fu raggiunta nettamente e sollecitamente con ambedue i composti. Si ottennero prodotti che purificati dall'alcool cristallizzano in piccoli prismi romboedrici fusibili a 118°. I derivati benzoilici corrispondenti ai due diversi prodotti di partenza, fondono egualmente a 118°, anche se mescolati insieme intimamente.

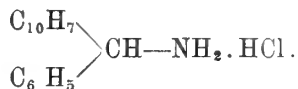
Analisi: gr. 0,1820; CO_2 gr. 0,5464; H_2O gr. 0,0833.

	Trovato %	Calcolato per $C_{24}H_{17}O_2N$
C	81,88	82,05
H	5,08	4,84

Il derivato benzoilico proveniente dal composto fusibile a 127° fu sciolto in alcool e fu scaldato con precauzione a bagno-maria insieme con poca soda caustica diluita. Dopo raffreddamento fu fatta gorgogliare nel liquido una

corrente di anidride carbonica che dette luogo ad un precipitato bianco. Lavato con alcool ed essiccato fonde a 161°. *Nella benzoilazione il composto 127° si trasforma dunque in quello 161°.*

Riduzione dei composti fusibili a 127° ed a 161°.
Cloridrato di naftil-benzilamina:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7 \diagdown \\ \quad \rangle CH—NH_2 . HCl . \\ C_6\ H_5 \diagup \end{matrix}$$

I due composti furono sciolti separatamente nell'alcool ed in condizioni assolutamente identiche furono ridotti con polvere di zinco e acido cloridrico diluito. Dopo 18 ore di riposo in ambedue le soluzioni si era formato un precipitato bianco, voluminoso che fu separato filtrando e purificato dall'alcool acquoso bollente. Col raffreddamento cristallizzarono delle rosette bianche, setacee, leggere, fusibili con decomposizione a 275-278°. Da ambedue i composti 127° e 161° si ottengono prodotti identici che mescolati intimamente fondono tuttavia a 275-278°.

Analisi:

Cloridrato proveniente dal composto fusibile a 161°.

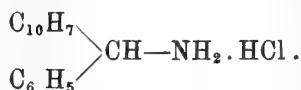
I gr. 0,3075; CO_2 gr. 0,8552; H_2O gr. 0,1626;
II » 0,2528; azoto secco a 24°,4 e 730^{mm} cc. 12,8;
III » 0,2690; $Ag\,NO_3$ $^N/_{10}$ consumato cc. 9,84.

	Trovato °/₀	Calcolato per $C_{17}H_{15}N . HCl$
C	75,85	75,70
H	5,88	5,94
N	5,58	5,20
Cl	12,97	13,17

Cloridrato proveniente dal composto fusibile a 127°.
gr. 0,2020; CO_2 0,5630; H_2O gr. 0,1076;

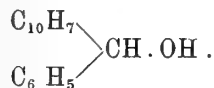
	Trovato °/₀	Calcolato per $C_{17}H_{15}N . HCl$
C	76,01	75,70
H	5,92	5,94

Il composto ora analizzato corrisponde al *cloridrato* di *naftil-benzilamina*:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7 \diagdown \\ \quad \rangle CH—NH_2 . HCl . \\ C_6\ H_5 \diagup \end{matrix}$$

Questo composto fu già ottenuto da Busche e Leefhelm [1] per mezzo di

[1] Journ. f. prakt. chem. [2], 77, 14 (1908).

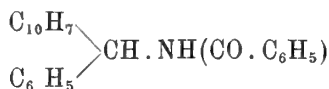
idrobenzamide e bromuro di α-naftilmagnesio ed i caratteri descritti dagli AA. concordano con quelli del prodotto da noi ottenuto. Per azione dell'acido nitroso gli AA. ne ottennero anche il corrispondente fenil-naftilcarbinolo:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7 \diagdown \\ \quad CH.OH. \\ C_6\,H_5 \diagup \end{matrix}$$

Dal cloridrato ottenuto nella riduzione tanto del composto 127° quanto di quello 161° furono preparati i derivati benzoilici della base, col solito metodo di Schotten-Baumann. In ambedue i casi si ebbe un composto che, purificato dall'alcool cristallizza in ciuffi di lunghi aghi setacei fusibili a 178°.

Analisi: gr. 0,1438; CO_2 gr. 0,4520; H_2O gr. 0,0760.

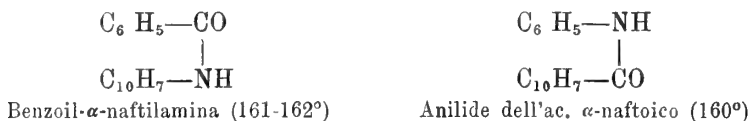
	Trovato %	Calcolato per $C_{24}H_{19}ON$
C	85,72	85,46
H	5,87	5,64

Il derivato benzoilico della naftil-benzilamina:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7 \diagdown \\ \quad CH.NH(CO.C_6H_5) \\ C_6\,H_5 \diagup \end{matrix}$$

corrisponde appunto alla composizione: $C_{24}H_{19}ON$.

Il fatto che ambedue i composti 127° e 161°, si trasformano per riduzione nella naftil-benzilamina fa escludere il dubbio che uno dei due isomerici invece che alla forma ossimica del naftil-fenilchetone possa corrispodere ad uno dei due seguenti composti:

$$\begin{matrix} C_6\,H_5\text{—}CO \\ \quad\; | \\ C_{10}H_7\text{—}NH \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} C_6\,H_5\text{—}NH \\ \quad\; | \\ C_{10}H_7\text{—}CO \end{matrix}$$

Benzoil-α-naftilamina (161-162°) — Anilide dell'ac. α-naftoico (160°)

formatosi in seguito alla nota trasposizione delle ossime. Anche la facilità colla quale ambedue i composti 127° e 161° formano derivati benzoilici sta contro questa supposizione.

Per la interpretazione dei due isomeri, 127° e 161°, non rimangono quindi altro che le due configurazioni stereochimiche:

$$\begin{matrix} C_{10}H_7\text{—}C\text{—}C_6H_5 \\ \| \\ NOH \end{matrix} \qquad e \qquad \begin{matrix} C_{10}H_7\text{—}C\text{—}C_6H_5 \\ \| \\ HO\text{—}N \end{matrix}$$

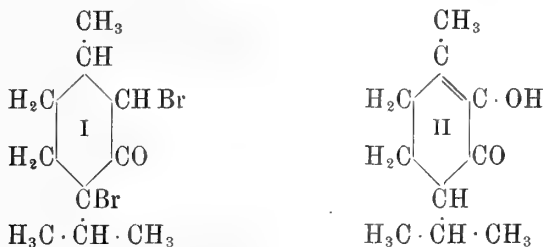
Altre indagini intorno a questi composti faranno argomento di ulteriore pubblicazione ([1]).

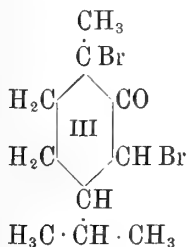
([1]) Il dott. Poccianti si riserva di studiare l'azione dell'idrossilamina sul β-naftil-fenilchetone, come pure quella dell'acido nitrico sopra ambedue i chetoni α e β, e renderà noti prossimamente i risultati delle indagini attualmente in corso di esperimento.

M. B.

Chimica. — *Bibromotetraidrocarvone e sua trasformazione in buccocanfora* (¹). Nota di G. Cusmano e P. Poccianti, presentata dal Socio E. Paternò.

Di recente uno di noi (²) ha stabilito la formola I per il bibromomentone, descritto fin dal 1896 da E. Beckmann e H. Eickelberg (³), e inoltre ha fatto conoscere che il composto medesimo, sotto l'azione degli alcali, fornisce buccocanfora (II)

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3 & \\
 & \dot{C}H & \\
H_2C & & CH\,Br \\
 & \mathrm{I} & \\
H_2C & & CO \\
 & \dot{C}Br & \\
 & H_3C\cdot\dot{C}H\cdot CH_3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & CH_3 & \\
 & \dot{C} & \\
H_2C & & C\cdot OH \\
 & \mathrm{II} & \\
H_2C & & CO \\
 & \dot{C}H & \\
 & H_3C\cdot\dot{C}H\cdot CH_3 &
\end{array}
$$

In questa Nota diremo di un bibromotetraidrocarvone, da noi ottenuto per la prima volta e per il quale abbiamo dimostrata la formola III, analoga a quella del bibromomentone

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3 & \\
 & \dot{C}\,Br & \\
H_2C & & CO \\
 & \mathrm{III} & \\
H_2C & & CH\,Br \\
 & \dot{C}H & \\
 & H_3C\cdot\dot{C}H\cdot CH_3 &
\end{array}
$$

Anche il nuovo composto, trattato con idrato potassico in soluzione acquosa al 2,5 %, alla temperatura di 40-50°, si trasforma in buccocanfora. Ora, stando a casi noti (⁴), nelle condizioni riferite gli atomi di alogeno legati ad atomi di carbonio secondarî vengono sostituiti dall'ossidrile, mentre gli atomi di alogeno uniti ad atomi di carbonio terziarî o vengono sostituiti con l'ossidrile, o sottratti come idracidi. Perciò, dal bibromomentone e dal

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell'Istituto di Studi superiori in Firenze.

(²) G. Cusmano, questi Rendiconti, vol. XXII, V, 2°, 569.

(³) Ber., *29*, 418 [1896].

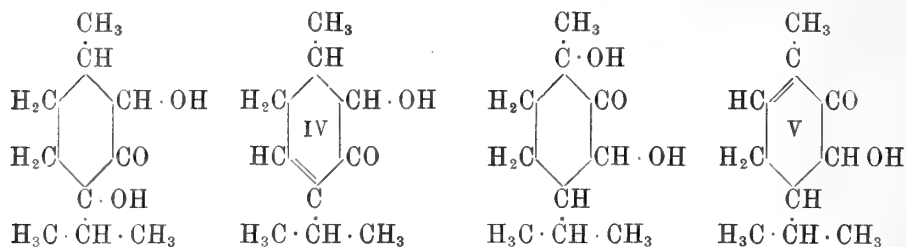
(⁴) O. Wallach, Ann., *281*, 128-131 [1894]; *324*, 86-87 [1902].

bibromotetraidrocarvone potevamo attendere rispettivamente le due coppie di composti:

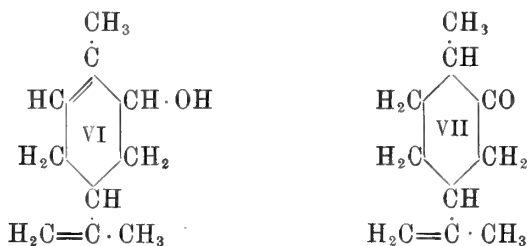
CH_3 / $\dot{C}H$ / H_2C $CH \cdot OH$ / H_2C CO / $C \cdot OH$ / $H_3C \cdot \dot{C}H \cdot CH_3$

(IV) CH_3 / $\dot{C}H$ / H_2C $CH \cdot OH$ / HC CO / C / $H_3C \cdot \dot{C}H \cdot CH_3$

CH_3 / $\dot{C} \cdot OH$ / H_2C CO / H_2C $CH \cdot OH$ / CH / $H_3C \cdot \dot{C}H \cdot CH_3$

(V) CH_3 / $\dot{C}$ / HC CO / H_2C $CH\,OH$ / CH / $H_3C \cdot \dot{C}H \cdot CH_3$

Ma noi, accanto alla buccocanfora, abbiamo potuto verificare solamente la presenza dei composti biossidrilati. Gli alcooli terpenici non saturi IV e V, seppure realmente si formano in un primo momento della reazione riferita, si devono tosto cambiare nell'isomerica buccocanfora. È noto che il carveolo (VI), per cause diverse, si trasforma facilmente [1] in diidrocarvone (VII)

(VI) CH_3 / $\dot{C}$ / HC $CH \cdot OH$ / H_2C CH_2 / CH / $H_2C{=}\dot{C} \cdot CH_3$

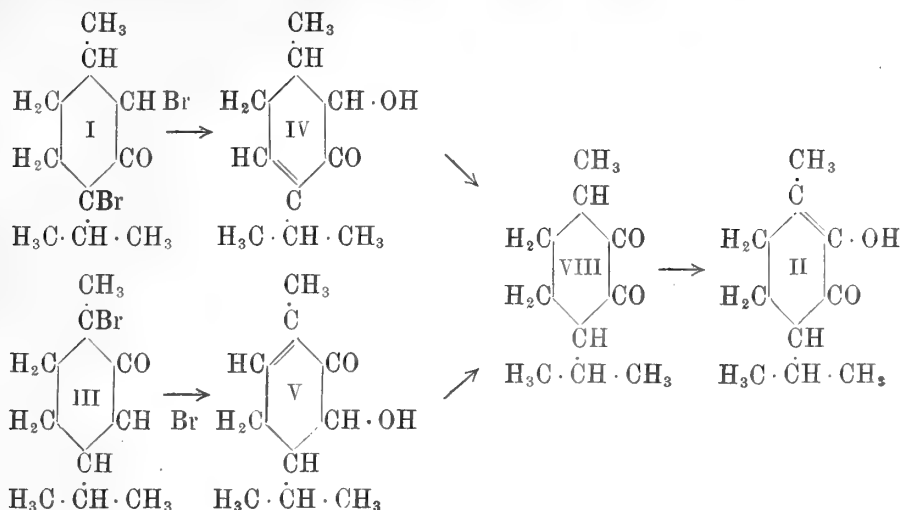
(VII) CH_3 / $\dot{C}H$ / H_2C CO / H_2C CH_2 / CH / $H_2C{=}\dot{C} \cdot CH_3$

Se si ammette che una analoga trasposizione intramolecolare subiscano gli alcooli IV e V, allora essi forniranno ambedue il dichetone VIII.

Quest'ultimo fu descritto da Martine [2] e secondo Semmler e Mc. Kenzie [3] passa facilmente a buccocanfora. Quindi, la formazione di tale sostanza dai derivati bromurati del mentone e del tetraidrocarvone si potrebbe così riassumere:

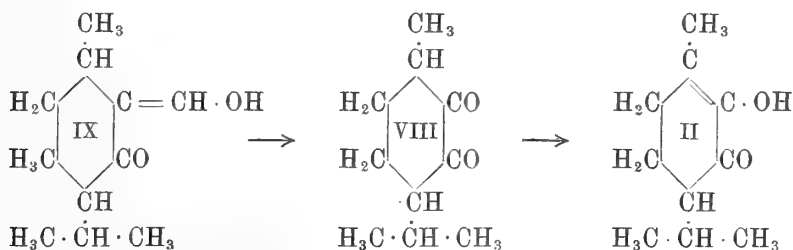
(1) O. Wallach, Ann. *281*, 128 [1894]; *306*, 273 [1899]; *324* 86 [1902] e *Terpene und Campher*, pag. 366 (Lipsia, 1909).

(2) Ann. de Chim. et Phys. [8], 3, 49 [1904].

(3) Berichte, *39*, 1158 [1906].

```
      CH3               CH3
      CH                CH
H2C /    \ CH Br   H2C /    \ CH·OH
   |  I   |    -->    |  IV  |
H2C \    / CO      HC  \\    / CO          \
      CBr               C                    \>      CH3                    CH3
H3C·CH·CH3        H3C·CH·CH3                         CH                     C
                                                H2C /    \ CO          H2C /    \\ C·OH
      CH3               CH3                        | VIII |      -->      |  II  |
      CBr               C                       H2C \    / CO          H2C \    / CO
H2C /    \ CO      HC //    \ CO                      CH                     CH
   |  III |    -->    |  V   |               />  H3C·CH·CH3            H3C·CH·CH3
H2C \    / CH Br  H2C \    / CH·OH
      CH                CH
H3C·CH·CH3        H3C·CH·CH3
```

La buccocanfora da noi ottenuta, nonostante provenga da materiale otticamente attivo e conservi un atomo di carbonio asimmetrico, non manifesta nessun potere rotatorio. Stando agli schemi sopra scritti, ciò poteva prevedersi nella sintesi dal bibromomentone; dall'altra sintesi, invece, non risulta se l'atomo di idrogeno legato al carbonio asimmetrico in 4 prenda parte alla trasposizione che conduce dall'alcool V al dichetone VIII.

Parimente inattiva è la buccocanfora ottenuta (attraverso il dichetone VIII) da Semmler e Mc. Kenzie [1] ossidando, o in ambiente acido o con ozono in presenza di acqua, l'ossimetilen-mentone attivo (IX)

```
      CH3                           CH3                    CH3
      CH                            CH                     C
H2C /    \ C = CH·OH          H2C /    \ CO          H2C /    \\ C·OH
   |  IX  |            -->       | VIII |      -->      |  II  |
H3C \    / CO                 H2C \    / CO          H2C \    / CO
      CH                            CH                     CH
H3C·CH·CH3                    H3C·CH·CH3             H3C·CH·CH3
```

e in questo caso è evidente che si poteva ottenere un composto rotatorio.

Ma il fatto più notevole è che anche la buccocanfora estratta dalle foglie di bucco (*Barosma* o *diosma crestata*) risulta inattiva e identica a quella sintetica.

Ora è conosciuta la regola (a cui sin oggi si citava come eccezione solamente il dipentene) che i composti con atomi di carbonio asimmetrico elaborati dalle cellule vegetali o animali si presentano costantemente in

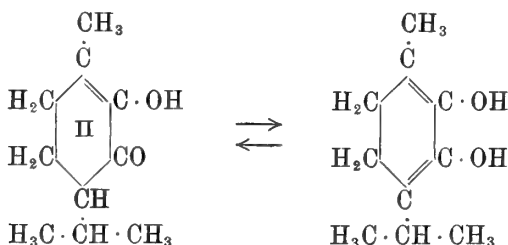
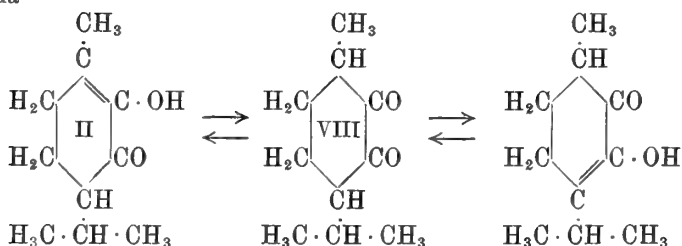
(1) Loc. cit.

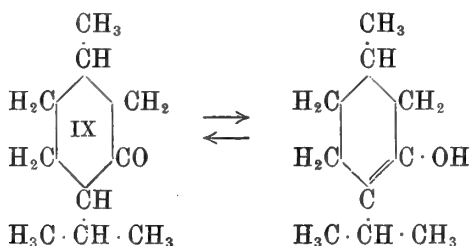
forma attiva. Quindi la buccocanfora costituirebbe un' altra eccezione, e bisogna ammettere che essa si racemizzi all'atto della sua estrazione dalla pianta.

La buccocanfora contiene un atomo di carbonio asimmetrico cui è legato un atomo di idrogeno capace di tautomeria. Possiamo quindi spiegare la racemizzazione con l'esistenza di uno scambio cheto-enolico espresso da

CH_3 / C / H_2C — C·OH / (II) / H_2C — CO / CH / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$ ⇄ CH_3 / C / H_2C — C·OH / H_2C — C·OH / C / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$

oppure da

CH_3 / C / H_2C — C·OH / (II) / H_2C — CO / CH / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$ ⇄ CH_3 / CH / H_2C — CO / (VIII) / H_2C — CO / CH / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$ ⇄ CH_3 / CH / H_2C — CO / H_2C — C·OH / C / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$

Un meccanismo analogo è stato ammesso, come è noto [1] per spiegare la racemizzazione del mentone (IX)

CH_3 / CH / H_2C — CH_2 / (IX) / H_2C — CO / CH / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$ ⇄ CH_3 / CH / H_2C — CH_2 / H_2C — C·OH / C / $H_3C \cdot CH \cdot CH_3$

e di altri composti. In questi casi però il fenomeno di tautomeria e quindi la racemizzazione ha un decorso assai lento e si manifesta specialmente sotto l' influenza di agenti chimici o fisici, mentre per la buccocanfora si manifesterebbe assai rapidamente.

Bibromo-1-3-tetraidrocarvone.

Il tetraidrocarvone che ci ha servito per la preparazione del composto bromurato si è ottenuto secondo le indicazioni di Vavon [2], riducendo il

(1) Stewart, Stereochemistry, 36 (Londra, 1907).

(2) Bull. [4], 9, 256 (1911).

carvone con idrogeno in presenza di nero di platino. Il processo permette di ottenere agevolmente il chetone puro, poichè, se si usa la precauzione di impiegare carvone di fresco distillato, l'idrogeno viene assorbito per tempi eguali in misura costante fino alla quantità corrispondente a quattro atomi; dopodichè un rallentamento sensibilissimo nell'assorbimento segna il passaggio dal tetraidrocarvone al tetraidrocarveolo.

Ad una soluzione cloroformica di gr. 20 di tetraidrocarvone si aggiunge goccia a goccia il bromo. Si osserva un breve periodo di induzione, durante il quale la soluzione rimane colorata; indi il bromo viene assorbito assai rapidamente e si sviluppa acido bromidrico. Quando si sono aggiunti circa cc. 12 di bromo la soluzione torna a colorarsi e l'assorbimento dell'alogeno diviene lentissimo anche alla luce solare diretta, sebbene la quantità corrispondente a quattro atomi di bromo sia cc. 13. A reazione finita si diluisce con etere, si lava con acqua e poi con soda; indi si lasciano liberamente evaporare i solventi. Dal residuo oleoso si depongono rapidamento gr. 27 di grossi cristalli prismatici; aggiungendo a questi altri 4 gr. forniti dalle acque madri dopo alcuni giorni, si perviene a un rendimento del 75-76 %. Rimane un olio che svolge fumi di acido bromidrico e che col tempo assume un colore violaceo.

Il bibromotetraidrocarvone, ottenuto nel modo descritto, si purifica con una sola cristallizzazione dall'alcool; allora si presenta in begli aghi lucenti, incolori, che fondono a 81°. Si scioglie nell'alcool a 95° nella proporzione del 5 % circa alla temperatura ordinaria, mentre è solubilissimo nell'alcool bollente. È pure molto solubile in etere, cloroformio, benzolo, ligroina, tetracloruro di carbonio, ed è insolubile in acqua.

Analisi: gr. 0,1529, decomposti con soda nel crogiuolo di Piria, richiesero cc. 9,8 di $AgNO_3$ $n/10$.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}OBr_2$
Br %	51,27	51,28

Potere rotatorio: gr. 0,4500 in cc. 15 di alcool a 95°, ossia una soluzione al 3 % in tubo di 200 mm.: $\alpha_D^{12} = -8°,85$, da cui:

$$[\alpha]_D^{12} = -147°,5$$

Il tetraidrocarvone impiegato nella bromurazione aveva

$$[\alpha]_D = -24°,1 .$$

Nella nota già citata è stato dimostrato che un atomo di bromo del bibromomentone si può facilmente sostituire con i radicali dell' idrossilamina, dell'anilina e della piperidina e ottenere composti ben cristallizzati.

Queste reazioni e altre simili abbiamo ora tentate sul derivato bromurato del tetraidrocarvone, mettendoci nelle stesse condizioni dell'altro caso.

Per il momento non si sono ottenuti risultati positivi nè con le basi aminiche, nè con il cianuro di potassio e il nitrito d'argento. Una reazione nel senso da noi cercato si è avuta però con la piperidina.

Piperide $C_{10}H_{16}BrO \cdot NC_5H_{10}$.

Se si mescolano a freddo le quantità corrispondenti a due molecole della base e una del chetone, si ha una reazione violenta con notevole sviluppo di calore e di fumi: si ottiene un liquido bruno. La reazione si può mitigare usando le due sostanze disciolte nell'etere. Una soluzione di 3 grammi (1 molecola) di dibromotetraidrocarvone si aggiunge alla soluzione di gr. 1.65 (2 molecole) di piperidina. Precipita subito in minuti cristalli bianchi bromidrato di piperidina, in misura di gr. 1,7, cioè corrispondentemente alla equazione:

$$C_{10}H_{16}Br_2O + 2\,C_5H_{11}N = C_{10}H_{16}BrO \cdot NC_5H_{10} + C_5H_{11}N \cdot HBr.$$

Nel liquido rimane la piperide la quale, fatto evaporare il solvente, si separa come olio (gr. 2,25). Dopo qualche tempo parte di esso cristallizza: percui si spreme alla tromba e si scioglie la sostanza solida in alcool bollente. Per raffreddamento si depositano aghetti incolori, lucenti, che all'analisi risultano della composizione della piperide:

gr. 0,1219 richiesero cc. 3,86 di $AgNO_3$ $n/10$:

	Trovato	Calcolato per $C_{15}H_{26}BrON$
Br %	25,17	25,28

La piperide fonde a 117°; proseguendo a riscaldare, il liquido di fusione abbandona a 130° una sostanza solida.

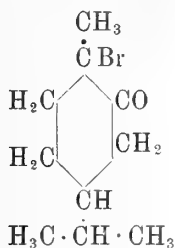
Trasformazione del bibromo 1-3 tetraidrocarvone in buccocanfora.

Grammi 1 del chetone bromurato si sbatte con soluzione acquosa di idrato potassico al 2,5 %, alla temperatura di 40-50°. Dopo due ore si ha una soluzione limpida, in cui si fa gorgogliare anidride carbonica. Precipita un composto in aghi lucenti, che si riscontra identico con la buccocanfora. Di esso se ne raccolgono gr. 0,45 invece di 0,55 calcolati.

Dai dati riferiti risulta che il bibromotetraidrocarvone si trasforma più rapidamente e più completamente in buccocanfora che non il bibromomentone.

Per ciò che riguarda la *posizione dei due atomi dell'alogeno nel bibromotetraidrocarvone*, la reazione ora descritta stabilisce che uno di essi è legato al carbonio 3 adiacente al carbonile. La posizione dell'altro risulta

dall'esistenza del monobromo-1-tetraidrocarvone

$$\begin{array}{c} CH_3 \\ \dot{C}\,Br \\ H_2C \diagup \quad \diagdown CO \\ | \qquad\quad | \\ H_2C \diagdown \quad \diagup CH_2 \\ CH \\ H_3C \cdot \dot{C}H \cdot CH_3 \end{array}$$

preparato, ora è qualche anno, da Kötz e Steinhorst [1] facendo reagire quantità equimolecolari di bromo e del chetone. Del resto la tendenza dell'alogeno a sostituire l'idrogeno in 1 si rileva anche dal fatto che un isomero del nostro composto, il bibromo-1-8-tetraidrocarvone, è stato ottenuto [2] introducendo un secondo atomo di bromo nel bromo-8-tetraidrocarvone, ottenuto a sua volta da diidrocarvone e acido bromidrico.

Chimica. — *Sull' incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo.* Nota di Gino Bianchini, presentata dal Corrispondente A. Piutti.

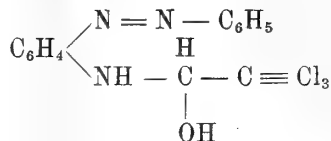
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul cloral-p-aminoazobenzene* [3]. Nota di Mario Mayer, presentata dal Socio E. Paternò.

Una grande quantità di composti appartenenti al gruppo degli azo-, ozo-amino-derivati ed affini, in seguito agli studî dell'Hantzsch [4] si sono mostrati capaci di esistere in due o più *forme* variamente colorate, e per lo più differenti anche per qualche altra proprietà fisica, come il punto di fusione, il vario potere assorbente delle loro soluzioni, e via dicendo. Ciò nondimeno, queste forme hanno identica composizione chimica ed uguale grandezza molecolare. Sono varie le spiegazioni, ancora lontane dall'esser del tutto soddisfacenti, che si invocano per questa nuove specie di isomeria; nè è mia intenzione di discuterle. Mi basti per ora di accennare ad un altro caso nuovo.

(1) Centralbl., 1911 (I), 731.
(2) Wallach, Ann., *279*, 389 e Bayer, Berichte, *31*, 3208.
(3) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.
(4) Ber. *40*, 330, 1533; *43*, 106, 1651, 1688, 2512 e seg.

Nel 1898, M. Betti (1), facendo reagire l'idrato di cloralio col p-aminoazobenzene, ottenne, per eliminazione d'una molecola d'acqua a 90-95°, un composto di color rosso aranciato al quale egli stesso attribuì la costituzione seguente:

$$C_6H_4\begin{cases} N = N - C_6H_5 \\ \qquad\quad H \\ NH - \overset{|}{C} - C \equiv Cl_3 \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad OH \end{cases}$$

Già il Betti stesso aveva notato che il composto rosso da lui ottenuto direttamente facendo reagire a bagno-maria con poche gocce d'alcool i due costituenti, si poteva avere cristallizzato in pagliette gialle dall'etere di petrolio; mentre da un miscuglio di benzene e di etere di petrolio si otteneva in aghi aranciati, fondenti a 127°.

Separazione delle due forme. — Il prodotto della sintesi del cloral-p-aminoazobenzene è una polvere rosso-scura che fonde già a 134°-135°, e che si scioglie piuttosto difficilmente in un miscuglio bollente di un terzo di benzene e due terzi di etere di petrolio (porzione bollente fra 35°-90°). Resta sempre indisciolta una piccolissima quantità di una sostanza nero-violacea che dall'analisi e dal comportamento si rivela essere cloridrato di aminoazobenzene impuro.

Dal miscuglio dei due solventi ricristallizza una grande quantità di aghi aranciati fondenti fra 125°, e 126°, a seconda delle preparazioni, che è un miscuglio delle due forme accanto a poca polvere rossa finamente cristallina, che fonde a 136°. Questa, analizzata, corrisponde ai valori richiesti dal cloral-aminoazobenzene puro:

gr. 0,2084 dettero gr. 0,3764 di CO_2 e gr. 0,0715 di H_2O;
gr. 0,1425 » cc. 14 di azoto a 9°,9 e a 767 mill.;
gr. 0,1854 » gr. 0,2305 di AgCl (metodo Carius).
Per $C_{14}H_{12}N_3OCl_3 = 344$:

	Calcolato %	Trovato
C	48,83	49,26
H	3,84	3,81
N	12,21	11,97
Cl	30,96	30,75

Cristallizzando però da molto etere di petrolio (un litro per 10 gr. di sostanza) 4 o 5 volte successivamente tanto il composto in aghi, quanto la polvere rossa, che è assai poco solubile, si ottiene una soluzione giallo-

(1) Gazz chim. ital., *28*, 241.

chiara, che, per raffreddamento, depone pagliette giallo-dorate fondenti a 116°-117°. Anche queste rappresentano il composto primitivo:

I.	Gr. 0,1422	dettero	gr. 0,2556 di CO_2	e gr. 0,0474 di H_2O	
II.	» 0,1277	»	» 0,2260 »	» 0,0413 »	
III.	» 0,0795	»	cc. 8,0 di N a 9°,6 e a 750,5 mill.		
IV.	» 0,1620	»	gr. 0,1682 di Ag Cl		
V.	» 0,1346	»	» 0,1720. id.		

Per $C_{14} H_{12} N_3 O Cl_3 = 344$:

	Calcolato °/₀	Trovato				
		I	II	III	IV	V
C	48,83	49,21	48,27	—	—	—
H	3,84	3,70	3,59	—	—	—
N	12,21	—	—	12,01	—	—
Cl	30,96	—	—	—	30,27	31,62

Proprietà delle due forme. — La forma *gialla*, che si presenta sempre in scagliette molto leggère, si ottiene pura ed in una certa quantità solamente nel modo anzidescritto, non mai per sintesi diretta. Fonde a 116°, trasformandosi in un liquido rosso, che si solidifica sui 120°, e che rifonde allora a 135°. Il punto di transizione delle due forme è dunque verso 120°.

Una determinazione di peso molecolare di questa forma ha dato, usando come solvente crioscopico la p-toluidina, un valore sufficientemente approssimato:

Sostanza gr. 0,8085 in gr. 7,52 di solvente:

Costante 524. Abbassamento osservato: 0°,130.

Peso molecolare trovato: 326; calcolato: 344.

La forma *rossa*, che fonde ad una temperatura più elevata della gialla (136°) ed è, come di regola, la più stabile, si ottiene direttamente dai componenti, e ogni qualvolta si cristallizza la forma gialla dalla maggior parte dei solventi: benzene, toluene, xilene, cloroformio, acetone, piridina, etere etilico, etere acetico. Talvolta, anche le soluzioni in etere di petrolio, dopo avere deposto quasi tutta la sostanza disciolta sotto la forma gialla, lasciano cristallizzare una tenue quantità della modificazione rossa. Pare che già allo stato solido la forma gialla abbia una tendenza a trasformarsi in forma rossa. Lo stesso succede comprimendo fortemente la forma gialla.

Le determinazioni di peso molecolare della forma rossa fatte col metodo ebullioscopico in benzene hanno mostrato che, alla temperatura di ebollizione del solvente, il composto è già dissociato nei suoi componenti, il cloralio e il p-aminoazobenzene:

Peso molecolare calcolato per il composto rosso: 344.

Trovato: 189, 215.

Peso melecolare dell'aminoazobenzene: 197.

Non vi può essere però dubbio che la forma rossa sia anch'essa monomolecolare, come la gialla, perchè, semplicemente evaporando una soluzione della forma gialla si riottiene, parzialmente almeno, la rossa, e perchè, in tutti i casi consimili finora osservati, le due modificazioni presentano sempre ugual grandezza molecolare.

Alla temperatura dell'aria liquida le due forme diventano ambedue di colore più pallido, ma non si nota un trasformarsi della modificazione rossa nella gialla.

Comportamento chimico delle due forme. — Chimicamente, le due forme, com'era prevedibile, si comportano in identico modo. Dànno con la stessa facilità, in soluzioni alcaline, uguali prodotti di decomposizione. I derivati acetilici e formilici che si ottengono per azione dell'anidride acetica e dell'acido formico, sono sempre rispettivamente l'acetil- e il formil-aminoazobenzene. I prodotti di salificazione con la brucina risultano anche essi uguali e di medesimo potere rotatorio (vedi in seguito).

Le soluzioni alcooliche di una forma qualsiasi del composto contengono sempre, accanto al composto inalterato, l'aminoazobenzene libero, che talvolta si separa puro, talvolta, invece, contenente cloralio. Evaporando una soluzione in alcool metilico, etilico o amilico, sulle pareti del recipiente si ottengono cristallizzate le due forme, l'una accanto all'altra, o in cristalli misti.

Dal complesso delle proprietà chimiche e fisiche delle due forme del cloral-p-aminoazobenzene, non si può concludere che queste rappresentino due isomeri chimici, nel senso dato finora a questa parola, perchè:

1) le due modificazioni conducono, con la stessa facilità, ad eguali prodotti di decomposizione e di addizione;

2) la forma stabile presso il punto di fusione (la rossa) è quella che fonde alla temperatura più elevata.

Gli altri criterî, dati dalla chimica fisica, per giudicare se due individui chimici sono veramente composti isomeri, nel nostro caso non si possono applicare, data la grande labilità del composto nella vicinanza del suo punto di fusione. Così, ad esempio, non è possibile di misurare la tensione di vapore delle due forme.

Non resta quindi da ammettere altro, per questo caso, che l'esistenza di una speciale isomeria (cromoisomeria), come fa Hantzsch; oppure si devono ricondurre i fenomeni osservati a semplici manifestazioni del polimorfismo.

Tentativo di scissione in antipodi ottici del cloralaminoazobenzene. — La formola ammessa per il nostro composto rivela la presenza d'un atomo di carbonio asimmetrico e, quindi, la possibilità di una scissione in antipodi ottici.

Poichè il composto, a causa della simultanea presenza di un ossidrile e del gruppo azoico, è dotato di proprietà acide, per quanto assai deboli, fu subito tentata la combinazione del composto racemico con una base forte

ed otticamente attiva: la bornilamina. Ma unendo in soluzione alcoolica quantità equimolecolari delle due sostanze, si ottennero cristalli di p-aminoazobenzene p. f. 125°, che rivelarono come la bornilamina avesse, al pari degli alcali caustici, scisso il composto primitivo.

Sostituita alla bornilamina una base attiva, ma più debole, la brucina, si usò, invece dell'alcool, solvente troppo dissociante, il benzene. Sciogliendo a blando calore in molto benzene quantità equimolecolari del composto e di brucina resa anidra (2/100 di gr. mol. in 40 cc. di benzene), ed evaporando lentamente il solvente nel vuoto su acido solforico, dopo alcuni giorni si depositano grossi cristalli rossi, prismatici, lunghi mezzo centimetro e più, mal formati, con strie longitudinali provenienti da ineguale accrescimento. Questi, lavati con benzene freddo, in cui sono poco solubili, ed essiccati, rappresentano, in peso, più della metà della somma dei componenti disciolti. Questo fatto si spiega colla presenza di benzene di cristallizzazione, che i cristalli non perdono neanche se mantenuti per molti giorni in una atmosfera rarefatta in presenza di paraffina. Fondono allora fra 45° e 50°. La determinazione di azoto, condotta sul prodotto ricristallizzato dal benzene tiepido, conduce ad un valore vicino a quello richiesto per un composto di una molecola di brucina con una di cloralaminoazobenzene e 2 molecole di benzene: gr. 0,0882 dettero cc. 6 di azoto a 12,°1 e a 751 mill.

Calcolato N °/₀ 7,83; trovato 8,05.

Una soluzione di gr. 0,14 in 20 cc. di benzene (0,7 °/₀) mostra una rotazione a sinistra di — 0°,65 per 200 mill. di strato; da cui $[\alpha]_D = -45°,7$.

Il composto ottenuto, che è il meno solubile, corrisponde dunque al simbolo (=̶+), la brucina essendo sinistrogira ($[\alpha]_D = -120°$).

La soluzione benzenica da cui sono stati ottenuti i cristalli, per ulteriore evaporazione ne abbandona altri, che vengono separati; poi si converte totalmente in una massa vischiosa, che diventa dura e polverizzabile solo dopo molto tempo. Della attività ottica di questa si fa una sommaria determinazione:

Soluzione di gr. 0,63 in 20 cc. di benzene. Tubo da 200 mill. Rotazione osservata — 18°, da cui $[\alpha]_D = -286°$. Il prodotto più solubile e non cristallizzabile corrisponde dunque al simbolo (=).

Per isolare il cloralaminoazobenzene attivo dal suo sale di brucina non si poteva ricorrere che ad un acido organico debole che salificasse la brucina; ma tutti i tentativi sono falliti. Le prove fatte, usando soluzioni diluite di acido ossalico o acetico, hanno sempre condotto all'ossalato e all'acetato di brucina, ma anche, contemporaneamente, all'ossalato e all'acetato di aminoazobenzene, mentre si liberava il cloralio. Persino l'acqua fredda agisce in modo simile; ed i cristalli rossi del composto brucinico in un'atmosfera umida vanno in deliquescenza, decomponendosi in brucina, cloralio e aminoazobenzene.

Ringrazio il dott. Vico Menabuoni della valida collaborazione prestatami in questo lavoro.

Chimica. — *Sui polimeri dell' isosafrolo* [1]. Nota di Mario Mayer, presentata dal Socio E. Paternò.

I polimeri dell' isosafrolo finora conosciuti sono due: quello fondente a 145° e preparato per la prima volta da Angeli e Mola [2], e quello di Puxeddu, di p. fus. 95°, preparato recentemente [3].

Ambedue questi composti sono da considerarsi come dimeri dell' isosafrolo. Per il composto di Angeli e Mola non ho ripetuto le determinazioni di peso molecolare: ho misurato invece la grandezza molecolare del composto di Puxeddu, usando il metodo ebullioscopico ed il benzene come solvente:

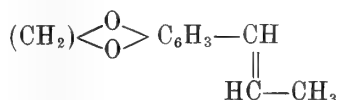
Concentrazione 1,32 %. Innalzamento osservato 0°,12.

Peso molecolare trovato 300. Per $[C_{10}H_{10}O_2]_2$ si calcola 324.

I due polimeri si ottengono non solo dal miscuglio commerciale di isosafroli [4], ma anche dal solo β-isosafrolo. Partendo da questo, i rendimenti sono anzi molto migliori, ed è perciò opportuno di separare il β-isosafrolo puro col metodo dei picrati di Hoering [5] e Baum [6].

Gli eventuali polimeri dell'α-isosafrolo non formano oggetto di questa Nota, data la grande difficoltà di preparazione di questo composto.

Preparazione del β-isosapolo e sua polimerizzazione. — Il β-isosafrolo, o trans-trans-isosafrolo, di formola

$$(CH_2)\langle{}^{O}_{O}\rangle C_6H_3-\underset{\underset{\displaystyle HC-CH_3}{\|}}{CH}$$

a differenza del suo isomero, l'α- o il cis-cis-isosafrolo, forma con facilità un picrato (addizionando una molecola di acido picrico), composto rosso fondente sui 75°.

Questo si prepara come segue:

Gr. 128 di isosafrolo commerciale si sospendono in 300-350 cc. di alcool denaturato [7], e si aggiungono a poco a poco, alla soluzione, tiepida gr. 184 di acido picrico. Per raffreddamento, tutto si rapprende in una massa cristal-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Gazz. Chim. Ital., *24* (2) 127, (1894).

(3) Ibid., *43* (1) 128 (1913).

(4) Ringrazio qui in vivo modo la ditta Schimmel e Co. di Miltitz per il dono di una grande quantità di isosafrolo.

(5) Berl. Ber. *42* (3) 3076 (1909).

(6) Bruni e Tormani, Gazz. Chim. Ital. *34* (2) 478 (1904).

(7) Ridistillato una volta su acido solforico.

lina rossa, che si spreme accuratamente alla tromba, e si lava tre o quattro volte con alcool freddo, in cui non è troppo solubile. Le acque madri alcooliche, unite ai liquidi di lavaggio, si concentrano, e si riottiene ancora una certa quantità di composto rosso. Il rendimento totale è quasi quantitativo.

Per riottenere l'isosafrolo puro, si decompone il picrato con poco più della quantità equivalente di soluzione calda di carbonato sodico, sufficientemente diluita per tener disciolto, alla temperatura di 40°-50°, il picrato sodico formatosi. L'emulsione ottenuta si estrae tre volte con benzene, il quale discioglie facilmente il β-isosafrolo. Si distilla il benzene; poi si rettifica il residuo, che bolle sui 250° a pressione normale.

Per ottenere dal trans-isosafrolo l'uno o l'altro dei polimeri, basta agire con lo stesso polimerizzante: acido cloridrico acquoso o alcoolico, cloruro ferrico; *a temperatura ordinaria*, se si vuol ottenere il dimero di Puxeddu; *a temperatura di 150°*, se si vuole preparare il polimero di Angeli e Mola.

Il metodo migliore per preparare il polimero p. fus. 95°, è quello di lasciar a sè il β-isosafrolo sciolto in alcool-etere con acido cloridrico alcoolico e un po' di cloruro ferrico. L'azione dei raggi solari non accelera notevolmente il processo di polimerizzazione. Dopo un paio di giorni si nota già un imbrunimento del liquido; dopo due settimane si può allungarlo con acqua, e lavare, sempre con acqua, la pece grigiastra ottenuta. Questa, cristallizzata da alcool con 20 % di acotone, fornisce il dimero p. f. 95°, con un rendimento dell'80 %.

Per ottenere *direttamente* il polimero f. 145°, il metodo migliore è sempre quello di Angeli e Mola, cioè il riscaldamento, in tubi chiusi, dell'isosafrolo con acido cloridrico alcoolico (¹). Però è bene di non oltrepassare la temperatura di 150°, altrimenti il rendimento è troppo scarso, e si ottengono molte sostanze nere, dall'aspetto di pece.

Si può anche preparare questo composto agendo con cloruro ferrico, sublimato e secco, sull'isosafrolo. La reazione è violentissima, e si compie con notevole sviluppo di calore. La massa pastosa ottenuta si cristallizza dal solito miscuglio di alcool e acetone.

Però si ottiene con rendimento quantitativo il composto f. 145° da quello fondente più basso, soprariscaldando a 150° per molte ore quest'ultimo, o, meglio, distillandolo lentamente a secco. Ambedue i dimeri infatti bollono, a pressione ordinaria, a 380°; a 320°, alla pressione di 11 cm. di mercurio; ed il polimero p. f. 145° distilla assolutamente inalterato, mentre quello di p. f. 95° si trasforma in quello di punto di fusione più elevato.

Questa trasformazione meritava di esser studiata dal punto di vista spettrochimico, tanto più che da un certo tempo mi sto occupando di ricerche di questo genere, che tra poco pubblicherò in questi Rendiconti. Questo pas-

(¹) Rendimento: 35 gr. di diisosafrolo greggio da 180 cc. di isosafrolo commerciale.

saggio dalla forma fondente più basso a quella di p. fus. più elevato rappresenta il metodo più facile per preparare rapidamente e semplicemente il composto di Angeli; e non era finora conosciuto.

Non ho voluto però investigare in nessun modo il comportamento chimico del composto di Puxeddu, ritenendo che questo campo sia da lasciare pienamente allo scopritore. La Memoria recentissima di Puxeddu giunse proprio mentre cercavo di chiarire per via fisica e chimica la costituzione di qualche polimero di composti aromatici a legame etilenico, fra cui il diisosafrolo di Angeli.

Comportamento spettrochimico dei due polimeri. — Ho studiato sommariamente lo spettro d'assorbimento, nell'ultravioletto estremo, dei due dimeri, servendomi, a questo scopo, di una soluzione in acetone dei due composti, e procisamente N/34, che rappresenta il limite di solubilità del composto p. f. 145° in detto solvente (0,94 %). Il polimero fondente più basso è molto più solubile, e se ne è studiata anche una soluzione N/10.

Per riferimento s'è usato l'arco del ferro prodotto da un carbone positivo imbevuto di cloruro ferrico e da un blocchetto di ferrro cilindrico per polo negativo. Le soluzioni, racchiuse nel tubo a spessore variabile di Baly e Desch (¹) con finestre di quarzo, sono state poste davanti alla fenditura di un grande spettrografo di quarzo (²). Fu fotografato, su lastra etichetta verde Cappelli, l'assorbimento corrispondente a 60-40-20-10 mm. di strato. Per confronto fu anche fotografato sulla medesima lastra l'assorbimento di 60 mm. di strato di acetone puro.

A parte le bande comuni all'acetone e alle soluzioni acetoniche dei due dimeri, l'esame delle fotografie rivelò la presenza d'una banda d'assorbimento persistentissima ed *identica* per i due polimeri dell'isosafrolo. La banda si trova nella regione ultravioletta ed incomincia prima di quella dell'acetone, cioè sui 340 $\mu\mu$.

In tutti i casi consimili, l'identità dello spettro d'assorbimento di due composti è indice sicuro della identica struttura molecolare dei composti medesimi; quindi vi sarebbe da concludere per il *polimorfismo* tra le forme p. f. 95° e p. f. 145°.

Ossidazione del composto p. f. 145°. — Intorno alla costituzione del diisosafrolo si sa ben poco: fin da principio, dopo le ricerche di Tiemann sul diisoeugenolo (³) e quelle, più recenti, di Francesconi e Puxeddu (⁴), si è am-

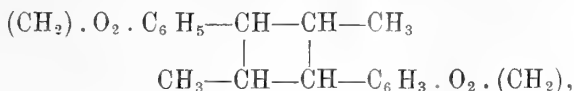
(¹) Trans. Chem. Soc., *85*, pag. 1039 (1904). Baly, Spectroscopy, London, 1905, pag. 414.

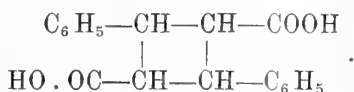
(²) Proprietà dell'ing. A. Alinari, direttore dello Stabilimento fotomeccanico e fotochimico di Firenze, al quale porgo i più vivi ringraziamenti.

(³) Ber. *24*, 2874 (1892).

(⁴) Gazz. Chim. Ital., *39*, I, 131, 202 (1909). Rend. Acc. Lincei (5) *21*, I, 42 (1912).

messa per questo composto una formola contenente un aggruppamento tetrametilenico:

$$\begin{array}{l} (CH_2).O_2.C_6H_5—CH—CH—CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \qquad | \\ \qquad\qquad CH_3—CH—CH—C_6H_3.O_2.(CH_2), \end{array}$$

formula, questa, perfettamente simile a quella che il Liebermann attribuì al dimero dell'acido cinnamico, isolato dalle foglie della coca, cioè l'acido trussilico (¹):

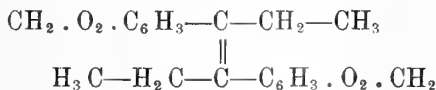
$$\begin{array}{l} \qquad C_6H_5—CH—CH—COOH \\ \qquad\qquad\quad | \qquad | \\ HO.OC—CH—CH—C_6H_5 \end{array} .$$

In questi composti, nessuno ha però finora dimostrato *direttamente* la presenza di un nucleo tetrametilenico. S' invoca dai più, per convalidare quest' ipotesi, l'estrema stabilità dei composti e la loro saturazione (²).

Ora, per quanto riguarda la stabilità di questi polimeri di composti aromatici contenenti un doppio legame etilenico, si hanno dati contradittorii: se il diisosafrolo resiste alla temperatura di 375°, e si può liberamente distillare, l'acido trussilico dà di nuovo acido cinnamico e una piccola quantità di distirolo (³).

Anche la dimostrazione sicura della assenza di doppî legami in questi polimeri manca tuttora. Il diisosafrolo e l'acido trussilico sono stabili al permanganato nel senso della reazione di A. v. Baeyer; ma anche l'acido dimetilmaleico lo è da una parte, e invece il diisoeugenolo dall'altra decolora istantaneamente la soluzione di permanganato potassico (⁴).

L'azione del bromo sul diisosafrolo non conduce a nessun risultato per quanto riguarda la costituzione di questo composto: il che succede del resto per molti altri composti, come, p. es., la santonina il cui comportamento col bromo non giustifica la presenza indiscutibile del doppio legame che ammettiamo nella formola di struttura di questa sostanza (⁵).

Invece l'ossidazione lenta del diisosafrolo, che è alquanto disagevole, conduce a derivati di questo che sembrano senz'altro poter facilmente provenire da un composto di formola

$$\begin{array}{l} CH_2.O_2.C_6H_3—C—CH_2—CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \quad H_3C—H_2C—C—C_6H_3.O_2.CH_2 \end{array}$$

(¹) Liebermann, Ber., *22*, 124 (1889).
(²) Id., ibid., *23*, 2517 (1890). Hormans, Steltzner, Sukow, ibid., *24*, 2589 (1891).
(³) Liebermann, Ber., *22*, 124 (1889).
(⁴) Francesconi e Puxeddu, loc. cit.
(⁵) Wedekind, Ber. *38*, 429 (1905).

la quale, come si vede, contiene un doppio legame che collega le due catene laterali di due molecole di isosafrolo.

Il permanganato in soluzione diluita, infatti, agisce sul diisosafrolo per dare, in esigua quantità, un composto oleoso di formola $C_{10}H_{10}O_3$, molto probabilmente identico al chetone di Balbiano e Paolini [1], e, quindi, di questa struttura:

$$CH_2 . O_2 . C_6H_3 . CO . CH_2 . CH_3 ;$$

nonchè si ottiene, come prodotto principale, acido piperonilico ed acido acetico

$$CH_2 . O_2 . C_6H_3 . COOH \qquad HO . OC . CH_3 .$$

Francesconi e Puxeddu, invece, per azione di una soluzione calda e concentrata di permanganato sul diisoeugenolo, non ottennero che acido ossalico [2]; e Liebermann [3], nelle stesse condizioni, ottenne benzile dall'acido trussilico. Non mi è stato invece possibile di riscontrare mai, nelle ossidazioni violente del diisosafrolo, traccia alcuna di piperile, la cui ossima è caratteristica [4].

Con il miscuglio cromico (anidride cromica ed acido solforico), il diisosafrolo dà acido acetico ed acido piperonilico: lo stesso avviene ossidandolo con acido nitrico concentrato e bollente, da cui in parte ricristallizza inalterato, in parte trasformato in derivati con il gruppo nitrico introdotto nel nucleo benzenico. Quest'ultimo comportamento è simile a quello del dimero dell'acido cinnamico [5].

Ossidazione del diisosafrolo con permanganato potassico in soluzione diluita. — Gr. 2 di diisosafrolo si sciolgono in 100 cc. di acetone; e a questa soluzione si aggiungono gr. 22 di permanganato potassico [6], parimenti in 600 cc. di acetone. Il tutto si decolora in capo a un centinaio d'ore a temperatura ordinaria; in dieci ore circa, alla temperatura del bagno-maria. Si separa per filtrazione il biossido di manganese formatosi, e il liquido si distilla a piccolo volume. Ricristallizza in generale la metà del diisosafrolo adoperato. Separato questo, si allunga con acqua e precipita allora un olio, in piccola quantità, che si estrae con etere e si purifica sciogliendolo di nuovo in etere e bollendo la soluzione con carbone animale. Stante il piccolissimo rendimento in quest'olio per ogni operazione, fu possibile solo di eseguire una analisi:

gr. 0,1576 di sostanza dettero gr. 0,3680 di CO_2 e gr. 0,0808 di H_2O.

Per $C_{10}H_{10}O_3$ si calcola	67,4 % C	5,6 % H
trovato	66,8 »	5,7 » .

[1] Ber., *36*, 3580 (1903).

[2] Loc. cit.

[3] Ber., *22*, 2240 (1889).

[4] Biltz e Wienands, Ann., *308*, 13.

[5] Hormans, Stoltzner e Sukow, loc. cit.

[6] Quantità calcolata: 16 atomigramma.

Eliminato quest'olio, il liquido si acidifica fortemente con acido solforico e si estrae di nuovo con etere. Si separa così una notevole quantità di acido piperonilico, talvolta impuro per un po' di acido chetopiperonilico. Si separano i due agevolmente col metodo di Ciamician e Silber (¹), e se ne può determinare il punto di fusione combinato cogli acidi puri preparati mediante l'ossidazione dell'isosafrolo o del piperonale. Non si nota nessuna depressione.

La formola ammessa in questa Nota per il diisosafrolo, se confermata, porterà probabilmente anche ad ammetterne una simile per l'acido trussilico e, in generale per tutti i dimeri dei composti aromatici contenenti un doppio legame etilenico.

Ringrazio infine la sig.^{na} dott. C. Rossi che mi ha gentilmente aiutato in questo lavoro.

Patologia vegetale. — *Sulle condizioni anatomo-fisiologiche dei rametti dei castagni affètti dalla malattia dell'inchiostro.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

In alcune Note precedenti [2] ho già espresso l'opinione che il *Coryneum modonium* Griff. et Maubl. (= *C. perniciosum* Briosi et Farneti) debba esser riguardato, insieme con altri microrganismi, come uno degli agenti del rapido disseccamento dei rami dei castagni che sono colpiti da quel particolare marciume delle radici e del colletto che è noto col nome di *malattia dell'inchiostro*.

Il notevole sviluppo presentato dal *Coryneum* in questi casi non può certamente, da solo, autorizzarci a considerare questo fungo come la causa della malattia. Contro una simile supposizione stanno alcuni fatti, fra i quali sono da notare la precedenza del marciume delle radici sull'infezione dei rami da parte del *Coryneum*, l'assenza di questo fungo dalle radici all'inizio della malattia, la mancanza di un qualsiasi rapporto fra la estesa diffusione di questa specie nei castagneti e la relativamente ristretta limitazione del *mal dell'inchiostro*.

È infatti possibile trovare singoli rametti attaccati dal *Coryneum modonium* nei castagneti i più sani, dove mai è stata osservata simile malattia [3], e d'altra parte sono noti i danni che a questo fungo sono stati

(¹) Gazz. Chim. Ital., *20*, 570 (1890).

(²) Cfr. questi Rendiconti, vol. XXI, 1912, pp. 775, 863, vol. XXII, 1913, pag. 464.

(³) Ho raccolto più volte il *Coryneum modonium* nei castagneti dell'Avellinese, su piante sanissime. Lo sviluppo del fungo era limitato alla porzione terminale di rametti danneggiati da cause accidentali. Nei castagneti dell'Avellinese è assolutamente sconosciuta la *malattia dell'inchiostro*.

attribuiti in alcuni cedui di castagno senza che anche in simili casi sia stata constatata la *malattia dell' inchiostro* [1]. È infine da notare che il *Coryneum modonium* si sviluppa rapidamente anche sui castagni che sono colpiti dal comune marciume radicale prodotto dall'*Armillaria mellea*. Questa subordinazione dell'attacco di questo fungo a condizioni patologiche preesistenti della pianta ospite è ben dimostrata dallo sviluppo del *Coryneum* su quei rami il durame dei quali ha subìto in precedenza un'alterazione per opera di altri microrganismi in seguito a tagli di potatura male eseguiti o alla rottura di grossi rami [2]. Così la limitazione dell' infezione di questo fungo è sempre in dipendenza del grado di gravità che alterazioni precedenti presentano nei singoli rami o in tutta la pianta.

È forse quindi più esatto spiegare le oscillazioni che sono constatabili nello sviluppo del *Coryneum*, ammettendone la subordinazione a condizioni patologiche predisponenti, piuttosto che supporre l' esistenza di una forma parassitaria e di una saprofitica della stessa specie di fungo [3].

Sino dall'anno scorso mi sono proposto di eseguire una serie di ricerche metodiche per stabilire nettamente quali sieno le condizioni fisiologiche dei rami di quei castagni che sono colpiti dal marciume nero delle radici e che con tanta facilità sono attaccati dal *Coryneum modonium*. Nella presente Nota sono riferiti alcuni resultati di indagini eseguite su rametti di 3-9 anni di castagni affètti da marciume nero (*mal dell' inchiostro*) e di piante sane. I rametti vennero raccolti alla fine di novembre quando già il periodo di riposo invernale erasi iniziato.

[1] Cfr. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 1910; Bull. Soc. Myc. Fr., 1910.

[2] In altra Nota ho già accennato al fatto, da me frequentemente trovato, che il micelio dell'*Endothia radicalis*, sviluppandosi in senso acropeto nel legno dei rami offesi da ferite, costituisce non solo un indice delle precedenti condizioni patologiche dei rami stessi, ma contribuisce a determinare nei tessuti corticali la ricettività per il *Coryneum*.

[3] Mangin (*Annales du Serv. des épiphyties*, tav. I, 1913, pag. 80) sembra disposto ad ammettere l'esistenza di queste due forme per spiegare l' identità morfologica del fungo dei castagni colpiti dal *mal dell'inchiostro* con gli esemplari raccolti in altri tempi e in castagneti sani, come anche la maggiore diffusione che i danni attribuiti al parassitismo di questo fungo presenterebbero attualmente. Rispetto a questa ipotesi, è da osservare che se il *Coryneum* non venne osservato dagli studiosi precedenti ciò è dovuto principalmente al fatto che la loro attenzione era diretta quasi esclusivamente alle radici; e Gibelli del resto descrive le zone longitudinali livide e depresse prodotte dal *Coryneum* sui rami, pur non avendo veduto il fungo. Nelle sue ricerche Mangin omette qualsiasi accenno allo stato delle radici nelle piante da lui osservate e che presentano l'attacco del *Coryneum*, resta quindi sempre aperta la questione se il grado di parassitismo di questo fungo sia da solo sufficiente a provocare la morte dei rami e del tronco in piante sane e vegetanti normalmente, oppure rappresenti una semplice aggravante degli effetti di precedenti cause patogene.

L'età delle piante, la natura del terreno su cui crescevano, la varietà, erano le stesse: quindi i resultati ottenuti sono completamente comparabili fra loro [1].

La differenza più saliente, apprezzabile a occhio nudo, fra rametti di piante sane e rametti di piante ammalate, è costituita dal lento accrescimento di questi ultimi.

L'accorciamento degl'internodii, il minimo spessore degli anelli legnosi annuali ne sono una prova ben convincente.

Lo spessore delle zone legnose che nei rametti sani raggiunge, nei primi anni di sviluppo, 1,5-2,2 mm., in quelli ammalati misura appena 0,3-0,8 mm. Così avviene che rametti di 9 anni di piante ammalate sono più sottili di quelli di 5 anni di piante sane.

Questo fatto è di per se stesso sufficiente a dimostrare:

1°) che a Soriano nel Cimino, dove la malattia, nella sua ultima fase, è stata constatata solo da 5 anni, si è iniziata molto tempo prima, giacchè i castagni che oggi si presentano al principio dell'ultimo stadio (attacco del *Coryneum*) sono ammalati per lo meno da nove anni;

2°) lo stentato accrescimento dei rametti, che è una conseguenza del marciume delle radici, costituisce una prova della lentezza con cui procede un simile processo d'alterazione dell'apparato assorbente.

Altre differenze notevoli fra rametti sani e ammalati riguardano il numero delle lenticelle, assai maggiore in questi ultimi, nei quali lo spessore del parenchima corticale supera notevolmente quello dello stesso tessuto dei rametti sani. Le fibre liberiane sono molto più numerose in questi che non in quelli, cosicchè nei rametti di piante ammalate la corteccia è costituita prevalentemente da elementi parenchimatici, nei quali mancano quasi del tutto i cristalli di ossalato di calcio, che sono invece molto numerosi nei rametti sani. Questo fatto è in rapporto con un altro fenomeno che si verifica più o meno accentuato nei rametti ammalati. Si tratta di una graduale distruzione della clorofilla nelle cellule degli strati periferici del parenchima corticale. I cloroplasti presentano una grande deficienza di pigmento verde, e contengono della xantofilla (probabilmente β-xantofilla) e carotina. Molti cloroplasti presentano anche un processo di disorganizzazione.

Questi fatti si osservano bene in quei rametti di quelle piante che presentano un ingiallimento delle foglie sin dall'agosto. La diminuzione dell'attività vitale dei tessuti è anche dimostrata dalla più rapida perdita di peso, per traspirazione ed evaporazione dell'acqua, che i rametti delle piante ammalate presentano in confronto a quelli sani.

[1] Il materiale venne raccolto nei castagneti di Soriano nel Cimino.

Da numerose prove eseguite su rametti tagliati, con la superficie del taglio lutata con paraffina, resulta che tale perdita in peso è eguale al 9,3 per cento del peso fresco, in 10 giorni, nei rametti ammalati, ed è eguale al 7,4 % nei rametti sani nello stesso periodo di tempo.

Il colore che la corteccia e il legno dei rametti ammalati presentano sul taglio fresco non è bianco-verdastro come quello dei rametti sani, ma è un colore che tende al giallo-fuligineo. Tutte queste differenze fra rametti sani ed ammalati trovano una corrispondenza e, in parte, una spiegazione nel resultato dell'analisi micro- e macrochimica. Le reazioni delle sostanze tanniche, eseguite col cloruro o col solfato di ferro, col bicromato potassico ed altri reagenti dei tannini, dimostrano che non esiste nessuna notevole differenza quantitativa nelle cellule a tannino della corteccia e dei raggi midollari. Nel reattivo di Braemer (wolframato sodico gr. 1 + acetato sodico gr. 2 + acqua gr. 10), che in soluzione acida o ammoniacale precipita in bruno l'acido gallico e in giallo l'acido quercitannico [1], le sezioni trasverse della corteccia dei rametti ammalati si coloriscono più o meno fortemente in color terra di Siena, mentre quelle dei rametti sani presentano un colore giallo-verdastro. Ciò indica una prevalenza di acido gallico nella corteccia dei rametti ammalati.

Questa differenza di comportamento di fronte al reattivo del Braemer diventa tanto più marcata, quanto più il rametto, staccato dalla pianta, è lasciato seccare lentamente all'aria. Questa differenza fra rami sani e ammalati è anche meglio constatabile col reattivo di Young (soluzione acquosa di cianuro di potassio). La corteccia dei rametti ammalati, disseccati all'aria, prende una colorazione intensa rosso-ocracea (acido gallico), mentre nei rametti sani, egualmente disseccati, non si ha colorazione apprezzabile. Eguali resultati si ottengono usando il reattivo di Dudley (picrato di ammonio in soluzione ammoniacale). Una differenza qualitativa delle sostanze tanniche è pure rivelata dal nitrato di argento (1:20), quando le sezioni di corteccia sono trattate secondo il metodo di Schimper per la ricerca del cloro. Mentre la corteccia dei rametti sani prende una colorazione verdastra molto chiara, in quelli ammalati si ha una colorazione rosso-mattone (acido ellagico) [2]. Le reazioni per svelare differenze qualitative e quantitative relativamente ad altri composti della serie aromatica hanno dato resultati negativi. La localizzazione e la quantità dell'amido non presentano differenze molti forti; però, nelle cellule dove la clorofilla è distrutta, l'amido manca o è in scarsa

(1) Sulla natura chimica del tannino del castagno, cfr. Trimble in *Chem. Centr.*, 1892, Bd. I, pag. 54.

(2) Piccole quantità di questa sostanza tannica sono pure poste in evidenza con le altre reazioni già indicate dal Gibelli, *Nuovi studi sulla malattia del Castagno*, Bologna, anno 1883.

quantità. Quest'ultimo fatto starebbe a dimostrare che l'alterazione del pigmento verde è avvenuta sul finire dell'estate o all'inizio dell'autunno.

Il cloruro di zinco iodato colorisce in violetto le pareti del parenchima corticale nei rametti sani, in marrone violaceo nei rametti ammalati. Di fronte agli acidi diluiti non si ottiene una differenza molto apprezzabile nel leggiero rigonfiamento delle membrane cellulari, cosicchè non si può dire che nei rametti ammalati i componenti della parete sieno più facilmente idrolizzabili. La diversa colorazione ottenuta col cloruro di zinco iodato dimostra però che una leggiera differenza nella composizione chimica esiste. Il rosso di rutenio a questo riguardo non offre alcun dato differenziale e così pure le reazioni per i pentosi.

I resultati dell'anilisi macrochimica vengono in parte ad integrare quelli ora riferiti. Una delle differenze più importanti è quella che si riferisce alla percentuale delle ceneri.

Mentre nei rametti sani il contenuto in ceneri, per cento grammi di sostanza secca (a 100-107° C.), è eguale a gr. 3,95-5,17, in quelli ammalati raggiunge solo i gr. 3,05-3,62.

Le ceneri solubili sono = 1,43 % nei primi e 0,91 % nei secondi. L'anidride solforica è contenuta nei rametti sani in quantità quasi doppia di quella dei rametti malati, il potassio offre pure un'analoga differenza, la anidride fosforica, il cloro, il calcio, il ferro presentano differenze minori. La quantità di magnesia è molto superiore nella corteccia dei rametti ammalati. Diminuendo in questi la calce, il valore del rapporto fra questi due elementi delle ceneri differisce notevolmente dal normale. L'acidità totale nei rametti sani e ammalati, riferita all'acido ossalico per cento gradi di sostanza secca, è eguale rispettivamente a 1,7 e 2,5. Gli zuccheri riduttori, i pentosani, le sostanze grasse, le sostanze proteiche, non presentano differenze notevoli fra rametti delle piante ammalate e rametti di quelle sane. Solo la cellulosa è contenuta in quantità assai maggiore nei primi che non nei secondi.

Le sostanze tanniche, (assorbibili dalla polvere di pelle) non presentano che un leggiero aumento nei rametti ammalati [1].

I suesposti resultati ci permettono di definire con maggiore esattezza lo speciale stato patologico in cui si trovano i rametti delle piante già gravemente danneggiate dal marciume delle radici. Soprattutto la minore ricchezza di alcuni elementi minerali (come la calce, lo solfo, il potassio), e la maggior quantità di magnesia, dimostrano a sufficienza che un tale stato patologico consiste principalmente nell'effetto indiretto di disturbi nell'attività assorbente dell'apparato radicale; è la nutrizione minerale quella che subisce la perturbazione iniziale, e la più grave.

[1] Questi ultimi risultati si riferiscono ad analisi eseguite nella R. Stazione di chimica agraria di Roma su corteccia di rametti di 1-5 anni.

La distruzione della clorofilla, la disorganizzazione dei cloroplasti nel parenchima corticale, devono essere considerate come una conseguenza inevitabile dell'alterato ricambio e della diminuita attività vitale del protoplasto, in stretto rapporto all'elevata acidità, alla scomparsa o alla mancata formazione di ossalato di calcio, alla produzione esagerata di acido gallico, che sono pure conseguenze indirette dell'alterata funzionalità delle radici. Che una simile perturbazione nella nutrizione minerale non sia da attribuirsi a gravi alterazioni delle foglie o della porzione terminale dei rametti, o dei grossi rami per cause locali, è ben dimostrato dal fatto che il fenomeno s'inizia all'estremità di rametti che portano foglie assolutamente normali. Quando in queste si presenta la clorosi, nel tessuto corticale dei rametti stessi, già da tempo è incominciato l'ingrossamento della corteccia, la esigua formazione di fibre liberiane, e nel poco spessore degli anelli legnosi è evidente la prova della rallentata attività del cambio.
D'altra parte è possibile di constatare che un simile fenomeno va diffondendosi dall'apice dei rametti verso la loro base. Nei grossi rami e nel tronco lo spessore dei cerchi legnosi ha incominciato a diminuire anche prima della formazione dei rametti che presentano in seguito i caratteri patologici suddetti.

L'analisi chimica e fisica del terreno [1] dimostra che non sono affatto attribuibili alle proprietà di questo le anormalità che si riscontrano nella nutrizione minerale delle piante ammalate. È piuttosto da domandarci se si tratti di disturbi delle radichette assorbenti, considerabili come un fenomeno patologico primario, direttamente subordinato alla causa iniziale della malattia, o come un fenomeno secondario, susseguente a un'alterazione delle grosse radici e del colletto. In quest'ultimo caso la diretta azione dei prodotti del marciume sui tessuti conduttori delle grosse radici e della base del tronco avrebbe la maggiore importanza nel modificare profondamente la nutrizione minerale. Nelle mie Note precedenti ho già riferito alcuni fatti che inducono a ritenere molto verosimile quest'ultima eventualità [2].

È forse non priva d'interesse la constatazione dell'abbondante formazione di acido gallico nella corteccia e nel legno dei rametti delle piante ammalate. Esperienze eseguite *in vitro* tendono ad escludere che si tratti del prodotto di una scissione dell'acido tannico per azione enzimatica.

Alla presenza di acido gallico è strettamente collegata la formazione di acido ellagico, già riscontrata dal Gibelli nel tronco e nelle radici dei castagni colpiti dal *mal dell'inchiostro*. Evidentemente l'alterazione da me studiata nella composizione chimica dei rametti rappresenta uno stadio pre-

[1] I resultati di queste analisi saranno pubblicati in un altro lavoro.

[2] Nelle ultime mie ricerche in proposito ho constatato che le grosse radici sono fortemente attaccate da un micelio riferibile a una poliporacea, differente da quelle specie che comunemente si trovano nelle vecchie radici di castagno.

cedente a quello in cui, per ossidazione dell'acico gallico, si origina l'acido ellagico.

Così dunque alcune di quelle modificazioni chimiche, che caratterizzano lo stato patologico delle radici e della base del tronco dei castagni ammalati, si ritrovano anche all'estremità dei rami.

Dai fatti ora sommariamente esposti resulta ben evidente che le condizioni fisiologiche dei rametti dei castagni affètti dalla *malattia dell'inchiostro* non sono quelle normali. La depressione dell'attività di accrescimento, l'alterato ricambio dei tessuti corticali spiegano come la parte aerea di queste piante possa venir facilmente attaccata da deboli parassiti anche molto tempo prima che simili condizioni patologiche abbiano raggiunto quella gravità su cui ho ora riferito.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta dello sperma nel cane* [1]. Nota I del dott. G. Amantea (assistente), presentata dal Socio L. Luciani.

La secrezione spermatica, intesa in senso ampio [cioè non solo come formazione e separazione di organismi elementari (spermatozoi) da parte delle glandole sessuali maschili, ma anche come elaborazione e separazione, da parte di altre glandole accessorie, di speciali prodotti, che accompagnano gli spermatozoi all'esterno, e sono intimamente connessi colla biologia di essi] da nessuno finora è stata assunta quale argomento di ricerche fisiologiche sistematiche. Ciò senza dubbio desta meraviglia quando si pensi che si tratta di funzione direttamente connessa colla fisiologia dell'organismo complessivo e col mantenimento della specie. Le osservazioni fisiologiche esistenti in proposito, relativamente scarse e frammentarie, poco o nulla ci possono dire di preciso e di positivo sul modo come decorre in condizioni normali e patologiche la secrezione spermatica, sui fattori capaci di influenzarla, sugli effetti dell'eliminazione eccessiva o della ritenzione dello sperma, sui rapporti della secrezione spermatica colle altre secrezioni, colle funzioni nervose, ecc. D'altra parte le ricerche istologiche, sebbene più numerose, non bastano da sole a risolvere gli svariati problemi che si connettono col funzionamento dei testicoli e delle glandole accessorie dell'apparato genitale maschile.

In alcune mie indagini sulla zona riflessogena degli atti sessuali nel pene del cane [2], ho osservato che in questo animale è possibile destare

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

(2) Arch. f. die ges. Physiol., Bd. 154; Arch. di farmac. sper. e sc. affini, volume XVI, 1913.

facilmente, mercè stimolazione adeguata di una speciale e circoscritta regione peniena, tanto l'erezione quanto l'ejaculazione, accompagnate da attivi e spontanei movimenti di coito; e che si può ripetere la prova anche più volte in uno stesso giorno. Così mi sorse l'idea di utilizzare siffatta disposizione del cane. Qualcuno già prima di me (Poïarkow [1] per es., recentemente) è ricorso a stimolazioni meccaniche del pene del cane per ottenere l'ejaculazione e raccogliere lo sperma, con vario scopo; ma, da quello che mi risulta, non si è mai cercato in tali casi di avvicinarsi alle condizioni del coito normale; e questo appunto ho voluto fare io.

Fondandomi essenzialmente sulle principali conoscenze anatomiche e funzionali, che stanno a base del modo singolare con cui si svolgono nel cane i rapporti sessuali, ho fatto costruire uno speciale apparecchio, una spece di *vagina artificiale*, che permette lo svolgimento di un coito, che potremmo chiamare *fittizio*, e la raccolta dello sperma in condizioni assai vicine a quelle del coito normale, negli animali opportunamente scelti ed educati.

L'apparato genitale maschile del cane presenta, dal punto di vista morfologico [2], alcuni caratteri speciali, tra cui mi sembrano nel nostro caso degni di speciale attenzione tre soprattutto: uno, per così dire, negativo, cioè l'assenza di vescichette seminali; e due positivi, cioè la presenza dell'*osso del pene*, e quella del *bulbo del pene*. Probabilmente appunto colla mancanza di vescichette seminali è da mettere in rapporto il fatto, che nel cane il processo di ejaculazione dura molto a lungo, cioè tutto intero il periodo dell'accoppiamento, il quale a sua volta è prolungato dal rigonfiarsi del tessuto cavernoso del bulbo durante l'erezione, per cui, dopo l'introduzione del pene in vagina, questo non può esserne ritirato prima che l'erezione sia cessata. È però necessario che l'organo penetri prima dell'ingrossamento del bulbo; e ciò è reso possibile da un fatto anatomico (la presenza dell'osso del pene) e da un fatto fisiologico, che io stesso ho avuto occasione di rilevare altrove, cioè dall'azione inibitrice esercitata sull'erezione da quasi tutti gli stimoli portati sulla regione prebulbare e capaci di destare dolore: alla regione bulbare (zona riflessogena degli atti sessuali) è anteposta una regione (prebulbare), che, per azione di stimoli dolorifici, inibisce l'erezione e anche la ejaculazione. Perciò, se, durante i primi tentativi di coito che precedono l'accoppiamento, la regione prebulbare viene a contatto, come è facile e quasi costante, colla cute della regione perineale della femmina o con la cute di altre regioni vicine, ciò basta a determinare l'afflosciamento del pene se trovavasi eretto. Inoltre l'erezione nel cane progredisce dall'estremità distale del pene verso la prossimale, e cessa in senso inverso: la regione bulbare è l'ultima a inturgidirsi, la prima ad afflosciarsi. Sulla base di tutti questi

(1) Compt. rend. de la Soc. de biol., tome 74, p. 141, 1912.
(2) H. Ellenberger und H. Baum, *Anatomie des Hundes*, Berlin, 1891.

fatti anatomici e fisiologici, in parte già noti, e di cui si può rilevare agevolmente la connessione reciproca si può rendersi conto di tutto il decorso caratteristico del coito nel cane.

Volendo raccogliere in modo esatto tutta la quantità di sperma emessa durante l'ejaculazione bisognava appunto tener presenti le accennate condizioni fondamentali, in cui questo atto normalmente si svolge. A ciò mi sembra di esser potuto arrivare col metodo seguente.

L'apparecchio fatto costruire (*vagina artificiale*), è, in fondo, semplicissimo (ved. fig. 1). Consiste in una grossa pera di gomma elastica, lunga 14-15 centimetri e provvista a una estremità — e precisamente a 3 cm. di distanza dallo strozzamento piuttosto brusco, dove il suo maggiore asse trasversale si riduce a soli cm. 3 — di una apertura di cm. 2,5 di diametro. Attraverso tale apertura passa un sacchetto, pure di gomma elastica (sacchetto esterno o di sicurezza, a pareti piuttosto robuste, e i cui margini, rovesciati sull'orlo della pera, vi sono fissati e stretti da un anello metallico sovrapposto. Essendo il sacchetto molto largo (7-8 cm. di diametro) relativamente al collo della pera per cui deve passare, ne risulta la formazione di pieghe, che sono utilissime a mitigare la rigidità delle pareti del collo stesso. Una speciale montatura metallica permette di sospendere l'apparecchio, senza che si possa rovesciare, all'estremità di un bastoncello di ferro, lungo 20 cm. e ripiegato all'estremo opposto in maniera da formare un angolo di poco inferiore al retto; esso si può così agganciare a uno degli anelli che, a differente altezza, porta fissati una pesantissima cassetta all'uopo costruita (ved. fig. 2). La varia altezza dal suolo, alla quale gli anelli in numero di tre sono fissati, è stata calcolata in rapporto alla varia taglia (piccola, media o grande) del cane su cui si voglia sperimentare. Inoltre si è costruita la cassetta molto pesante, allo scopo di impedire che essa potesse rovesciarsi, per la trazione esercitata, come vedremo, dal cane sull'apparecchio. Il sistema di sospensione di questo ultimo e la maniera di connessione cogli anelli della cassetta di sostegno, sono tali da permettere facili spostamenti in alto e in basso; è assolutamente impossibile che la pera si inclini tanto, da aversi perdite del liquido spermatico che vi si raccoglie.

Per la raccolta dello sperma, conviene anzitutto riempire di acqua, riscaldata a 38°-40° C., lo spazio compreso tra le pareti della pera e quelle del manicotto, e introdurre nell'interno di questo un altro sacchetto a pareti sottili (sacchetto interno collettore), rovesciandone l'estremità aperta sull'anello metallico, che fissa il sacchetto esterno al collo dell'apparecchio. Il sacchetto esterno è destinato ad attutire colle sue pieghe la rigidità delle pareti del collo, e a rappresentare anche un mezzo di sicurezza, nel caso che possa rompersi quello interno, destinato esclusivamente ad accogliere il liquido spermatico. Si lubrifica con un po' di vasellina, ovvero, qualora per ragioni sperimentali dovesse essere conveniente evitare la mesco-

lanza di tale sostanza, si umetta con un po' di acqua distillata tiepida il sacchetto interno presso l'apertura; quindi, tenendo l'apparecchio nella mano destra, si passa questa fra gli arti anteriori del cane, di cui si vuol raccogliere lo sperma, e, aiutandosi colla sinistra, si fa in modo che nell'apparecchio penetri il pene dell'animale, evitando nel modo migliore possibile di provocare dolore. Alla penetrazione della sola regione prebulbare il cane, soprattutto se l'acqua nella pera è poco o troppo calda, ovvero se l'attrito è alquanto forte, tende a ritirare l'organo: ma se si fa penetrare anche il bulbo del pene, e si compiono coll'apparecchio movimenti

Fig. 1.

di va e vieni, si vede subito il cane iniziare movimenti attivi e spontanei di coito, mentre stringe forte fra i suoi arti anteriori, in un vero e proprio amplesso, l'avambraccio o il braccio dello sperimentatore. Cessato l'orgasmo, l'animale, sempre spontaneamente, fa l'atto di scavalcare; questo è anche nelle condizioni di coito fittizio, come nel coito normale del cane, il segno della fine di una prima fase, cui tiene dietro una seconda, nella quale l'atto decorre *a posteriori*. Essendosi intanto completata l'erezione, ed essendosi il bulbo del pene inturgidito al di là dello strozzamento dell'apparecchio, il pene non può più essere ritirato. Basta ora congiungere l'apparecchio con uno degli anelli della cassetta di sostegno, e aspettare che l'animale da sè si distacchi al terminare dell'erezione. Il cane esercita sull'apparecchio, durante il secondo periodo del coito fittizio, una trazione evidente, così come fa nell'accoppiamento colla cagna, quasi allo scopo di aumentare l'attrito

fra la superfice della zona riflessogena e le pareti della vagina artificiale, rispettivamente della vagina della cagna. Ma su tale fatto, come su tutto il decorso dell'accoppiamento nel cane, mi propongo di ritornare più diffusamente in seguito e altrove.

Nella fig. 2 si può vedere uno dei cani su cui finora ho potuto sperimentare, appunto durante la raccolta dello sperma.

Lo sperma che col mio metodo si può raccogliere, come è facile immaginare, si riesce a misurare colla massima esattezza, e si può utilizzare per svariate indagini.

Fig. 2.

I cani che meglio si prestano per un tal genere di esperimenti sono senza dubbio quelli di piccola e media taglia, in piena maturità sessuale; i cani di grossa taglia possono anche adoperarsi, ma fra di essi se ne trova un maggior numero di troppo frigidi e di restî. Tuttavia faccio notare che quello rappresentato nella fig. 2 era appunto un cane di grossa taglia, il quale ha corrisposto anche molto bene allo scopo. Prima di iniziare le esperienze, conviene rendersi amico il cane che si vuole adoperare, somministrandogli personalmente l'alimento, accarezzandolo spesso, ecc.; se anche una volta sola la raccolta dello sperma riesce bene, si può essere sicuri che le raccolte successive saranno molto più agevoli o addirittura facilissime.

Sperimentando col metodo descritto, non si può negare che si resta molto vicini alle condizioni normali; è tuttavia necessario ricordare che il coito fittizio non è perfettamente la stessa cosa che il coito normale. Manca infatti, per es., nel primo la sorgente di eccitamenti, che al cane provengono, per la via dell'olfatto, dai genitali della cagna in fregola; ma è anche

vero che a ciò può, in parte almeno, supplire l'eccitamento, talvolta superiore anche a quello che si potrebbe immaginare, che nel cane educato al genere di ricerche, che il mio metodo permette, desta la vista dello sperimentatore. Se, come criterio di confronto, si vuole assumere la durata della ejaculazione, in base a quanto mi risulta da esperienze comparative all'uopo istituite, accoppiando con una cagna in fregola cani di cui mi era già nota la durata del coito fittizio, io posso affermare di non avere osservato differenze sostanziali. Anche introducendo nella vagina di una cagna in fregola un sacchetto di gomma elastica a pareti sottili, e accoppiandola poi col maschio, quando la prova è riuscita, cioè quando il pene del cane è penetrato nel sacchetto e in questo è avvenuta l'ejaculazione, confrontando la quantità di sperma e il numero degli spermatozoi così ottenuti colla quantità di sperma e il numero degli spermatozoi ottenuti dallo stesso cane in un coito fittizio, differenze sostanziali non ho potuto rilevare.

Servendomi del metodo della vagina artificiale, mi propongo di eseguire una serie di ricerche sistematiche sulla secrezione spermatica, considerata, come già ho detto, da un punto di vista ampio. I risultati ottenuti saranno riferiti in Note successive, senza però seguire un ordine rigoroso prestabilito.

I principali problemi che conto di studiare, e su qualcuno dei quali ho già iniziato ricerche, sono i seguenti:

a) decorso normale della secrezione spermatica;

b) influenze e condizioni capaci di agevolare, o di inibire, o di perturbare la secrezione spermatica;

c) rapporti tra secrezione spermatica e sistema nervoso;

d) rapporti tra secrezione spermatica e altre secrezioni (interne ed esterne);

e) rapporti tra alimentazione e secrezione spermatica;

f) ricambio materiale nelle perdite eccessive e nella ritenzione dello sperma;

g) proprietà dello sperma e biologia degli spermatozoi;

h) la secrezione prostatica per sè e nei suoi rapporti colla funzione dei testicoli, ecc.

In quanto a quest'ultimo argomento, voglio far notare che ho in corso alcuni tentativi di legatura dei deferenti, per raccogliere (sempre col mio apparecchio) il secreto delle glandole accessorie dell'apparato genitale maschile del cane. Siccome poi in quest'animale mancano, oltre le vescichette seminali, anche le glandole del Cowper, si può ritenere che tra le suddette glandole accessorie la prostrata sia quella prevalente dal punto di vista funzionale; lo studio quindi del secreto raccolto a deferenti legati costituirebbe soprattutto lo studio della secrezione prostatica.

Da quanto ho detto risulta, come il cane possa costituire l'*animale di scelta* nelle ricerche sulla secrezione spermatica. Anche la sua erezione, caratteristica e relativamente di lunga durata, può prestarsi a speciali osservazioni. Tuttavia sarà utile tentare, fin dove è possibile, anche su altri animali, ricerche simili a quelle che io mi propongo di eseguire per ora sul cane.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide nell' accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri.* Nota del dott. G. COTRONEI, presentata dal Socio B GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Con votazioni provocate dal PRESIDENTE, la Classe approva per la stampa negli Atti accademici, salvo le consuete riserve, le seguenti Memorie, in seguito a parere favorevole delle sottonotate Commissioni esaminatrici:

CIAMICIAN, rel., e ANGELI. Sulla Memoria dei dottori AMADORI e VITERBI: *Sulla composizione della piromorfite.*

VIOLA, rel., e STRUEVER. Sulla Memoria del dott. LINCIO: *Rocce e minerali del monte Colmine e adiacenze.*

FANO, rel., e LUCIANI. Sulla Memoria del prof. GALEOTTI: *Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna.*

PRESENTAZIONE DI LIBRI.

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Corrisp. BERLESE e dei Soci stranieri LIAPOUNOFF e NOETHER; a nome poi del Socio PARONA, presidente della Commissione per gli studi agrologici della Tripolitania, fa omaggio di due volumi contenenti i lavori eseguiti dalla predetta Commissione. Lo stesso Segretario richiama l'attenzione della Classe su di un fascicolo contenente le triangolazioni ed osservazioni compiute in Spagna per fissare il cammino del vertice del cono ombroso della luna, durante l' eclissi solare del 17 aprile 1912; e sulla Memoria a stampa del prof. EREDIA avente per titolo: *Il clima della Somalia italiana meridionale.* Il Segretario predetto fa da ultimo particolare menzione del volume secondo delle *Institutiones calculi integralis* delle opere di LEONARDO EULERO (serie 1ª, vol. XII), rilevando

che nel volume suddetto trovansi riprodotte le *Annotazioni* di L. MASCHERONI al calcolo integrale di Eulero; e che nella redazione del volume collaborarono i matematici italiani LORIA e VIVANTI, e alla pubblicazione concorse in una parte delle spese il Governo italiano, dietro proposta della Società italiana per il progresso delle scienze.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA comunica che alla seduta assistono S. E. il Ministro della Marina on. MILLO, e il Socio straniero prof. ERIKSSON. Annuncia inoltre che il comm. GUGLIELMO MARCONI, il quale per la prima volta interviene alle sedute accademiche nella sua qualità di Socio nazionale, farà una importante comunicazione con esperienze [1], assistito dal marchese SOLARI e dall'ing. ROUND; esprime per ciò i suoi ringraziamenti al Socio MARCONI dandogli il benvenuto.

Il Segretario MILLOSEVICH legge la seguente Commemorazione del Socio straniero Sir DAVID GILL.

Nel mattino del 24 gennaio moriva a Londra, per affezione polmonare, Sir DAVID GILL, emerito direttore dell'Osservatorio astronomico della Città del Capo (Cape of good Hope). Era nato in Iscozia, ad Aberdeen, il 12 giugno 1843.

Sir David Gill è una splendida figura d'astronomo di vocazione, poichè il babbo suo, che era un ricco mercante di Aberdeen, volle che il figlio lo seguisse negli affari, il che David fece con riluttanza, ma trovando in ogni modo conforto al suo spirito negli studî della fisica e della chimica. Clerk Maxwell, all' Università di Aberdeen, influì possentemente a sviluppare nel giovane studioso l'amore per le ricerche fisiche e il senso della precisione negli atti sperimentali, di cui diede così significanti saggi ne' suoi lavori astronomici.

Ventenne si iniziò nell'astronomia pratica, avendo avuto occasione d'avvicinare il direttore dell' Osservatorio di Edinburgo, Piazzi Smyth, figlio dell'ammiraglio Smyth, che, per l'amicizia e la venerazione che portava al nostro astronomo Giuseppe Piazzi, volle che il figlio premettesse al cognome Smyth l'altro di Piazzi.

Il problema di coordinare più pendoli ad Aberdeen con un pendolo normale, e l'altro di costruire un motore che guidasse un equatoriale eretto ad Aberdeen, lo interessarono vivamente, con che presto si misero in luce anche le sue naturali attitudini per la meccanica pratica.

(1) V. pag. 255.

Lord Lindsay (più tardi Earl of Craford) concepì intorno a questo tempo il progetto di creare un Osservatorio a Dun Echt, e vi chiamò David Gill, al quale veniva offerta la direzione. Da questo momento l'uomo d'affari quale il padre volevalo, scompare del tutto davanti all'uomo di scienza, certamente con grave suo sacrificio economico, ma compensato dal sorriso d'Urania, che era rimasta la vincitrice.

L'Osservatorio di Dun Echt sorgeva in brev'ora; in esso fu montato un equatoriale dell'apertura di 16 pollici, un cerchio meridiano e, degno soprattutto di ricordo, quell'eliometro di 4 pollici, col quale più tardi doveva Gill compiere a Mauritius e all'Ascensione quelle memorande misure per le quali la parallasse solare veniva fissata in un valore che in precisione quasi gareggia con quello che Hinks assegnò assai più tardi discutendo le osservazioni di Eros; così che a Gill rimase la convinzione, che poi i fatti dimostrarono vera, potersi, con eliometro più poderoso, prevedere risultati squisitamente precisi, sul che fra breve dovremo far cenno.

Dei due passaggi di Venere sul disco del sole, nel secolo testè revoluto, il primo occorse l'8 dicembre 1874; è ben risaputo il grande interesse che que' fenomeni destavano appunto per dedurre dalle osservazioni di Venere sul sole la parallasse di questo, e ciò in un tempo nel quale alcune non lievi incertezze rimanevano anche dopo le correzioni apportate da più astronomi al classico, ma in verità gravemente erroneo, valore assegnato da Encke alla parallasse solare nel numero $8''.57$.

Gill e lord Lindsay si recarono ad osservare il passaggio all'isola Mauritius nell'Oceano Indiano ad est di Madagascar. In questa circostanza Gill potè, con l'immane lavoro del trasporto di circa 40 cronometri, assegnare la differenza di longitudine fra Aden e l'isola suddetta, donde la longitudine di quest'ultima da Greenwich.

I pianetini si presentano come stelle senza diametro sensibile: o, per lo meno, soltanto di quattro o cinque si hanno valori accettabili. Partendo da questo accertamento di fatto, Gill suggerì il metodo delle misure differenziali delle coordinate d'un pianetino in opposizione perielia in due località molto distanti in latitudine e poco in longitudine, o pur anche in una unica località, a levante e a ponente del meridiano, in angoli orarî negativi e positivi quanto grandi praticamente fosse possibile, e ciò allo scopo di avere la parallasse del sole; l'apparire il pianetino come un punto permette un'alta precisione nelle misure differenziali, la quale può compensare la pur sempre notabile distanza dalla terra anche nelle condizioni d'un minimo; allora non potevasi prevedere che un pianetino, quale è Eros, potesse in circostanze speciali fornire una base di propria parallasse orizzontale eguale a circa $60''$, e essere ben illuminato durante tale condizione favorevole.

All'isola Mauritius Gill e lord Lindsay approfittarono che Iuno era in opposizione adatta per assaggiare il procedimento con risultati apparsi eccel-

lenti, così che sorse il pensiero d'organizzare una spedizione, scientifica all'isola dell'Ascensione per applicare su Marte, che nel 1877 veniva ai primi di settembre in opposizione strettamente perielia, il medesimo processo utilizzando l'eliometro di Dun Echt. La signora Gill scrisse in quell'occasione un libro, dettato con garbo, che ha il titolo: « Un racconto non scientifico di una spedizione scientifica » : sei mesi Ella aveva dimorato collo sposo nella remota isola dell'Atlantico australe.

Le discussioni delle osservazioni su Iuno e Marte e i conchiusi valori della parallasse solare vieppù invogliarono Gill a rivolgere l'attenzione ai pianetini in opposizione perielia per la ragione sopraddetta.

David Gill nel 1879 veniva nominato direttore dell'Osservatorio del Capo, un Osservatorio che già a quell'epoca godeva di ben meritata reputazione.

Maclear e Stone (e, prima di essi, Fallows e Henderson) avevano reso segnalati servigî specialmente in astrometria meridiana. Non vi è poi astronomo che non ricordi l'opera immortale di Giovanni Herschel che dal Capo, già da 14 anni funzionando l'Osservatorio Reale, negli anni 1834-38, rivelò alla scienza le meraviglie del cielo australe nelle nebule, nelle doppie e nella distribuzione delle stelle in rapporto alla Galassia australe.

Giovanni Herschel eresse il suo Osservatorio a Feldhausen, qualche chilometro distante dalla Specola Reale; fu impresa del tutto personale con mezzi proprî, e l'Osservatorio dello Stato non intervenne che sotto forma di servigi amichevoli.

Nei primi tempi della sua direzione, Gill diede mano alla pubblicazione di osservazioni di astrometria fatte durante il governo de' suoi predecessori e non ancora rese di pubblica ragione. Intanto l'immediato suo predecessore, Edoardo Giacomo Stone, pubblicava nel 1881 il ben noto Catalogo di 12441 stelle per l'equinozio del 1880 su osservazioni del Capo fra 1871-79, mentre Gill, pur continuando nel campo delle osservazioni meridiane l'indirizzo tradizionale dell'Osservatorio, curava e faceva curare quelle ricerche tecniche sul cerchio meridiano, che assicurassero risultati d'alta precisione. Non è qui il luogo d'analizzare la produzione sistematica dell'Osservatorio del Capo sotto la direzione di lui; ricordo appena i cataloghi di stelle fondamentali osservabili al Capo, e quelli di stelle zodiacali e l'altro di 8560 stelle, che sono i capisaldi per il catalogo fotografico nel lavoro internazionale della fotografia celeste. E a questo proposito devesi qua ricordare un classico lavoro fotografico dovuto all'iniziativa di Gill, quello cioè d'una *Durchmusterung* del cielo australe da — 19° a — 90°, che l'illustre prof. Kapteyn fece catalogare, le misure delle stelle fotografate nelle lastre essendo state compiute a Groninga; trattasi della posizione, con alta approssimazione, di 450,000 stelle.

Prima coll'eliometro di 4 pollici, che da Dund Echt passò al Capo, poi con uno più possente, Gill si consacrò con Elkin ad assegnare la parallasse

annua di stelle dotate di notabile moto proprio, raggiungendo in questo difficilissimo campo una precìsione insperata; oltre Elkin collaborarono con lui gli astronomi Finlay e Sitter. Devesi poi a Sitter la splendida discussione delle misure che Gill fece dei satelliti Medicei, da cui risultò un valore di alta precisione per la massa di Giove e le correzioni alle inclinazioni e ai nodi dei prefati satelliti.

I risultati importanti conseguiti nell'assegnare la parallasse solare con Juno e Marte, dei quali or ora dicemmo, lo spinsero ad usare l'eliometro di 7 pollici osservando Iride, Vittoria e Saffo per conseguire un valore della parallasse solare di alta precisione.

Il risultato del grande lavoro deve ben essere ricordato; a Gill risultò dalle osservazioni del 1887-88 per valore della parallasse orizzontale equatoriale del sole il numero: 8″.8036 ± 0″0046, mentre poi dai spettrogrammi di sette stelle, in quanto s'abbiano differenze di velocità nella direzione della visuale in dipendenza del moto di rivoluzione della terra, pur dalle misure del Capo, ebbesi, ben più tardi, il valore 8″.8030 ± 0″.0057 in un accordo col numero precedente in verità impressionante. È poi ben noto agli astronomi il classico lavoro di Hinks sulle misure fotografiche di Eros nell'opposizione abbastanza vantaggiosa del 1900, nonchè sulle misuse visuali. Hinks ebbe per parallasse solare dalle prime il numero 8″.807 ± 0″.0028; dalle seconde poi: 8″.806 ± 0″.0023. Col valore 8″.805, la media distanza della terra dal sole (23426 raggi equatoriali terrestri) difficilmente sarà in errore per una decina di raggi; l'incertezza potrà con grande probabilità essere ridotta alla metà approfittando dell'opposizione perielia di Eros del 1931.

Devesi a Gill (o, meglio, ai saggi fotografici stellari conseguiti al Capo), se nel 1877 si iniziarono a Parigi le Conferenze internazionali per il lavoro della Carta e del Catalogo fotografico, lavoro che è certamente l'impresa astronomica internazionale la più vasta che siasi concepita, la quale forse meritava, per la sua grande importanza, saggi sperimentali più prolungati prima di iniziare il lavoro definitivo, che del resto da qui un secolo potrà essere rinnovato.

I grandi lavori geodetici compiuti nel sud d'Africa debbonsi integralmente all'iniziativa di Gill; oggidì un grande arco di meridiano è misurato per ben 22° fino al lago Tanganyika, ma il grandioso progetto di Gill, cioè quello di estendere assai più al nord le triangolazioni lungo il meridiano trentesimo da Greenwich attraverso i laghi Alberto Edoardo e Alberto, e poi attraverso il Sudan fino al Nilo, un giorno non lontanissimo sarà un fatto compiuto.

L'opera di Gill all'Osservatorio del Capo fu tale da trasformare completamente quell'Istituto portandolo al livello delle esigenze della scienza moderna.

Il dono, che F. M^c Clean fece, del 24 pollici, fornì alla specola un magnifico equatoriale fotografico con prisma obbiettivo e spettroscopio, donde le ricerche d'astro-fisica che si aggiunsero alle ricerche fotografiche e a quelle astrometriche.

La grande autorità del suo nome gli permise di ottenere dai poteri dello Stato un numerosissimo personale, così che poteva ben egli dire che, entrato all' Osservatorio del Capo trovandovi otto collaboratori, se ne partiva, dopo 27 anni di dimora, lasciandone trentaquattro.

Nell'ottobre del 1906 lasciò la direzione dell' Osservatorio; l' ultimo Catalogo stellare, basato sopra osservazioni del 1905-06, contiene, in una brevissima prefazione di lui, il saluto e il ringraziamento ai suoi collaboratori. Stabilitosi a Londra, egli concepì e condusse a termine, proprio pochi mesi prima che morte lo cogliesse, una grande opera, che egli aveva ben diritto di pubblicare: un'opera magnifica che porta il titolo *A history and description of the Royal Observatory Cape of good Hope.*

Non vi è astronomo che non abbia ammirato quest' ultimo lavoro di Gill, e non abbia in esso trovato elementi di studio specialmente in astronomia e astro-fisica tecniche.

Il settennio che scorre dal suo ritorno dalla città del Capo fino alla morte, fu impiegato da Gill in una attivissima compartecipazione ad Istituti ed Associazioni scientifiche nazionali ed internazionali, mentre le ore di tregua egli donava alla grande opera, di cui facemmo or ora appena un cenno. Non mi è concesso, nel dovere d' esser breve, ricordare la benefica opera sua specialmente nelle molteplici Associazioni internazionali, nelle quali la sua parola era ascoltata con grande deferenza.

Fu Gill Corrispondente dell' Istituto di Francia e dell' Ufficio delle Longitudini; nostro Socio straniero nella sezione d' astronomia; fu membro della Società degli Spettroscopisti italiani; membro straniero delle Accademie di Amsterdam, di Berlino, di Pietroburgo e di Washington; Socio onorario di un gran numero di Istituzioni; ebbe due volte la medaglia d' oro della Reale Società Astronomica di Londra, una volta la ebbe dalla Reale Società; conseguì tre premi, quello Bruce della Società Astronomica del Pacifico, quello dell'Accademia Nazionale degli Stati Uniti e finalmente il premio Valz dall' Istituto di Francia.

Ad Aberdeen, dove fu inumato, solenni furono i funerali di Gill; eminenti scienziati vi presero parte; potrei ricordare *inter alios* Forbes, Crookes, Geikie, Lockyer, Dyson, Turner, Newall, Cowell, Kapteyn, ecc. Essi onorarono colla loro presenza i funeri d' un uomo che fu uno dei più grandi astronomi pratici degli ultimi tempi.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 1° marzo 1914.

Berlese A. — *Diaspis pentagona* Targ. e *Prospaltella Berlesei* How. nel Veneto alla fine del 1913. (Estr. dal « Redia » vol. XI). Firenze, 1914. 8°.

Colonnetti G. — L'estensimetro di Cambridge. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 49). Torino, 1913. 8°.

Cunningham A. — A Binary Canon, showing Residues of Powers of 2 for Divisors under 1000, and Indices to Residues. London, 1900. 8°.

Euleri L. — Opera omnia. Series prima, vol. XII. Leipzig, 1914. 4°.

Forti A. — Contribuzioni diatomologiche. Venezia, 1913. 8°.

Instituto y Observatorio de Marina de S. Fernando. Eclipse total de Sol del 17 de Abril de 1912. S. Fernando, 1913. 4°.

Liapounoff A. — Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogéne douèe d'un mouvement de rotation. 4e partie. St. Petersbourg, 1913. 4°.

Morgera A. — A proposito di una Nota del dott. Robinson sur la physiologie de l'appendice coecal. L'hormone du vermium. (Sonderabd. aus « Anatomischer Anzeiger », Bd. 45). Iena, 1913. 8°.

Noether M. — Paul Gordan. (Sonder abd. aus « Mathematische Annalen », Bd. LXXV). Leipzig, 1914. 8°.

Opere (Le) pubbliche in Calabria. (Minist. dei Lavori Pubblici). Bergamo, 1913. 8°.

Tripolitania (La) settentrionale, vol. I. II. (Commissione per lo studio agrologico della Tripolitania). Roma, 1913. 8°.

Puccianti. La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico (pres. dal Socio *Roiti*) . . . . Pag. 329
Id. Confronto tra la scomposizione catodica della prima e della seconda riga della serie di Balmer . . . . » 331
Barbieri. Ricerche di chimica sistematica: rutenio, rodio, palladio (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 334
Betti e *Poccianti*. Sulle ossime dell'α-naftil-fenil-chetone (pres. dal Corrisp. *Peratoner*) . » 340
Cusmano e *Poccianti*. Bibromotetraidrocarvone e sua trasformazione in buccocanfora (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . » 347
Bianchini. Sull'incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo (pres. dal Corrisp. *Piutti*) (*) » 353
Mayer. Sul cloral-p-aminoazobenzene (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . » »
Id. Sui polimeri dell'isosafrolo (pres. dal Socio *Id*.) . . . . » 358
Petri. Sulle condizioni anatomo-fisiologiche dei rametti dei castagni affetti dalla malattia dell'inchiostro (pres. dal Socio *Cuboni*) . . . . » 363
Amantea. Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta dello sperma nel cane (pres. dal Socio *Luciani*) . . . . » 369
Cotronei. Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri (pres. dal Socio *Grassi*) (*) » 375

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Ciamician (rel.) e *Angeli*. Sulla Memoria dei dott. *Amadori* e *Viterbi*: « Sulla composizione della piromorfite » . . . . » 375
Viola (rel.) e *Struever*. Sulla Memoria del dott. *Lincio*: « Rocce e minerali del monte Colmine e adiacenze » . . . . » »
Fano (rel.) e *Luciani*. Sulla Memoria del prof. *Galeotti*: « Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna » . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Millosevich (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Berlese*, *Liapounoff*, *Noether*, *Parona*, del prof. *Eredia*, e il vol. XII, serie 1ª, delle *Opere di Leonardo Eulero*, volume del quale dà notizia . . . . » »

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Annuncia che alla seduta assistono S. E. il Ministro della Marina on. *Millo*, il Socio straniero prof. *Eriksson* e il Socio nazionale *G. Marconi* il quale farà una comunicazione . . . . » 376
Millosevich (Segretario). Commemorazione del Socio straniero Sir *David Gill* . . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . » 381

(*) Questa Nota sarà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

RENDICONTI — Marzo 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Marconi. Nuovi metodi per la produzione delle oscillazioni elettriche continue e per la loro utilizzazione nella radiotelegrafia . . . Pag. 255
Volterra. Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali. . . . » 266
Id. Sulle equazioni alle derivate funzionali (*) . . . » 269
Bianchi. Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali . . » »
De Stefani. Su una nota di Steinmann intorno ai Diaspri di Prato in Toscana (*). . . » 280
Somigliana. Sulla teoria delle distorsioni elastiche (*) . . . » »
Körner e *Contardi.* Benzine nitrosostituite, ottenute dai corrispondenti aminoderivati . . » 281
Almansi. Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica . . . » 287
Enriques. Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ . . . » 291
Millosevich F. Sulla presenza di una breccia ossifera quaternaria nelle Formiche di Grosseto » 297
Bottazzi. Ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. P. I. Dei fenomeni tonici e clonici e della loro genesi nei muscoli striati e lisci (**) . . . » 299
Amoroso. Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media (pres. dal Corrisp. *Almansi*) . . . » »
Armellini. Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . » 304
Gateaux. Sur la représentation des fonctionnelles continues (pres. dal Socio *Volterra*) . » 310
Id. Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation (pres. (*Id.*) (*) . . . » 315
Godeaux. Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (pres. dal Corrisp. *Severi*) (*) . . . » »
Picone. Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche (pres. dal Socio *Bianchi*) (*) . . . » »
Pérès. Sur les fonctions permutables analytiques (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . . » »
Severini. Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm (pres. dal Socio *Pincherle*) . . . » »
Guglielmo. Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione collo spettrometro (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . » 322
Lo Surdo. La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer, e probabili regolarità (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . » 326

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.
(**) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 15 marzo 1914.* **N. 6.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 6°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degl autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1914.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. La teoria delle trasformazioni B_k per le superficie applicabili sulle quadriche generali, quale trovasi esposta nel terzo volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, costituisce (come ormai può dirsi ben confermato dalle ricerche più recenti) la più naturale e completa estensione delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura costante, positiva o negativa. Ma nella teoria di queste ultime superficie (deformate della sfera reale od immaginaria) vi ha un altro interessante capitolo: quello che tratta delle *famiglie di Lamé* costituite di tali superficie, al quale fino ad ora non ne corrispondeva uno analogo per le deformate delle quadriche generali.

La questione che si presentava spontanea, cogli ultimi studî, era di ricercare se colle deformate delle quadriche generali si possano comporre delle famiglie di superficie, le quali, per le loro proprietà, siano da riguardarsi come la naturale estensione delle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante. Dopo alcuni tentativi diretti ad ottenere la generalizzazione richiesta, ho riconosciuto che essa deve opportunamente cercarsi nella teoria dei *sistemi tripli coniugati* di Darboux [1], cioè di quei sistemi

[1] Ved. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^{ème} part., nn. 1047-1052; e *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, livre III, chap. III (2ème ed., 1910).

tripli di superficie nei quali ciascuna superficie viene intersecata dalle superficie delle altre due famiglie secondo le linee di un sistema coniugato.

Si vede, invero, che colle deformate di qualunque quadrica si possono costruire, ed in grande arbitrarietà, famiglie di tali superficie applicabili sulla medesima quadrica, o, più in generale, su quadriche differenti, e che appartengono a sistemi tripli coniugati dotati di particolari proprietà, che sono la naturale estensione di quelle ben note per le famiglie di Lamé a curvatura costante. Precisiamo le accennate proprietà supponendo che nel sistema triplo coniugato

$$u = \text{cost} \quad , \quad v = \text{cost} \quad , \quad w = \text{cost} \, ,$$

le superficie $w = \text{cost}$ siano quelle applicabili sopra quadriche; allora abbiamo:

1°) *La corrispondenza segnata su due qualunque superficie* $w = \text{cost}$ *dalle linee* (w), *intersezioni delle altre due famiglie, conserva i sistemi coniugati.*

2°) *Il sistema coniugato* (u, v), *intercettato sopra ciascuna* $w = \text{cost}$ *dalle superficie delle altre due famiglie, è quello coniugato permanente (cioè quello che si conserva coniugato applicando la* $w = \text{cost}$ *sulla corrispondente quadrica).*

Allorquando le quadriche Q, su cui sono applicabili le $w = \text{cost}$, si suppongono altrettante sfere (reali od immaginarie), il sistema coniugato permanente è quello *ortogonale* delle linee di curvatura, ed il sistema triplo coniugato diventa un sistema triplo ortogonale.

Rispetto alle trasformazioni B_k della teoria generale per le deformate delle quadriche, i sistemi tripli coniugati ora considerati si comportano precisamente come i sistemi tripli ortogonali di superficie a curvatura costante rispetto alle trasformazioni di Bäcklund, sussistendo la proprietà seguente:

Da ogni sistema triplo coniugato, con una famiglia di deformate di quadriche, le trasformazioni B_k *fanno derivare infiniti altri sistemi della stessa specie, le cui singole superficie della nuova famiglia sono legate alle corrispondenti dell'antica da una trasformazione* B_k. *La trasformazione per l'intera famiglia è individuata quando si fissi, del resto ad arbitrio, per una singola superficie della famiglia.*

Aggiungo, in fine, che anche per le trasformazioni B_k dei nostri sistemi tripli coniugati vale il *teorema di permutabilità*, dal quale risultano, per l'applicazione ripetuta del processo di trasformazione, le solite semplificazioni.

2. Non è mio proposito, nè sarebbe possibile in una breve Nota preliminare, entrare negli effettivi sviluppi relativi al caso generale. Soltanto dirò che la costruzione dei nuovi sistemi tripli coniugati si può ottenere dalla ripetizione continua di *trasformazioni infinitesimali*, seguendo i con-

cetti che ho avuto occasione di esporre in un recente lavoro [1]. La natura di queste trasformazioni infinitesime, che diremo T_ε, risulta dalle considerazioni seguenti:

Sopra una superficie S, applicabile sopra una quadrica Q, consideriamo il sistema coniugato permanente (u, v). Ogni punto P di S riceva uno spostamento infinitesimo che lo porti in un punto corrispondente P′, per modo che:

1°) *la superficie* S′, *luogo di* P′, *sia applicabile alla sua volta sulla stessa quadrica* Q, *ovvero sopra un'altra (infinitamente poco diversa)*;

2°) *ad ogni sistema coniugato sopra* S *corrisponda un sistema coniugato sopra* S′;

3°) *le sviluppabili della congruenza formata dalle congiungenti* PP′ *i punti corrispondenti, taglino tanto* S *quanto* S′ *nelle linee del sistema coniugato permanente.*

Se queste condizioni sono soddisfatte, il passaggio da S ad S′ si dirà una *trasformazione infinitesima* T_ε della S.

Ora si riconosce che, per qualunque superficie S, deformata di una quadrica, esistono infinite tali trasformazioni infinitesime *dipendenti da costanti arbitrarie.* Mediante una successione *continua* di trasformazioni infinitesime T_ε, vengono a generarsi i nostri sistemi tripli coniugati, precisamente come la costruzione infinitesimale di Weingarten per le superficie a curvatura costante, ripetuta in modo continuo, dà luogo ai sistemi tripli ortogonali con una famiglia di queste superficie.

Qui consideriamo una classe *particolare* di trasformazioni infinitesime T_ε, ma che esistono per qualunque superficie S deformata di una quadrica. Per ciò applichiamo alla S una trasformazione B_k *singolare*, corrispondente adunque ad una conica focale Γ, e sia S_1 una delle superficie trasformate. La medesima trasformazione singolare B_k, applicata alla S_1, dà luogo ad una serie ∞^1 di trasformate, tra le quali vi ha la S stessa. Diciamo S′ la superficie di questa serie successiva alla S; il passaggio dalla S alla S′ avviene appunto per una T_ε, giacchè tutte le condizioni sopra enumerate sono qui soddisfatte, colla ulteriore particolarità che S, S′ sono applicabili sulla medesima quadrica. Ogni superficie S ammette ∞^1 di tali trasformazioni infinitesime T_ε, poichè, data la S, la S_1 resta arbitraria in una serie ∞^1. Per le ∞^1 trasformazioni infinitesime T_ε ogni punto P di S riceve ∞^1 spostamenti, le cui direzioni formano un cono col vertice in P, che è facile di caratterizzare geometricamente. Per questo, basta ricorrere alla legge di affinità di Ivory e immaginare che la quadrica Q, rotolando sulla superficie applicabile S, venga a toccarla in P; allora si vede che:

[1] Ved. la prefazione alla Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche,* Memorie della Società dei XL, serie 3ª, tomo 18 (1913).

Gli spostamenti impressi dalle ∞^1 *trasformazioni infinitesime* T_ε *ad un punto* P *della* S, *avvengono secondo le generatrici del cono quadrico che projetta da* P *la conica focale* Γ, *nella posizione che questa acquista dopo il rotolamento.*

È bene evidente che le particolari trasformazioni infinitesime T_ε qui considerate, generano sistemi tripli coniugati, nei quali le superficie di una famiglia sono tutte applicabili *sulla medesima quadrica.*

3. Come ho sopra accennato, la trattazione analitica dei nostri sistemi tripli coniugati, in generale, richiede ulteriori considerazioni e sviluppi di calcolo, che sono da riservarsi a più ampia pubblicazione. Nella presente Nota mi limiterò a considerare tre casi più semplici, nei quali l'esistenza dei sistemi tripli coniugati e le formole relative si deducono facilmente dalle famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante, dalle quali vengono a dipendere in modo geometrico assai semplice.

Il primo dei casi che vogliamo considerare è quello dei sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie deformate di *quadriche di rotazione.* Nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di Guichard ([1]) ho dimostrato (al cap. IV, Mem. cit.) che ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie costante, positiva o negativa, sono applicabili quelle trasformazioni *reali* composte di due trasformazioni opposte di Bäcklund, reali o puramente immaginarie, che nascono dalla inversione dei teoremi di Guichard.

Siano $(\Sigma), (\Sigma')$ due tali famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante K, potendo K essere una costante assoluta, ovvero variabile colla superficie nella famiglia. Si sa che le normali a due superficie corrispondenti Σ, Σ', in una coppia qualunque P, P' di punti corrispondenti, si incontrano in un punto P_0 equidistante da P, P'; e se si fa variare la coppia (P, P') sulle due superficie Σ, Σ', il punto P_0 descrive una deformata S_0 di una quadrica di rotazione, ed alle linee di curvatura di (Σ, Σ') corrisponde sopra S_0 il sistema coniugato permanente. Se facciamo variare Σ nella famiglia (Σ) [corrispondentemente Σ' in (Σ')], la S_0 descriverà alla sua volta una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche rotonde; queste quadriche coincideranno se K è una costante assoluta, e saranno invece diverse per K variabile. Ora si verifica che:

La famiglia (S_0) *di deformate delle quadriche rotonde appartiene appunto ad uno dei nostri sistemi tripli coniugati.*

Nel caso attuale è anche facile riconoscere l'esistenza delle trasformazioni B_k per le famiglie (S_0) (cfr. n. 1). E infatti, con una trasformazione arbitraria di Bäcklund, la coppia $(\Sigma), (\Sigma')$ di famiglie di Lamé si cangia

([1]) Ved. la Memoria, *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante,* Annali di matematica, ser. 3ª, tom. III.

in un'altra coppia che diciamo $(\overline{\Sigma})$, $(\overline{\Sigma}')$ nelle medesime condizioni. Questa ultima determina alla sua volta una nuova famiglia $(\overline{S}_0)$ di deformate delle medesime quadriche rotonde, appartenente ad un triplo coniugato; ed ora sussiste la proprietà:

Le singole superficie S_0, $\overline{S}_0$, *corrispondenti nelle due famiglie* (S_0), $(\overline{S}_0)$, *sono trasformate l'una dell'altra per una* B_k.

4. Diamo ora le formole effettive per questi sistemi tripli coniugati con una famiglia (S_0) di deformate di quadriche rotonde.

Per questo, partiamo da un sistema triplo ortogonale (u, v, w) nel quale le $w = \text{cost}$ siano a curvatura costante K, dove K sarà, in generale, variabile con w. Per fissare le idee, prendiamo p. es. il caso di K positiva

$$K = \frac{1}{R^2} \quad , \quad R = R(w) ,$$

e riferiamoci alla nota forma dell'elemento lineare dello spazio

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta \, du^2 + \cosh^2\theta \, dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 , \tag{1}$$

dove $\theta = \theta(u, v, w)$ dovrà soddisfare al corrispondente sistema di equazioni a derivate parziali (di Lamé), che qui per brevità omettiamo di scrivere.

Si sa che le trasformazioni del sistema triplo ortogonale (u, v, w), di cui è parola al n. precd., dipendono da un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali in una quaderna

$$\Phi , \varLambda , M , W$$

di funzioni incognite di u, v, w, che si scrive:

$$(a) \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta \, . \, \varLambda \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cosh\theta \, . \, M \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w} = R \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W \\
&\frac{\partial \varLambda}{\partial u} = - \frac{\partial \theta}{\partial v} M + c \operatorname{senh}\theta \, . \, \Phi - \frac{cR^2 + 1}{R} \cosh\theta \, . \, W , \\
&\qquad \frac{\partial \varLambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} M \quad , \quad \frac{\partial \varLambda}{\partial w} = \frac{R}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} \cdot W \\
&\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \varLambda \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial v} = - \frac{\partial \theta}{\partial u} \varLambda + c \cosh\theta \, . \, \Phi - \frac{cR^2 + 1}{R} \operatorname{senh}\theta \, . \, W , \\
&\qquad \frac{\partial M}{\partial w} = \frac{R}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} \cdot W \\
&\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\cosh\theta}{R} \varLambda \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{R} M , \\
&(cR^2 + 1) \frac{\partial W}{\partial v} = - cRR' \, . \, W + cR \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W - \frac{R}{\operatorname{senh}\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} \varLambda - \\
&\qquad - \frac{R}{\cosh\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} \cdot M ,
\end{aligned} \right.$$

dove c è una costante arbitraria, e si è posto

$$R' = \frac{dR}{dw}.$$

Il sistema (a) è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$(2) \qquad \Lambda^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)\, W^2 = \text{cost};$$

e noi assumiamo la quaderna (Φ, Λ, M, W) di soluzioni per modo che la costante nel secondo membro della (2) sia nulla, e si abbia quindi identicamente

$$(2^*) \qquad \Lambda^2 + M^2 - c\Phi^2 + (cR^2 + 1)\, W^2 = 0.$$

Una tale quaderna (Φ, Λ, M, W) fissa appunto una delle indicate trasformazioni; ma a noi qui interessa soltanto di scrivere le formole che assegnano le corrispondenti superficie S_0 applicabili sopra quadriche rotonde (ellissoide allungato, ovvero iperboloide a due falde). Indicando con (x, y, z) un punto qualunque (u, v, w) dello spazio, con X_3, Y_3, Z_3 i coseni della direzione principale (w), e con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto corrispondente di S_0, abbiamo

$$(3) \qquad x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3 \quad , \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y_3 \quad , \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z_3 .$$

Verifichiamo che queste definiscono in effetto un sistema triplo coniugato (u, v, w), chè le altre proprietà descritte al n. 1 ne seguono immediatamente.

5. Per dimostrare che le (3) definiscono un sistema triplo coniugato bisogna provare (Darboux, loc. cit.) che x_0, y_0, z_0 sono tre soluzioni di un sistema simultaneo di equazioni (di Laplace) della forma

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} &= \frac{\partial \log H_1}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \log H_2}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v\, \partial w} &= \frac{\partial \log H_2}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial w} &= \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \log H_1}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial u} , \end{aligned} \right.$$

ove H_1, H_2, H_3 sono tre convenienti funzioni.

Per questo si comincino a formare le derivate prime, rapporto ad u, v, w, delle (3), tenendo conto delle formole (a), e delle equazioni a cui soddisfano i coseni

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \quad , \quad (X_3, Y_3, Z_3)$$

delle tre direzioni principali nel sistema triplo ortogonale (1). Si trovano così le seguenti formole:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{\mathrm{RW}\,\mathrm{senh}\,\theta - \Phi\cosh\theta}{\mathrm{RW}^2}(\mathrm{WX}_1 - \varDelta \mathrm{X}_3)\\
\frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{\mathrm{RW}\cosh\theta - \Phi\,\mathrm{senh}\,\theta}{\mathrm{RW}^2}(\mathrm{WX}_2 - \mathrm{MX}_3)\\
\frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{\mathrm{W}}\left\{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\mathrm{X}_1 + \frac{\mathrm{R}}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\mathrm{X}_2 + \frac{\partial \log \mathrm{W}}{\partial w}\mathrm{X}_3\right\},
\end{aligned}\right.$$

colle analoghe per y_0, z_0.

Dopo ciò, se si calcolano le derivate seconde (miste) di

$$x_0\,,\ y_0\,,\ z_0\,,$$

si vede che queste sono, in effetto, tre soluzioni di un sistema (α), quando H_1, H_2, H_3 si assumano dati da

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{senh}\,\theta - \frac{\Phi}{\mathrm{RW}}\cosh\theta \quad , \quad \mathrm{H}_2 = \cosh\theta - \frac{\Phi}{\mathrm{RW}}\,\mathrm{senh}\,\theta \quad , \quad \mathrm{H}_3 = \frac{\Phi}{\mathrm{W}}\,.$$

Dunque: *le formole* (3) *definiscono un sistema triplo coniugato*, c. d. d.

6. La seconda classe di sistemi tripli coniugati, con una famiglia di deformate di quadriche, che vogliamo considerare, si ottiene molto più semplicemente dalle famiglie di Lamé a curvatura costante con una costruzione *in termini finiti*. Le quadriche di cui qui si tratta, sono le quadriche immaginarie (osculanti l'assoluto) di equazione

$$y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \frac{1}{\mathrm{K}} \quad (\mathrm{K}\ \text{costante}). \tag{4}$$

Al § 447 delle *Lezioni* è ottenuta l'accennata costruzione per le superficie *reali* applicabili sulle quadriche immaginarie (4) appunto partendo dalle famiglie di Lamé a curvatura costante. Ora, colle nuove nozioni sui sistemi tripli coniugati, possiamo completare la costruzione colla proposizione seguente:

In ogni famiglia (Σ) *di Lamé di superficie a curvatura costante* K (*variabile in generale con* Σ), *i piani osculatori, nei punti di una superficie* Σ, *delle curve traiettorie ortogonali della famiglia, inviluppano una superficie* S *applicabile sulla quadrica* (4); *quando* Σ *descrive la famiglia* (Σ) *di Lamé, la* S *descrive una famiglia* (S), *appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati*.

Per la dimostrazione si consideri ad esempio il caso di una famiglia (Σ) di Lamé a curvatura costante positiva, per la quale valgono le formule

del n. 4. Se con ξ, η, ζ indichiamo le coordinate di quel punto di S che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ, troviamo

$$\xi = x + \frac{R^2}{\Phi}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}X_2 - \frac{R'}{R^2}X_3\right), \tag{5}$$

colle analoghe per η, ζ, dove si è posto

$$\Phi = \frac{\partial\theta}{\partial w}.$$

Verificheremo anche qui che le (5) definiscono un sistema triplo (u, v, w) coniugato, provando che ξ, η, ζ sono soluzioni di un conveniente sistema (α).

Pongasi, per brevità,

$$\Omega_x = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}X_2 - \frac{R'}{R^2}X_3,$$

e analogamente si definiscano Ω_y, Ω_z, sicchè le (5) si scrivono anche

$$\xi = x + \frac{R^2}{\Phi}\Omega_x.$$

Derivando rapporto ad u, v, w, si trova dapprima

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial u} &= -\frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R}\coth\theta\, X_3\right) \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} &= -\frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\Omega_x + \frac{\Phi}{R}\operatorname{tgh}\theta\, X_3\right) \\ \frac{\partial\xi}{\partial w} &= R\Phi X_3 + \frac{R^2}{\Phi}\frac{\partial\Omega_x}{\partial w} - \frac{R^2}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\Omega_x + \frac{2RR'}{\Phi}\Omega_x, \end{aligned}\right.$$

e, costruendo le derivate seconde miste, si vede che ξ, η, ζ sono soluzioni di un sistema (α), con

$$H_1 = \frac{1}{\Phi\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad H_2 = \frac{1}{\Phi\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \quad H_3 = \frac{1}{\Phi}.$$

Affatto analogamente si procederebbe nel caso di una famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé.

Qui osserviamo ancora che l'esistenza delle trasformazioni B_k per questi sistemi tripli coniugati segue subito dall'esistenza delle trasformazioni di Bäcklund per le famiglie pseudosferiche di Lamé. E invero, se, con una trasformazione di Bäcklund, cangiamo la (Σ) in una nuova (Σ'), e con (S') indichiamo la famiglia che si ottiene da (Σ') colla stessa costruzione, si ha che: *I rispettivi sistemi tripli coniugati, cui appartengono le famiglie*

(S), (S′) *di deformate delle quadriche* (4), *provengono l'uno dall'altro per una trasformazione* B_k.

7. Una terza ed ultima classe di sistemi tripli coniugati, che vogliamo considerare nella presente Nota, consterà di deformate di quei paraboloidi immaginarii tangenti all'assoluto, le quali si ottengono applicando il nuovo metodo di Weingarten alle superficie di curvatura costante ([1]).

Per restare nel caso più semplice, prendasi un sistema triplo ortogonale (u, v, w) in cui le $w = \text{cost}$ siano superficie pseudosferiche di raggio $=1$ (sistema Weingarten), e sia

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo.

Indichiamo con

$$W_1 = SxX_1 \quad , \quad W_2 = SxX_2 \quad , \quad W_3 = SxX_3$$

le distanze algebriche dell'origine dalle tre facce del triedro principale nel punto (u, v, w).

Dalle formole per le derivate dei coseni delle direzioni principali si traggono le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v} W_2 + \operatorname{sen}\theta\, W_3 + \cos\theta \;,\quad \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u} W_2 \,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_1}{\partial w} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_3\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v} W_1 \;,\quad \frac{\partial W_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u} W_1 - \cos\theta\, W_3 + \operatorname{sen}\theta\\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_2}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_3\\
&\frac{\partial W_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta\, W_1 \;,\quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = \cos\theta\, W_2\\
&\qquad\qquad \frac{\partial W_3}{\partial w} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} W_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} W_2 \,.
\end{aligned}\right.$$

Possiamo ora determinare *per quadrature* tre funzioni incognite

$$\xi = \xi(u, v, w) \quad , \quad \eta = \eta(u, v, w) \quad , \quad \zeta = \zeta(u, v, w) \tag{6}$$

([1]) Ved. i §§ 1-4 della mia Memoria, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*, Annali di matematica, ser. 3ª, tom. X (1906).

dalle formole

$$
(7)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= (x \cos\theta - X_3 \operatorname{sen}\theta)\, W_1 \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= (x \operatorname{sen}\theta + X_3 \cos\theta)\, W_2 \\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= \left(x \frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} X_2\right) W_3 ,
\end{aligned}
\right.
$$

e dalle analoghe, per η, ζ, le condizioni d'integrabilità essendo identicamente soddisfatte. Così le ξ, η, ζ sono determinate a meno di costanti additive, ed il sistema triplo (u, v, w) dato dalle (6) è fissato a menò di una traslazione nello spazio.

Ora le due prime formole della (7) sono quelle fornite dal metodo di Weingarten, applicato alle superficie pseudosferiche, onde risulta che nel sistema triplo (6) le superficie $w = \text{cost}$ sono tutte applicabili sul paraboloide

$$
(8)\qquad (x + iy)^2 + z^2 = x - iy .
$$

Di più, sulle $w = \text{cost}$ le linee (u, v) sono quelle del sistema coniugato permanente. Per completare le verifiche e dimostrare che le (6) definiscono uno dei nostri sistemi tripli coniugati, resta solo da provare che ξ, η, ζ sono soluzioni di un sistema (α) n. 5. Ma se dalle (7) formiamo le derivate seconde miste, si vede che, in effetto, ξ, η, ζ soddisfano ad un sistema (α), in cui si ha semplicemente

$$
H_1 = W_1 \quad , \quad H_2 = W_2 \quad , \quad H_3 = W_3 .
$$

Da ultimo, se trasformiamo la famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé in un'altra (Σ'), i due sistemi tripli coniugati con una famiglia di deformate del paraboloide (8) che se ne deducono, *collocati convenientemente nello spazio*, derivano l'uno dall'altro per una trasformazione B_k.

Matematica. — *Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Nella classificazione dei problemi che dipendono dai concetti di funzioni di linee, dopo quelli di tipo algebrico (equazioni integrali ed equazioni funzionali) vengono le equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali. Fra queste ultime di speciale interesse sono quelle che appartengono al tipo delle equazioni ai differenziali totali, che vennero in modo particolare studiate; ma conviene segnalarne altre di diverso tipo che pure è utile di esaminare. È ciò che mi permetto fare in questa brevissima Nota, limitandomi a darne degli esempî.

2. Denotiamo con $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ una quantità che dipende da tutti i valori di $f(x)$ nell'intervallo 0,1, che sia derivabile e non abbia punti eccezionali ([1]).

Vogliamo che essa soddisfi alla condizione

$$\int_0^1 f(\xi)\, F'|[f(x), \xi]|\, d\xi = 0\,, \tag{1}$$

ove $F'|[f(x), \xi]|$ denota la derivata di $F|[f(x)]|$ eseguita nel punto ξ.

Troviamo facilmente che la funzione

$$\Phi\left|\left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi}\right]\right|,$$

ove con Φ si denota una quantità che dipende in modo arbitrario da $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi}$, ed è continua derivabile e senza punti eccezionali, soddisfa alla (1). Reciprocamente se F soddisfa la (1) essa può mettersi sotto la forma precedente, perchè non deve cambiare moltiplicando $f(x)$ per una costante qualunque.

La (1) rappresenta una delle equazioni del nuovo tipo.

3. Consideriamo

$$F|[\alpha, f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

ove F dipende dal parametro α e dai valori di $f(x)$ in tutto l'intervallo 0,1 e non ha punti eccezionali. Esaminiamo la equazione

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \int_0^1 F'|[\alpha, f(x), \xi]|\, d\xi \int_0^1 \varphi(\xi, \eta)\, f(\eta)\, d\eta = 0\,, \tag{2}$$

([1]) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 29.

nella quale $\varphi(x, \eta)$ rappresenta una funzione nota delle due variabili ξ e η e

$$F'|[\alpha, f(x), \xi]|$$

indica la derivata funzionale di F rispetto a f, eseguita nel punto ξ.

La (2) rappresenta pure una delle equazioni del nuovo tipo.

La sua risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione della equazione integro-differenziale [1]

$$(3) \qquad \frac{\partial f(\xi, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta, \alpha) \, d\eta .$$

Posto

$$\varDelta(\xi, \eta \mid \alpha) = \alpha \varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \overset{\times\times}{\varphi^2}(\xi, \eta) + \frac{\alpha^3}{3!} \overset{\times\times}{\varphi^3}(\xi, \eta) + \cdots,$$

ove gli asterischi denotano operazioni di composizione di 2ª specie, la soluzione della (3) è data da

$$f(\xi, \alpha) = \Psi(\xi) + \int_0^1 \varDelta(\xi, \eta \mid \alpha) \Psi(\eta) \, d\eta ,$$

essendo $\Psi(\xi)$ una funzione arbitraria.

Ciò premesso, risolviamo l'equazione integrale

$$f(\xi) = \Psi(\xi, \alpha) + \int_0^1 \varDelta(\xi, \eta \mid \alpha) \Psi(\eta, \alpha) \, d\eta ,$$

nella quale α figura come un parametro costante, e sia

$$\Psi(\xi, \alpha) = f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta \mid \alpha) f(\eta) \, d\eta$$

la soluzione.

Il nucleo $\lambda(\xi, \eta \mid \alpha)$ si otterrà facilmente e sarà

$$\lambda(\xi, \eta \mid \alpha) = -\alpha \varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \overset{\times\times}{\varphi^2}(\xi, \eta) - \frac{\alpha^3}{3!} \overset{\times\times}{\varphi^3}(\xi, \eta) + \cdots$$

giacchè si verifica immediatamente che

$$\varDelta(\xi, \eta \mid \alpha) + \lambda(\xi, \eta \mid \alpha) = -\int_0^1 \varDelta(\xi, \zeta \mid \alpha) \lambda(\zeta, \eta \mid \alpha) \, d\zeta .$$

Denoti ora $\Phi \left|\left[\theta(x)\right]_0^1\right|$ il simbolo di una quantità che dipende arbitrariamente da tutti i valori di $\theta(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sia continua derivabile e senza punti eccezionali. Se $\theta(x)$ dipenderà anche da un para-

[3] Vedi Lezioni precedentemente citate cap. XIII.

metro α, Φ resulterà una funzione ordinaria del parametro stesso. In particolare si sostituisca per $\theta(x)$, $\Psi(x, \alpha)$; resulterà allora Φ una quantità che dipenderà da tutti i valori di $f(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sarà una funzione ordinaria del parametro α, cioè avremo [1]

$$\text{(I)} \qquad F\,|[\alpha, f\overset{1}{\underset{0}{(x)}}]| = \Phi\left|\left[f(x) + \int_0^1 \lambda(x, \eta|\alpha) f(\eta)\, d\eta\right]\right| .$$

Proviamo adesso che *la* (I) *soddisfa l'equazione* (2). La verifica è molto semplice. Deriviamo $\Phi|[\theta(x)]|$ per rapporto a $\theta(x)$ nel punto ξ: otterremo una quantità che oltre dipendere da $\theta(x)$ è una funzione di ξ. Scriviamola per semplicità $\Phi'(\xi)$. Calcoliamo ora δF. Resulterà

$$\delta F = \int_0^1 \Phi'(\xi) \Big\{ \delta f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta|\alpha)\, \delta f(\eta)\, d\eta +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial \alpha} f(\eta)\, d\eta\, \delta\alpha \Big\} d\xi ,$$

quindi

$$F'|[\alpha, f(x), \xi]| = \Phi'(\xi) + \int_0^1 \Phi'(\eta)\, \lambda(\eta, \xi|\alpha)\, d\eta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 \Phi'(\xi)\, d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial \alpha} f(\eta)\, d\eta .$$

Onde il primo membro della (2) si scriverà, sostituendovi le espressioni precedenti

$$\text{(4)} \qquad \int_0^1 \Phi'(\xi)\, d\xi \int_0^1 f(\eta)\, d\eta \,\times$$
$$\times \left[\frac{\partial \lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial \alpha} + \varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi, \zeta|\alpha)\, \varphi(\zeta, \eta)\, d\zeta \right] .$$

[1] Se per esempio prendiamo

$$\Phi\,|[\theta\overset{1}{\underset{0}{(x)}}]| = \int_0^1 \lambda(x)\, \theta(x)\, dx ,$$

ove $\lambda(x)$ è una certa funzione determinata, sarà

$$F\,|[f\overset{1}{\underset{0}{(x)}}, \alpha]| = \int_0^1 \lambda(x)\, \Psi(x, \alpha)\, dx .$$

Se prendiamo invece

$$\Phi\,|[\theta\overset{1}{\underset{0}{(x)}}]| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \theta(x)\, \theta(y)\, dx\, dy$$

sarà

$$F|[f\overset{1}{\underset{0}{(x)}}, \alpha)]| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \Psi(x, \alpha)\, \Psi(y, \alpha)\, dx dy ,$$

e così di seguito.

Ma dalla espressione trovata superiormente per $\lambda(\xi , \eta | \alpha)$ si ricava

$$\frac{\partial \lambda(\xi , \eta | \alpha)}{\partial \alpha} + \varphi(\xi . \eta) + \int_0^1 \lambda(\xi , \zeta | \alpha) \varphi(\zeta , \eta) d\zeta = 0 ,$$

dunque la (4) sarà nulla qualunque siano $\Phi'(\xi)$ e $f(\eta)$ e per conseguenza la (2) è verificata comunque si prendano Φ ed f.

4. I procedimenti indicati, come in tutti i casi analoghi, possono facilmente farsi discendere dal noto concetto di passaggio dal finito all'infinito, che informa tutti i procedimenti dell'analisi a cui appartengono le questioni trattate. È interessante osservare come negli integrali compariscono delle *funzioni arbitrarie di linee.*

5. Di uno speciale interesse sono la equazione

$$(5) \qquad \int_0^1 \int_0^1 F''[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) , \xi , \eta] \, K(\xi , \eta) \, d\xi \, d\eta = 0 ,$$

in cui F'' è la derivata seconda di $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ eseguita nei punti ξ e η, e l'altra analoga

$$(5') \qquad \int_0^1 F'' |[f(x) , \xi , \xi]| \, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F'' |[f(x) , \xi , \eta]| \, H(\xi , \eta) \, d\xi \, d\eta = 0 ,$$

ove

$$F'' |[f(x) , \xi , \xi]| = \lim_{\eta=\xi} F'' |[f(x) , \xi , \eta]| .$$

Esse possono considerarsi come equazioni tipiche corrispondenti alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti, e possono respettivamente chiamarsi *equazioni lineari alle derivate funzionali del 2° ordine di 1ª e di 2ª specie.*

6. Supponiamo, nella (5),

$$K(\xi , \eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \, a_{is} \, \varphi_i(\xi) \, \varphi_s(\eta) , \; a_{is} = a_{si}$$

ove le funzioni $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots \varphi_n$ sono normalizzate.

Prendiamo la forma reciproca

$$G(\xi , \eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \, b_{is} \, \varphi_i(\xi) \, \varphi_s(\eta) , \; b_{is} = b_{si}$$

tale, cioè, che

$$\sum_1^n{}_h \, a_{ih} \, b_{hs} = \begin{cases} 0 , & i \gtrless s \\ 1 , & i = s \end{cases} .$$

Poniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\xi, \eta)\, f(\xi)\, f(\eta)\, d\xi\, d\eta = \varrho$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(\varrho) = F\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

che soddisfano la (5).

Avremo

$$F'\left|\left[f(x), \xi\right]\right| = \theta'(\varrho)\int_0^1 G(\xi, x)\, f(x)\, dx$$

$$F''\left|\left[f(x), \xi, \eta\right]\right| = \theta''(\varrho)\int_0^1 G(\xi, x)\, f(x)\, dx \int_0^1 G(\eta, y)\, f(y)\, dy + \\ + \theta'(\varrho)\, G(\xi, \eta),$$

e quindi

$$\int_0^1\int_0^1 F''\left|\left[f(x), \xi, \eta\right]\right| K(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 2\theta''(\varrho)\, \varrho + n\theta'(\varrho).$$

Se dunque la (5) deve essere soddisfatta, sarà

(II)
$$\theta(r) = A\varrho^{-\frac{n}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

7. Passiamo adesso alla (5'). Potremo sempre supporre $H(x, y)$ simmetrica. Calcoliamo $L(x, y)$ tale da soddisfare il principio di reciprocità [1], cioè

(6)
$$H(x, y) + L(x, y) = -\int_0^1 H(x, \xi)\, L(\xi, y)\, d\xi,$$

ammesso diverso da zero il determinante.

Si riconosce facilmente che $L(x, y)$ sarà simmetrico, e che H ed L saranno permutabili di 2ª specie.

Poniamo

$$r = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta)\, f(\xi)\, f(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(r) = F\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

[1] Vedi Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 105.

che soddisfano la (5'). Avremo

$$(7) \qquad F'|[f(x)\,,\xi]| = \theta'(r)\left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi\,,x)\,f(x)\,dx \right\}$$

$$(7') \qquad F''|[f(x)\,,\xi\,,\eta]| = \theta''(r)\left\{ f(\xi) + \int_0^1 L(\xi\,,x)\,f(x)\,dx \right\}\times$$

$$\times\left\{ f(\eta) + \int_0^1 L(y\,,\eta)\,f(\eta)\,dy \right\} + \theta'(r)\,L(\xi\,,\eta)\,.$$

Per conseguenza,

$$(8) \qquad \int_0^1 F''|[f(x)\,,\xi\,,\xi]|\,d\xi + \int_0^1\int_0^1 F''|[f(x)\,,\xi\,,\eta]|\,H(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \theta''(r)\left\{ \int_0^1 f^2(\xi)\,d\xi + \int_0^1\int_0^1 M(\xi\,,\eta)\,f(\xi)\,f(\eta)\,d\xi\,d\eta \right\}$$

$$+ \theta'(r)\left\{ \int_0^1\int_0^1 L(\xi\,,\eta)\,H(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^1 L(\xi\,,\xi)\,d\xi \right\},$$

ove

$$M = H + 2\overset{\times\times\times\times}{H\,L} + \overset{\times\times\times\times}{H\,L^2} + \overset{\times\times}{L^2} + 2\,L$$

in cui si è fatto uso, come precedentemente nel § 3, della notazione che rappresenta la composizione di 2ª specie [1].

Ma in virtù della (6), che si può scrivere

$$H + L = -\overset{\times\times\times\times}{H\,L}\,,$$

abbiamo

$$\overset{\times\times\times\times}{H\,L^2} = -\overset{\times\times}{L^2} + H + L:$$

quindi

$$M = H - 2H - 2L - \overset{\times\times}{L^2} + H + L + \overset{\times\times}{L^2} + 2\,L = L\,.$$

Si ha, poi,

$$\int_0^1\int_0^1 L(\xi\,,\eta)\,H(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta = -\int_0^1 \{L(\xi\,,\xi) + H(\xi\,,\xi)\}\,d\xi\,,$$

[1] Vedi Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes,* Paris, Gauthier-Villars, 1913, pag. 179.

onde la (8) si scriverà

$$\Omega = \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$= 2\theta''(r)\, r - h\theta'(r),$$

ove

$$L = \int_0^1 H(\xi, \xi)\, d\xi .$$

Affinchè la (5′) sia soddisfatta, basterà dunque prendere

$$\text{(III)} \qquad \theta(r) = A r^{\frac{h}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

Si è così riesciti ad ottenere gli integrali (II) e (III) delle equazioni del 2° ordine lineari alle derivate funzionali di 1ª e di 2ª specie considerate analoghi a quelli sui quali si applica l'analisi di Green.

8. Dalla (7) segue

$$\delta F'|[f(x), \xi]| = \theta'(r)\, \delta f(\xi) + \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, \delta f(\eta)\, d\eta$$

il punto ξ è quindi eccezionale [1] e $\theta'(r)$ è il coefficiente differenziale di $\delta f(x)$.

Facendo uso di una notazione adottata fino dai miei primi lavori sopra questo soggetto [2] potremo scrivere

$$\left(F'|[f(x), \xi]|\right)'_{f(\xi)} = \theta'(r).$$

Avremo dunque

$$\Omega + \int_0^1 \left(F'|[f(x), \xi]|\right)'_{f(\xi)} M(\xi)\, d\xi = 2\theta''(r)\, r + (m - h)\, \theta'(r),$$

ove si è posto

$$m = \int_0^1 M(\xi)\, d\xi .$$

Preso dunque

$$\text{(IV)} \qquad F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]| = \theta(r) = A r^{\frac{h-m}{2}+1} + B$$

con A e B costanti, essa verificherà l'equazione

$$\int_0^1 F''|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1 \int_0^1 F''|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int_0^1 \left(F'|[f(x), \xi]|\right)'_{f(\xi)} M(\xi)\, d\xi = 0 .$$

[1] Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. I, § VII.

[2] *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Nota II, § 4, 14. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 18 sett. 1887.

Meccanica. — *Nuovi criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota comparsa nei Rendiconti di questa R. Accademia (2° semestre 1913, pag. 642), ho dato alcuni criterî (condizioni sufficienti) di stabilità, nel caso che il sistema di equazioni differenziali, al quale intendo ricondotto il nostro studio, sia il seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n \,, \end{cases}$$

dove le p_{rs} $(r\,, s = 1\,, 2\,, \ldots, n)$ sono costanti reali. Nei riguardi delle costanti stesse, giova notare come, nei problemi d'interesse pratico, avviene, per esempio, che, assegnata ognuna di esse costanti entro un certo campo di valori, il quale dipende dalla natura delle applicazioni, si ricerca se esiste la stabilità del moto indipendentemente dai valori che competono alle costanti medesime nell'interno dei rispettivi campi di assegnazione. Tuttavia, la portata dei suddetti criterî potrebbe sembrare, a prima giunta, ristretta, mentre siamo in presenza effettivamente del contrario.

Giova, anzitutto, richiamare i criterî su menzionati.

PRIMO CRITERIO:

$$\lambda - (n-1)\,\mu \geq 0\,.$$

SECONDO CRITERIO:

Basta che, almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α, si abbia simultaneamente

$$\begin{cases} p_{\alpha\alpha}\,p_{si} - p_{s\alpha}\,p_{\alpha i} = 0 \\ \lambda_{\alpha\alpha} - (n-1)\,\mu_\alpha > 0 \end{cases} \qquad (s\,, i = 1\,, 2\,, \ldots, \alpha-1\,, \alpha+1\,, \ldots, n)\,.$$

In cotesti criterî, le quantità λ, μ, $\lambda_{\alpha\alpha}$, μ_α s'intendono assunte così:

$$
(\mathrm{I})_1 \quad \begin{cases} -\lambda \geq p_{ii} & (i=1,2,\ldots,n) \\ \mu \geq |p_{ij}| & (i \neq j\,;\, i,j=1,2,\ldots,n)\ [1] \\ -\lambda_{\alpha\alpha} \geq p_{\alpha\alpha} & \\ \mu_\alpha \geq |p_{sr}| & (s,r=1,2,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,n)\,. \end{cases}
$$

I seguenti criterî (cioè terzo e quarto) valgono nell'ipotesi $p_{ii} \neq p_{jj}$ $(i \neq j\,;\, i,j=1,2,\ldots,n)$.

Terzo criterio:

$$\lambda-(n-1)\,\nu \geq 0\,,$$

dove ν è una quantità positiva, assunta in modo che si abbia simultaneamente

$$
(\mathrm{I})_2 \quad \begin{cases} \nu \geq |p_{sj}| \quad , \quad \nu \geq \left|\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon j}}{p_{\varepsilon\varepsilon}-p_{ss}}\right| \quad , \quad \nu \geq \left|\dfrac{p_{s\varepsilon}\, p_{\varepsilon s}}{p_{\varepsilon\varepsilon}-p_{ss}}\right| \\ (j \neq s\,;\, j,s=1,2,\ldots,\varepsilon-1,\varepsilon+1,\ldots,n)\,, \end{cases}
$$

essendo $p_{\varepsilon\varepsilon}$ la maggiore fra le costanti p_{ii} $(i=1,2,\ldots,n)$.

Quarto criterio:

$$\lambda-(n-1)\,\nu_\alpha \geq 0$$

(almeno in corrispondenza di un certo valore dell'indice α), intendendo assunta la quantità ν_α in modo che si abbia simultaneamente

$$
(\mathrm{I})_3 \quad \begin{cases} \nu_\alpha \geq \left|\dfrac{p_{s\alpha}\, p_{\alpha s}}{p_{\alpha\alpha}-p_{ss}}\right| \quad , \quad \nu_\alpha \geq |p_{sj}| + \left|\dfrac{p_{s\alpha}\, p_{\alpha j}}{p_{\alpha\alpha}-p_{ss}}\right| \\ (j \neq s\,;\, j,s=1,2,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,n)\,. \end{cases}
$$

Nella prima, nella seconda e nella quarta delle $(\mathrm{I})_1$ e nella $(\mathrm{I})_2$ ed $(\mathrm{I})_3$, il segno di eguaglianza è necessariamente vincolato. Così, per esempio (qualora le p_{ii} non siano tutte fra loro eguali), nelle $-\lambda \geq p_{ii}$ il segno di eguaglianza potrà sussistere, volendo, soltanto in corrispondenza della massima delle p_{ii}.

Ciò premesso, notando che, qualora le p_{ii} $(i=1,2,\ldots,n)$ non siano tutte negative, i criterî primo, terzo e quarto non resultano soddisfatti: ed osservando, d'altra parte, la struttura del secondo criterio, parrebbe, a prima giunta, che tutti i suddetti criterî comportassero un campo ristretto di sfruttamento. Invece, siamo in presenza effettivamente del contrario, come mi accingo a mostrare.

[1] Il simbolo | | significa che va preso il valore assoluto della quantità racchiusa dal simbolo stesso.

Si osservi, anzitutto, l'equazione determinante

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} p_{11}-\omega\,, & p_{12} & ,\dots, & p_{1n} \\ p_{21} & ,\, p_{22}-\omega & ,\dots, & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & ,\, p_{n2} & ,\dots, & p_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0\,;$$

e si noti che, data un'equazione algebrica

$$(3)\qquad \omega^n + \alpha_1\omega^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0\,,$$

è necessario, affinchè la (3) abbia tutte le radici con parte reale non positiva, che sia $\alpha_1 \geqq 0$. Sicchè, nella (2) avendosi $\alpha_1 = -\sum_{s=1}^{n} p_{ss}$, e tralasciando la considerazione del caso particolare, in cui esista qualche radice con parte reale nulla, si vede che, nei riguardi della nostra questione, rimane da intendere

$$(4)\qquad 0 > \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\,.$$

Ciò premesso, vengo a mostrare che, qualora la (4) sia soddisfatta, si può sempre, mediante opportune sostituzioni lineari a coefficienti costanti (fra le quali sarà compresa la sostituzione identica nel caso di tutte le p_{ss} negative), trasformare il sistema (1) in un altro sistema

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \cdots + q_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt} = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \cdots + q_{2n}y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dt} = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \cdots + q_{nn}y_n\,, \end{cases}$$

nel quale le q_{ss} $(s = 1\,, 2\,, \dots\,, n)$ siano tutte negative.

Si operi, dapprima, la sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = p_1^{(1)}y_2^{(1)} + p_2^{(1)}y_2^{1)} \\ x_2 = q_1^{(1)}y_1^{(1)} + q_2^{(1)}y_2^{(1)} \\ x_j = y_j^{(1)} \quad (j = 3\,, 4\,, \dots\,, n), \end{cases}$$

dove le $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ sono costanti. È implicitamente inteso che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \\ q_1^{(1)} & q_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Il sistema (1) si trasformerà, allora, in un sistema nelle $y^{(1)}$, sistema che intenderò risoluto rispetto alle derivate delle $y^{(1)}$ medesime. Allora, designando con $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ i coefficienti rispettivi di $y_1^{(1)}$ ed $y_2^{(1)}$ nelle prime due equazioni del sistema così trasformato, resulta che, ponendo

$$(6) \qquad p_1^{(1)} p_2^{(1)} = p^{(1)} \;,\; p_1^{(1)} q_2^{(1)} = u^{(1)} \;,\; p_2^{(1)} q_1^{(1)} = v^{(1)} \;,\; q_1^{(1)} q_2^{(1)} = q^{(1)} \,,$$

avremo

$$(7) \qquad \begin{cases} p_{11}^{(1)} D = p_{11} u^{(1)} - p_{21} p^{(1)} + p_{12} q^{(1)} - p_{22} v^{(1)} \\ p_{22}^{(1)} D = p_{21} p^{(1)} - p_{11} v^{(1)} + p_{22} u^{(1)} - p_{12} q^{(1)} . \end{cases}$$

Mediante addizione delle (7) fra loro, si ha

$$(p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)}) D = (p_{11} + p_{22})(u^{(1)} - v^{(1)}) .$$

Ma

$$u^{(1)} - v^{(1)} = D ,$$

dunque

$$(8) \qquad p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)} = p_{11} + p_{22} ,$$

come resulta pure dalla teoria degli invarianti delle equazioni differenziali lineari [1].

La (8) rappresenta l'unica condizione, alla quale dovranno soddisfare i nuovi coefficienti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$: cioè, scelti $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ in modo che la (8) sia soddisfatta, esisterà sempre una sostituzione del tipo considerato, che porta il sistema (1) in un sistema nelle $y^{(1)}$, nel quale i coefficienti di $y_1^{(1)}$ e di $y_2^{(1)}$ saranno rispettivamente le costanti di $p_{11}^{(1)}$ e $p_{22}^{(1)}$ scelte. Infatti, la coesistenza delle (6) richiede $p^{(1)} q^{(1)} = u^{(1)} v^{(1)}$, cioè

$$(9) \qquad p^{(1)} = w_1 v^{(1)} \quad , \quad u^{(1)} = w_1 q^{(1)} ,$$

dove w_1 è arbitraria. Sicchè, assegnato a D un valore diverso da zero, ma, del resto, qualunque, le (7) diventano, in $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le seguenti equazioni:

$$(10) \qquad \begin{cases} (p_{11} w_1 + p_{12}) u^{(1)} - (p_{21} w_1^2 + p_{22} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{11}^{(1)} D \\ (p_{22} w_1 - p_{12}) u^{(1)} + (p_{21} w_1^2 - p_{11} w_1) v^{(1)} = w_1 p_{22}^{(1)} D , \end{cases}$$

[1] Per la bibliografia relativa a cotesta teoria, vedasi, p. es., Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Bologna, 1901, pag. 474.

le quali sono sempre possibili, giacchè il determinante relativo alle medesime è

$$p_{21}(p_{11}+p_{22})\,w_1^3+(p_{22}^2-p_{11}^2)\,w_1^2-p_{12}(p_{11}+p_{22})\,w_1\,,$$

il quale, soltanto nel caso $p_{12}=p_{21}=0$, $p_{11}=p_{22}$, oppure nell'altro $p_{11}=p_{22}=0$, resulta identicamente nullo, casi nei quali le (10) rappresentano un'unica equazione. Qualora le (10) non rappresentino un'unica equazione, avremo, mediante addizione delle (10) medesime fra loro,

$$u^{(1)}-v^{(1)}=\mathrm{D}\,.$$

Qualora invece le (10) rappresentino un' unica equazione, occorrerà accoppiare, con la medesima, l'altra $u^{(1)}-v^{(1)}=\mathrm{D}$.

Avute le $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$, le (9) porgeranno (intendendovi w_1 diversa da zero) le $p^{(1)}$ e $q^{(1)}$. Avremo, poi, nei riguardi delle $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$, le equazioni (6), che potremo, p. es., trattare così: Si assumano $p_1^{(1)}$ e $p_2^{(1)}$ in modo che si abbia $p_1^{(1)}p_2^{(1)}=p^{(1)}$. Allora, nei riguardi delle $q_1^{(1)}$ e $q_2^{(1)}$, avremo le equazioni

$$p_1^{(1)}q_2^{(1)}=u^{(1)}\quad,\quad p_2^{(1)}q_1^{(1)}=v^{(1)}\,. \tag{11}$$

Si osservi, infine, che, avendosi $u^{(1)}v^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$, resulterà evidentemente $p_1^{(1)}q_2^{(1)}\cdot p_2^{(1)}q_1^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$, cioè $p^{(1)}q_1^{(1)}q_2^{(1)}=p^{(1)}q^{(1)}$. Da cui, qualora $p^{(1)}$ non sia nulla, segue $q_1^{(1)}q_2^{(1)}=q^{(1)}$. Invece, nel caso speciale della $p^{(1)}$ nulla, avremo (essendo w_1 diversa da zero) nulla la $v^{(1)}$, e quindi $u^{(1)}=\mathrm{D}$, sicchè $p_1^{(1)}$ sarà anche allora diversa da zero, mentre $p_2^{(1)}$ sarà nulla, avendosi $p_1^{(1)}p_2^{(1)}=p^{(1)}$. Per cui, in cotesto caso speciale, la seconda delle (11) diventa un' identità, mentre la $q_1^{(1)}q_2^{(1)}=q^{(1)}$, anzichè una conseguenza di precedenti resultati, sarà l'equazione da accoppiarsi con la $p_1^{(1)}q_2^{(1)}=u^{(1)}$.

Ora, operando sulle $y^{(1)}$ la sostituzione

$$\begin{cases} y_1^{(1)}=y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)}=p_1^{(2)}y_2^{(2)}+p_2^{(2)}y_3^{(2)} \\ y_3^{(1)}=q_1^{(2)}y_2^{(2)}+q_2^{(2)}y_3^{(2)} \\ y_j^{(1)}=y_j^{(2)}\quad (j=4\,,5\,,\ldots,n), \end{cases}$$

ed indicando con $p_{22}^{(2)}$ e $p_{33}^{(2)}$ i coefficienti rispettivi di $y_2^{(2)}$ ed $y_3^{(2)}$ nel sistema trasformato, avremo

$$p_{22}^{(2)}+p_{33}^{(2)}=p_{22}^{(1)}+p_{33}^{(1)}\,,$$

ovvero

$$p_{22}^{(2)}+p_{33}^{(2)}=p_{22}^{(1)}+p_{33}\,,$$

giacchè $p_{33}^{(1)}=p_{33}$. Analogamente proseguendo, avremo

$$p_{33}^{(3)}+p_{44}^{(3)}=p_{33}^{(2)}+p_{44}\,;\ \text{ecc.}$$

Sicchè, denotando, col sistema (5), l'ultimo sistema, al quale conducono quelle successive trasformazioni, resulterà

$$q_{11} = p_{11}^{(1)}, \; q_{22} = p_{22}^{(2)}, \ldots, \; q_{nn} = p_{nn}^{(n-1)} .$$

Ora, osservando che

$$q_{11} + q_{22} + \cdots + q_{nn} = p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn}$$

rappresenta, in virtù delle precedenti considerazioni, l'unica condizione, alla quale devono soddisfare le q_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, resulta chiaramente che, qualora sussista la (4), si può sempre ottenere che nel sistema (5) tutte le q_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ siano negative.

Infine, qualora, in corrispondenza del sistema (5), resulti soddisfatto qualcuno dei criterî da me dati, le soluzioni del sistema stesso saranno certamente stabili e, quindi, tali saranno anche quelle del sistema (1), giacchè la stabilità non si perde attraverso sostituzioni lineari a coefficienti costanti.

Matematica. — *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.* Nota di R. Gateaux, presentata dal Socio V. Volterra.

I. — Préliminaires.

Désignons par Ω l'ensemble des fonctions réelles $z(\alpha)$ de la variable réelle α définies et continues pour $0 \leq \alpha \leq 1$ et telles que $o \leq z(\alpha) \geq 1$.

Soit $U|[z]|$ une fonctionnelle définie, réelle et bornée dans Ω. Nous nous proposons de déterminer une *fonctionnelle d'ordre n d'approximation de* $U|[z]|$, c'est-à-dire une fonctionnelle $V|[z]|$ d'ordre n, telle que, si $V'|[z]|$ est une autre fonctionnelle d'ordre n, on ait:

$$\text{maximum}\,|U|[z]| - V|[z]|| \leq \text{maximum}\,|U|[z]| - V'|[z]|| .$$

On voit immédiatement qu'on peut se borner aux fonctionnelles d'ordre n réelles et c'est ce que nous ferons par la suite.

Lemme. — *Tout ensemble de fonctionnelles d'ordre n bornées dans leur ensemble dans Ω est compact: c'est-à-dire que de toute infinité d'entre elles on peut extraire une suite tendant (uniformément ou non) vers une limite.*

D'après un théorème de M. Fréchet (*Sur quelques points du calcul fontionnel*, n° 19, Circolo matematico di Palermo, 1906), il suffit pour cela que les fonctionnelles de l'ensemble soient bornées et également continues en toute fonction z.

La première condition est satisfaite par hypothèse. Quant à la seconde, on démontre sans difficulté que les fonctionnelles de l'ensemble sont également continues dans tout le champ Ω.

II. — Existence et propriétés des fonctionnelles d'ordre n d'approximation.

Théorème. *Toute fonctionnelle* $U|[z]|$ *définie, réelle et bornée dans* Ω *admet une fonctionnelle d'ordre n d'approximation.*

Utilisant le lemme précédent, on établit ce théorème par la méthode qu'a exposée M. Borel pour les fonctions d'une variable (*Fonctions de variables réelles*, page 82).

Théorème. *Il existe des fonctionnelles* $U|[z]|$ *admettant plusieurs fonctionnelles d'ordre* n *d'approximation, même si ces fonctionnelles* $U|[z]|$ *sont assujetties à être uniformément continues.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème correspondant démontré par M. Tonelli (Annali di Matematica pura ed applicata, 1908), pour les fonctions continues de deux variables qui sont des fonctionnelles uniformément continues particulières. L'exemple suivant est plus simple que celui qu'a formé M. Tonelli.

Rappelons d'abord une remarque de cet auteur. Soit la fonctions $F(x,y)$ définie et continue pour $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Soit $\overline{y}$ une valeur particulière de y, $\Pi_n(x)$ le polynome de degré n d'approximation de $F(x, \overline{y})$, μ le maximum de $|F(x, \overline{y}) - \Pi_n(x)|$.

Soit $\Pi_n(x, y)$ un polynome de degré n d'aproximation de $F(x, y)$ et μ' le maximum de $|F(x, y) - \Pi_n(x, y)|$.

On a nécessairement $\mu' \geq \mu$. Il en résulte que si, par un moyen quelconque, on trouve un polynome $P(x,y)$ de degré n tel que $|F(x, y) - P(x, y)| \leq \mu$, $P(x, \gamma)$ est nécessairement un polynome de degré n d'approximation.

Venons maintenant à notre exemple. Nous allons définir, dans le domaine $a \leq x \leq b$, $o \leq y \leq 1$, une fonction continue $F(x, y)$ admettant plusieurs polynomes de degré n d'approximation.

Soient $f(x)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$ et qui ne soit pas un polynome de degré n ; $\Pi_n(x)$ son polynome de degré n d'approximation ; μ le maximum de $|f(x) - \Pi_n(x)|$. Posons :

$$F(x, y) = f(x) + y[\Pi_n(x) - f(x)] .$$

Considérons les polynomes de degré n :

$$\Pi_n(x, y) = \Pi_n(x) + \lambda y .$$

Il suffit de former la différence $F(x, y) - \Pi_n(x, y)$ pour constater que son module reste inférieur ou égal à μ tant que $|\lambda| \leq \mu$. Tous les polynomes $\Pi_n(x, y)$ pour lesquels $|\lambda| \leq \mu$ sont donc d'approximation.

Continuité de la correspondance. — Si la correspondance entre une fonctionnelle bornée et ses fonctionnelles d'ordre n d'approximation n'est pas univoque, elle est en un certain sens continue:

Théorème. *Soient* $U_1|[z]|, \dots, U_p|[z]|, \dots$ *une suite de fonctionnelles bornées dans* Ω *et tendant uniformément vers la fonctionnelle* $U|[z]|$. *Soient* $W_1^{(n)}|[z]|, \dots, W_p^{(n)}|[z]|, \dots$ *des fonctionnelles d'ordre* n *d'approximation de* $U_1, \dots, U_p, \dots$. *Cette suite* $W_p^{(n)}$ *admet au moins un élément limite et chacun de ses éléments limites est une fonctionnelle d'ordre* n *d'approximation de* $U|[z]|$. *De plus les approximations obtenues pour* $U_1, \dots, U_p, \dots$ *tendent vers une limite égale à l'approximation obtenue pour* U.

Les fonctionnelles bornées U_p tendant uniformément vers une limite sont bornées dans leur ensemble et U est également bornée. Par suite les $W_p^{(n)}$ sont aussi bornées dans leur ensemble; elles forment un ensemble compact d'après le lemme du début, c'est-à-dire qu'elles admettent au moins un élément limite.

Soit $W^{(n)}|[z]|$ un de ces éléments limites. Ce ne peut être qu'une fonctionnelle d'ordre n. Je dis qu'elle est d'approximation pour U.

De la suite $W_p^{(n)}$ j'extrais une suite tendant vers $W^{(n)}$; ou encore je puis supposer que c'est la suite $W_p^{(n)}$ qui tend vers $W^{(n)}$. Soient μ_p le maximum de $|U_p|[z]| - W_p^{(n)}|[z]||$ et μ la plus petite limite des nombres μ_p.

Je démontre qu'il ne peut exister une fonctionnelle d'ordre n donnant de $U|[z]|$ une approximation inférieure à μ. Car une telle fonctionnelle donnerait pour certaines grandes valeurs de p une meilleure approximation de U_p que $W_p^{(n)}$.

Je démontre ensuite que $W^{(n)}$ donne pour U une approximation égale à μ. C'est donc une fonctionnelle d'approximation.

Enfin je démontre que la suite μ_p, ou toute autre suite analogue, a un seule valeur limite égale à μ. Car si une telle suite admettait une valeur limite $\mu' > \mu$, on pourrait en extraire une autre suite admettant μ' comme plus petit élément limite; alors le raisonnement de l'avant-dernier paragraphe montrerait qu'on ne peut pas obtenir pour U une approximation égale à $\mu < \mu'$. Ou bien une telle suite admettrait une valeur limite $\mu'' < \mu$; alors le raisonnement du dernier paragraphe montrerait qu'on peut obtenir pour U une approximation égale à $\mu'' < \mu$. Ces deux conclusions sont également absurdes.

III. — Application à la représentation de certaines fonctionnelles.

Soit $U|[z]|$ une fonctionnelle qui soit dans Ω limite d'une suite de fonctionnelles d'ordres entiers, la convergence étant uniforme dans tout le champ Ω.

Soient $W^{(1)}|[z]|, \ldots, W^{(p)}|[z]|, \ldots$ une suite de fonctionnelles d'ordres $1, \ldots, p, \ldots$ d'approximation de $U|[z]|$.

Le raisonnement employé dans le cas des fonctions d'une variable montre que cette suite converge uniformément vers U. De plus toute autre suite de fonctionnelles d'ordres $1, \ldots, p, \ldots$ fournissent pour U des approximations inférieures ou égales à celles que fournissent les fonctionnelles correspondantes de la suite $W^{(p)}$.

Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrispondente Francesco Severi.

Les involutions doublement infinies, appartenant à une surface algébrique, possèdent un nombre infini ou un nombre fini de points unis. Les involutions jouissant de cette dernière propriété ont été l'objet, ces derniers temps, de plusieurs travaux.

MM. Enriques et Severi d'une part (1), MM. Bagnera et De Franchis d'autre part (2), ont étudié les involutions appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard; ensuite, M. Enriques a étudié les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un (3); enfin, j'ai considéré les involutions de genres zéro et de bigenre un existant sur une surface également de genres zéro et de bigenre un (4). Toutes ces involutions possèdent une propriété commune: elles sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. J'ai observé récemment que cette propriété pouvait s'étendre aux involutions appartenant à une surface algébrique quelconque, pourvu qu'elles ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. C'est ce résultat que je me propose d'exposer ici. D'une manière plus précise, j'établirai que:

Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis, cette involution est

(1) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* Acta Mathematica (1909), vol. XXXII, pag. 283; vol. XXXIII, pag. 321 (Prix Bordin, 1907).

(2) *Le superficie algebriche le quali ammettono...* Memorie della Società dei XL (1908), ser. 3a, vol. XV, pag. 251.

(3) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. R. Accad. di Bologna, 1909-1910, pag. 71. Le théorème établi par M. Enriques dans cette Note m'a permis de classer toutes les iuvolutions de genres un appartenant à une surface de genres un. L'ordre de ces involutions ne peut être que 2, 3, 4, 6, 8 ou 12. Un Mémoire sur ce sujet paraîtra prochainement dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

(4) *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ [Bull. de la Soc. Math. de France (1913), tom. XLI, pag. 178]; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ [Bulletin de l'Acad. Romaine (1913), tom. II, pag. 65].

engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

En d'autres termes, je démontrerai que les points d'un groupe de l'involution dépendent rationnellement de l'un d'entre eux.

Si nous examinons les démonstrations du théorème de MM. Enriques et Severi, de celui de M. Enriques et du mien, nous voyons qu'elles procèdent toutes suivant les mêmes lignes générales. Je procéderai ici de la même manière.

Etant donnée, sur une surface algébrique, une involution (doublement infinie) I_n, d'ordre $n\,(> 2)$, douée d'un nombre fini de points unis, nous considérons, sur cette surface, un système continu complet $\{C\}$. Désignons par K les courbes transformées des courbes C au moyen de la correspondance $(n-1\,,n-1)$ déterminée par I_n entre les points de la surface.

Nous supposons, en premier lieu, que les courbes K sont irréductibles; et nous démontrons que ces courbes K sont comprises dans un système complet dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$. Il suffit alors d'utiliser une extension du raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (¹) pour être conduit à une absurdité.

Le même procédé permet de démontrer que les courbes K sont précisément réductibles en $n-1$ courbes. Le théorème que nous avons en vue, s'établit dès lors sans difficulté.

1. Soit F une surface algébrique sur laquelle il existe une involution I_n, d'ordre $n\,(> 2)$, doublement infinie, n'ayant qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis.

Considérons, sur la surface F, un système continu complet, $\{C\}$, irréductible, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) Les points unis de I_n ne sont pas des points-base de $\{C\}$.

b) Le système $\{C\}$ n'est composé ni avec I_n, ni avec une involution avec laquelle I_n serait elle-même composée.

c) La dimension de chacun des systèmes linéaires $|C|$ contenus dans $\{C\}$ est au moins égale à un.

Il existe évidemment une infinité de systèmes de courbes satisfaisant à ces trois conditions. Il suffit, par exemple, de prendre un système simple, sans points-base, de dimension suffisamment grande.

En général, un groupe de I_n ayant un de ses points sur une courbe C générique, n'a pas un second point sur cette courbe. Il ne pourra y avoir exception que pour un nombre fini, α, de groupes de I_n; ceux-ci auront deux de leurs points sur une courbe C générique.

La correspondance symétrique $(n-1\,,n-1)$, définie par I_n entre les points de F, transforme une courbe C en une courbe K. Chaque groupe de

(¹) Loc. cit., (1), première partie, à partir du 6ième alinéa de la pag. 334.

I_n, dont un point se trouve sur C, a $n-1$ autres points sur K. Ces groupes de $n-1$ points forment une γ'_{n-1}.

À un couple de points de C appartenant à un même groupe de I_n, correspondront $n-2$ points doubles de K. Cette courbe K aura donc $(n-2)\alpha$ points doubles (variables).

Lorsque C décrit le système $\{C\}$, K décrit un système continu ayant un certain nombre de points-base (aux points fondamentaux de I_n et aux conjugués, par rapport à I_n, des points-base éventuels de $\{C\}$) et $(n-2)\alpha$ points doubles variables.

2. Supposons les courbes K irréductibles. Sous cette hypothèse, nous allons démontrer que les courbes K sont les courbes totales d'un système continu complet, plus ample que $\{C\}$.

Considérons un système linéaire complet $|C|$ de $\{C\}$. Les courbes K, homologues des courbes de $|C|$, forment un système rationnel non linéaire, puisque $n>2$, et dont la dimension, égale à celle de $|C|$, est au moins égale à un d'après l'hypothèse *c*). D'après un théorème de M. Enriques [1], ces courbes K appartiennent totalement à un système linéaire $|K|$, dont la dimension surpasse nécessairement celle de $|C|$. Observons, de plus, que la courbe générique du système $|K|$ n'a pas de points doubles variables [2], mais que $|K|$ possède les mêmes points-base (avec les mêmes multiplicités) que le système rationnel formé par les courbes K homologues des courbes de $|C|$.

Lorsque $|C|$ décrit le système continu $\{C\}$, le système $|K|$ décrit un système continu $\{K\}$ (que nous supposerons complété, s'il le faut) qui contient, comme courbe totale, toute courbe K homologue d'une courbe C et dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$.

Si les courbes K *sont irréductibles, elles sont les courbes totales d'un système continu complet* $\{K\}$ *dont la dimension surpasse celle de* $\{C\}$ *et dont la courbe générique n'a pas de points doubles variables.*

3. Nous montrerons actuellement que les deux propriétés:

A) $\{K\}$ *irréductible et* (par suite) *de dimension supérieure à celle de* $\{C\}$,

B) $\{C\}$ *n'ayant pas de points-base qui soient des points unis de* I_n *et* (par suite) *une courbe* C *ne contenant pas, en général, des points unis de* I_n,

sont incompatibles. On en déduira que les courbes K sont réductibles.

[1] *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche.* Rendiconti di Palermo (1896), vol. X, pag. 30.

[2] Voir Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (n. 5). Memorie della Società dei XL (1896), ser. 3ª, vol. X, pag. 1.

Pour démontrer cette incompatibilité, nous utiliserons le raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [1], en l'étendant un peu.

Considérons une courbe $\overline{K}$ de $\{K\}$ qui ne soit pas la conjuguée d'une courbe de $\{C\}$, ce qui est possible en vertu de la propriété A). Soit L la courbe engendrée par les $n-1$ points des groupes de I_n dont le $n^{\text{ième}}$ point se trouve sur $\overline{K}$. Lorsque la courbe $\overline{K}$ varie d'une façon continue dans le système $\{K\}$ de manière à se réduire à une courbe K_1 conjuguée d'une courbe C_1 de $\{C\}$, la courbe L se réduit à la courbe composée $(n-2)K_1 + C_1$. Observons que lorsque la courbe $\overline{K}$ se sera réduite à K_1, elle aura en général acquis certains points doubles: c'est-à-dire que la connexion de la surface de Riemann $\overline{K}$ s'abaisse en se réduisant à K_1.

Supposons la courbe L irréductible, et indiquons par $x_1, x_2, \dots, x_n$, les n points d'un groupe variable de I_n. Pour fixer les idées, supposons que x_2 soit le point situé sur $\overline{K}$, $x_1, x_3, \dots, x_n$, étant les $n-1$ points situés sur L.

Puisque la courbe L est irréductible, on peut faire décrire à x_2, sur la courbe $\overline{K}$ (envisagée comme surface de Riemann), un cycle $\overline{\sigma}$ tel que, sur L, x_1 et x_3 soient échangés entre eux. Lorsque $\overline{K}$ se réduit à K_1, un des points $x_1, x_3, \dots x_n$, par exemple x_1, se trouve sur C_1, les $n-2$ autres étant sur K_1. Mais cette réduction s'opérant d'une manière continue, la propriété de x_1, x_3 d'être échangés lorsque x_2 décrit un certain cycle sur $\overline{K}$, doit être conservée. Deux cas peuvent se présenter:

1) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur K, devient, sur $\overline{K}_1$, un cycle σ non homologue à zéro. Lorsque x_2 décrit σ, x_1, qui se trouve sur C_1, et x_3, qui se trouve sur K_1, doivent s'échanger. Cela ne peut se produire que si C_1 possède des points unis de I_n [2]: ce qui n'a pas lieu en général, en vertu de la propriété B).

2) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur $\overline{K}$, se réduit, sur K_1, à un point P. Ce point P est nécessairement un des points doubles que $\overline{K}$ acquiert lorsque cette courbe se réduit à K_1, c'est-à-dire, d'après la construction du système $\{K\}$, un des points doubles variables des courbes K homologues des courbes C. Le groupe de I_n comprenant P, possédera donc deux points P_1, P_2, communs aux courbes C_1, K_1. Or, si nous faisons décrire à x_2 sur la courbe K_1 (envisagée comme surface de Riemann) un cycle infiniment petit σ autour de P, x_1, qui se trouve sur C_1, et x_3, qui se trouve sur K_1, devront s'échanger. Cette échange ne pourra se faire qu'en l'un des points P_1 ou P_2. Par conséquent, l'un de ces points sera un point uni de l'involution I_n. La courbe C_1 contiendrait donc une point uni de I_n, ce qui n'a pas lieu en général [propriété B)].

(1) Loc. cit. (5).
(2) Loc. cit. (1), première partie, pag. 335.

Nous voyons donc que les propriétés A) et B) sont contradictoires si L est supposée irréductible. Il faut donc que L soit réductible de telle manière que l'on ne puisse pas faire décrire à x_2, sur $\overline{K}$, un cycle tel que x_1 et x_3 soient échangés. Il faut donc que L contienne une partie X, lieu de x_1 se réduisant à C_1 lorque $\overline{K}$ se réduit à K_1. Et cela est encore vrai même si l'involution I_n possède des points fondamentaux unis [1].

La courbe X varie sur F d'une manière continue, et doit se réduire à une courbe de $\{C\}$. Mais ce système continu $\{C\}$ est complet: donc X appartient à ce système. La courbe X étant une courbe C, la courbe $L - X + \overline{K}$ doit être une courbe totale de $\{K\}$. Cela est absurde, car X n'étant qu'une partie de L, $\overline{K}$ serait à la fois courbe partielle et courbe totale de $\{K\}$. Cette absurdité prouve que les propriétés A) B) sont incompatibles, que L soit réductible ou non. Les courbes K ne peuvent donc être irréductibles.

Les courbes K *sont réductibles.*

4. Supposons que les courbes K soient réductibles, mais en un nombre de courbes inférieur à $n-1$. Alors, une de ces composantes, K', sera le lieu de plusieurs points appartenant à un même groupe, variable, de I_n.

Dans ces conditions, on démontrera, en suivant le raisonnement fait plus haut, que le système $\{K'\}$, complet, comprenant les courbes K' comme courbes totales, a la dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Le raisonnement de MM. Enriques et Severi, répété comme ci-dessus, conduira alors à une absurdité. Par conséquent:

Les courbes K *se décomposent en* $n-1$ *courbes.*

5. Considérons un système linéaire $|C_1|$, triplement infini, contenu dans un système continu complet $\{C_1\}$ satisfaisant aux mêmes conditions que le système $\{C\}$ dont il a été question ci-dessus. Les courbes qui correspondent aux courbes C_1 au moyen de la correspondance $(n-1, n-1)$ déterminée sur F par I_n, se décomposent donc en $n-1$ parties que nous désignerons par $C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points d'un groupe générique de I_n qui ne sont ni l'un ni l'autre des points-base de $|C_1|$. Considérons les courbes de $|C_1|$ passant par le point x_1. Elles forment un réseau que nous indiquerons par Σ_1. Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_n$, conjuguées des courbes C_1 de Σ, passent respectivement par les points $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et engendrent des systèmes doublement infinis que nous désignerons par $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$.

Deux des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ ne peuvent coïncider. En effet, cela ne pourrait se présenter que dans deux cas:

1) Σ_1 coïncide avec l'un des autres Σ, par exemple avec Σ_2.

[1] Loc. cit. (1), première partie, pag. 336.

2) Deux systèmes Σ différents de Σ_1, par exemple Σ_2 et Σ_3, coïncident.

Dans le premier cas, les courbes de Σ_1 passeraient par le point x_2, ce qui est impossible par construction.

Dans le deuxième cas, les courbes C_2 de Σ_2 passeraient par x_3, et celles C_3 de Σ_3 par x_2. Cela ne peut arriver pour un point x_1 générique, car alors, lorsque x_1 décrirait une courbe C_1, les courbes C_2, C_3 correspondantes coïncideraient, et, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, les courbes transformées des C_1 au moyen de I_n ne se décomposeraient pas en $n-1$ courbes.

Nous avons donc n systèmes doublement infinis *distincts*: $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$.

Considérons un groupe générique de I_n, et soit y_1 un point quelconque de ce groupe. Indiquons par H_1 le faisceau des courbes C_1 passant par y_1.

Les courbes de Σ_2, homologues des courbes C_1 de H_1, passent par un certain point du groupe de I_n considéré. Nous indiquerons par y_2 ce point et par H_2 le système ∞^1 formé par les courbes C_2 homologues des courbes C_1 de H_1. De la même manière, nous désignerons par $y_3, y_4, \dots, y_n$; $H_3, H_4, \dots, H_n$ les autres points et les autres systèmes ∞^1 homologues respectivement de y_1 dans le groupe de I_n considéré, et de H_1 dans les systèmes $\Sigma_3, \Sigma_4, \dots, \Sigma_n$.

Faisons décrire au point y_1, sur la variété réelle V à quatre dimensions qui représente la surface F dans le sens de Riemann, un cycle quelconque. Les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ varieront respectivement dans les systèmes *distincts* $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, et, par suite, ne coïncideront jamais. Donc, après un chemin quelconque décrit par y_1 sur V, les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ ne subissent aucun changement. Par suite, les points $y_2, y_3, \dots, y_n$ dépendent rationnellement de y_1. Notre théorème est ainsi complétement démontré.

Matematica — *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

1. Nel ristretto spazio che ho potuto concedere alla mia Nota recante lo stesso titolo della presente, inserita nel vol. XXII, pp. 275-282 (2° semestre 1913) di questi Rendiconti, non hanno trovato posto le applicazioni ad esempii concreti dei due teoremi di unicità enunciati alla fine della Nota stessa. In questi ultimi tempi mi si è dimostrata l'opportunità di far conoscere quelle applicazioni, in seguito a che, come mi fece osservare il professore Fubini, sarà soltanto resa palese tutta la portata di quei teoremi, presentemente abbastanza riposta. In questa breve Nota mi permetto appunto di mostrare le applicazioni sopraddette. Si vedrà che, in forza dei citati teo-

remi, sarà possibile dare esempii, oltre i notissimi, di equazioni ellittiche lineari alle derivate parziali del second'ordine, per le quali vale il teorema di unicità relativo agli integrali che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso che può illimitatamente estendersi come ad esso consente, per esempio, la sola condizione di essere tutto contenuto in un angolo [1].

Mi limito a considerare le equazioni ellittiche, per le quali, com'è noto, ogni teorema di unicità nei problemi dei valori al contorno è anche, sotto speciali ipotesi ulteriori per il relativo campo, un teorema d'esistenza; ma le considerazioni che farò, offrono anche altrettanti teoremi di unicità relativi agli integrali di un'equazione parabolica lineare alle derivate parziali del second'ordine, che prendono valori assegnati sopra il contorno di un campo connesso.

2. Sia data l'equazione ellittica

$$(\mathrm{I})\qquad \mathrm{L}(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \\ + 2h\frac{\partial z}{\partial x} + 2k\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{A}z = f,$$

per la quale supponiamo definiti i coefficienti in un certo campo $\boldsymbol{\Gamma}$ del piano x, y, *tutto al finito*, avente nel suo interno il punto origine delle coordinate, e le funzioni

$$a, b, c, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial y}, h, k, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}, \mathrm{A}, f,$$

finite e continue in tutto $\boldsymbol{\Gamma}$, mentre ivi è sempre

$$a > 0 \;,\; c > 0 \;,\; ac - b^2 > 0 .$$

Enunciamo il teorema di unicità, stabilito nella mia Nota citata, relativo agli integrali dell'equazione (I) assoggettati a prendere valori assegnati sopra il contorno c di un campo connesso C di $\boldsymbol{\Gamma}$.

TEOREMA DI UNICITÀ. — *Sia $\varphi(x, y)$ una funzione arbitaria definita in tutto $\boldsymbol{\Gamma}$, ivi finita e continua colle sue derivate φ_x e φ_y, mentre la φ_y vi si mantiene sempre diversa da zero; poniamo*

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \chi ,$$

e indichiamo con θ una funzione sempre positiva in $\boldsymbol{\Gamma}$, per la quale ivi risulti

$$(1)\qquad a \geq \theta \quad,\quad c \geq \theta\chi^2 \quad,\quad (a-\theta)(c-\theta\chi^2) - (b+\theta\chi)^2 \geq 0 .$$

[1] I teoremi finora conseguiti in proposito, sono relativi a campi intieramente contenuti entro una striscia, entro un quadrato, entro una corona circolare ecc.; cfr. il n. 3 della mia Nota citata.

Posto, inoltre,

$$t = -\theta\chi ,$$

indichiamo con m il minimo della funzione

$$\alpha(x, y) = e^{\int_0^x \frac{\theta_x(s, y) + t_y(s, y)}{\theta(s, y)} ds} ,$$

e con M *un numero positivo non inferiore al massimo dell'altra funzione*

$$\beta(x, y) = \frac{1}{\theta}\left(A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y}\right) e^{\int_0^x \frac{\theta_x(s, y) + t_y(s, y)}{\theta(s, y)} ds} .$$

Si ha allora che: dato un campo connesso C *di* Γ, *se il primo e l'ultimo punto d'incontro di ogni curva* $\varphi = cost.$ *che invade* C, *col contorno* c *di* C, *limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sopra l'asse* x *non supera la quantità*

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{m}{M}} ,$$

è unico in C *l'integrale dell'equazione ellittica* $L(z) = f$ *che su* c *prende valori prescritti.*

Per maggiore chiarezza, facciamo vedere come sia possibile, lasciando alla χ completa arbitrarietà tra le funzioni finite e continue in Γ, costruire una funzione positiva θ ivi verificante le diseguaglianze (1). Basterà per ciò prendere per θ una funzione sempre positiva nel campo Γ e ivi sempre minore di entrambi i minimi delle due funzioni

$$a \ , \ \psi = \frac{ac - b^2}{a\chi^2 + 2b\chi + c} ,$$

certamente non nulli nel campo Γ che abbiamo supposto finito.

Nell'ipotesi, che converrà in seguito considerare, in cui Γ si estende all'infinito, la funzione θ esisterà qualora si ammetta pei coefficienti a, b, c, quello speciale comportamento all'infinito, secondo il quale le due funzioni a e ψ si mantengono discoste da *zero* più di un termine assegnato σ. In quest'ipotesi, per Γ, non si potrà neppure assegnare arbitrariamente la funzione $\varphi(x, y)$ e i rimanenti coefficienti h, k, A; si dovrà soddisfare alla condizione che la funzione $\alpha(x, y)$ si mantenga pur essa discosta dallo *zero* più di un termine assegnato m, e che la funzione $\beta(x, y)$ non superi un numero fisso M.

Dall'enunciato teorema di unicità segue che, nel caso che sia, in Γ,

$$A - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} = H(x, y) \leq 0 ,$$

il campo C non deve soddisfare ad alcuna condizione affinchè per esso valga il teorema; si potrà invero prendere allora per M una variabile positiva infinitesima. Ciò è notissimo; pertanto, nel sèguito, sottintenderemo che *la funzione* $H(x, y)$ *prenda sempre, in* Γ, *anche valori positivi.*

3. Ciò premesso, per una maggiore comprensione del teorema di unicità del numero precedente, consideriamo le sue conseguenze in qualche caso particolare. Cominciamo dal più interessante; e prendiamo per funzione φ la seguente:

$$y + \frac{x^2}{2k};$$

solchiamo cioè il campo Γ con la famiglia Φ di parabole eguali

$$y + \frac{x^2}{2k} = h,$$

di parametro k aventi l'asse delle y per comune asse. Si avrà $\chi = \frac{x}{k}$. Prendiamo per θ una *costante* positiva, minore di entrambi i minimi nel campo Γ (*supposto finito*) delle funzioni

$$a \; , \; \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ay^2 + 2kbx + ck^2};$$

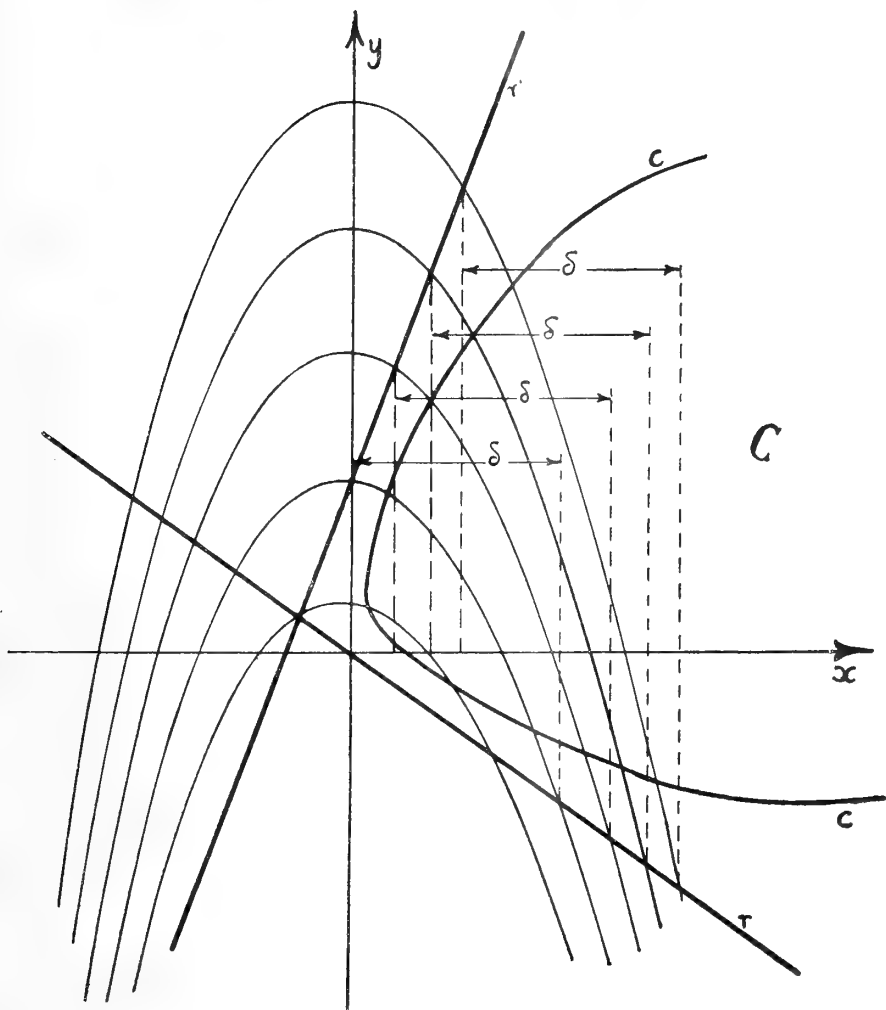
risulterà $\alpha(x, y) = 1$, $\beta(x, y) = \frac{H}{\theta}$. Designamo con N il massimo, in Γ, della funzione $H(x, y)$; in forza del nostro teorema di unicità potremo affermare che:

Dato un campo C di Γ, se il primo e l'ultimo punto di incontro di ogni parabola Φ che invade C, nel contorno c di C, limitano su questa un arco la cui proiezione ortogonale sull'asse x non supera la quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{N}}$, è unico in C l'integrale dell'equazione (I) che su c prende valori prescritti.

È molto semplice la costruzione di campi C presentanti la particolarità indicata nel teorema precedente. A tal uopo (ved. figura) conduciamo la retta r per l'origine di equazione $y = \gamma x$, e consideriamo tutte le parabole Φ che la incontrano. Sopra ognuna di queste parabole fissiamo per senso positivo di percorso quello, secondo cui deve procedere un osservatore, che cammini sul piano x, y, percorrendo la parabola in guisa che il relativo fuoco giaccia sempre alla sua sinistra.

Se, dopo ciò, a partire da un punto d'incontro P_h di ogni parabola $\varphi = h$ della retta r, stacchiamo sulla parabola, nel verso positivo, un segmento di essa, $P_h P'_h$, la cui proiezione ortogonale sull'asse x è misurata dalla costante δ, subito si vede che il luogo dei punti P'_h è una seconda

retta r'. Ed invero, detta ξ l'ascissa di P'_h, sarà $\xi + \delta$ quella di P_h; e si avrà perciò:

$$\gamma(\xi + \delta) = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k}.$$

Ne segue, per l'ordinata η di P'_h, il valore

$$\eta = h - \frac{\xi^2}{2k} = h - \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} + \frac{(\xi + \delta)^2}{2k} - \frac{\xi^2}{2k} = \gamma(\xi + \delta) + \frac{\delta}{2k}(2\xi + \delta);$$

il luogo dei punti P'_h è pertanto la retta r' di equazione

$$y = \left(\gamma + \frac{\delta}{k}\right)x + \gamma\delta + \frac{\delta^2}{2k}.$$

Ne segue che: *il campo C soddisferà alle volute condizioni per la validità del teorema di unicità, semplicemente se* (ved. figura) *è tutto contenuto in uno dei due angoli delle rette* r, r' *solcati dai segmenti di parabola* $P_h P_h'$.

Il coefficiente angolare della retta r è in nostro arbitrio; scegliamolo perciò in guisa che i nominati due angoli opposti al vertice abbiano il loro massimo valore. Occorre e basta perciò porre $\gamma = -\frac{\delta}{2k}$; e allora le rette r e r' assumono rispettivamente le equazioni

$$(r) \quad y = -\frac{\delta}{2k} x \quad , \quad (r') \quad y = \frac{\delta}{2k} x :$$

passano cioè entrambe pel punto origine delle coordinate, e riescono ugualmente inclinate sull'asse delle x. L'angolo da esse compreso sarà poi *acuto*, *retto*, *ottuso*, secondochè

$$\delta < 2k \quad , \quad \delta = 2k \quad , \quad \delta > 2k .$$

Possiamo pertanto enunciare il semplicissimo teorema di unicità:

Indichi k *una costante positiva, e* θ *un'altra costante positiva minore di entrambi i minimi, in* Γ, *delle funzioni*

$$a \ , \ \psi = \frac{k^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bkx + ck^2} ;$$

sia poi N *il massimo, in* Γ, *della funzione* $H(x, y)$: *per ogni campo* C *di* Γ, *tutto contenuto in uno degli angoli delle due rette* $\bar{r}$, $\bar{r}'$,

$$(\bar{r}) \quad y = -\frac{\pi}{2k}\sqrt{\frac{\theta}{N}}\, x \quad , \quad (\bar{r}') \quad y = \frac{\pi}{2k}\sqrt{\frac{\theta}{N}}\, x ,$$

attraversati dall'asse delle x, vale il teorema di unicità relativo agli integrali dell'equazione (I) *che prendono sul contorno valori prescritti.*

Consideriamo il caso, particolarmente interessante, in cui il campo Γ sia tutto il piano xy, e i coefficienti dell'equazione (I) vi siano definiti in modo che esista sempre una costante positiva θ minore di entrambi i limiti inferiori, in tutto il piano, delle funzioni a e ψ, ed esista un numero positivo N che si mantenga maggiore dei valori di $H(x, y)$; varrà sempre allora il teorema di unicità per campi C soggetti, ad esempio, alla sola condizione d'essere contenuti in uno degli angoli delle rette $\bar{r}$, $\bar{r}'$, attraversati dall'asse delle x. Osserviamo che, fissato k e quindi θ, l'apertnra dell'angolo $(\bar{r}, \bar{r}')$, in cui deve essere contenuto il campo C, dipende dai valori di N, ed essa aumenta e tende ad essere di 180° col diminuire del limite superiore N di $H(x, y)$. Comunque, purchè N sia finito, riusciamo

a costruire campi C, per cui vale il teorema di unicità, *suscettibili di estendersi illimitamente nelle infinite direzioni contenute in un angolo.*

4. Confrontiamo le condizioni ora imposte al campo C con quelle che, anche nelle speciali ipotesi ultimamente fatte pei coefficienti dell'equazione (I), vengono ad esso imposte nei teoremi di unicità finora conseguiti.

Facciamo, per semplicità, il confronto avendo supposto $b = 0$. È ben noto (cfr. il n. 3 della mia Nota citata), il teorema:

Se a e c sono funzioni sempre positive in tutto il piano aventi entrambe ivi limiti inferiori non nulli, e θ' designa una costante positiva minore di questi limiti, mentre N è un numero positivo che non viene mai superato da $H(x, y)$, per ogni campo C contenuto in una striscia di larghezza non superiore a $\pi \sqrt{\frac{\theta'}{N}}$, è unico l'integrale dell'equazione

$$(I') \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c \frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2h \frac{\partial z}{\partial x} + 2k \frac{\partial z}{\partial y} + Az = f,$$

che sul contorno di C prende valori prescritti.

Se a e c, oltre ad avere limiti inferiori non nulli, sono tali che anche la funzione

$$\psi = \frac{k^2 ac}{ax^2 + ck^2} = \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{a}} > \frac{k^2}{\frac{x^2}{c} + \frac{k^2}{\theta'}},$$

ha limite inferiore non nullo, per il che occorre e basta che $\frac{x^2}{c}$ si mantenga inferiore ad un termine assegnabile [sia ad esempio $c = \theta' + x^2 c'(x . y)$, con $c'(x, y) \geq \sigma > 0$], si potrà anche applicare il teorema di unicità ottenuto al num. precedente; ed è evidente quanta maggiore libertà di estendersi esso consenta al campo C.

5. Il metodo seguìto al n. 3, si può adottare, com'è ben evidente, nell'esame delle conseguenze del teorema di unicità enunciato al n. 2 in moltissime altre ipotesi che sulla funzione arbitraria $\varphi(x, y)$ si possono fare. Offre interesse la considerazione della famiglia Φ di catenarie

$$y + k \cosh \frac{x}{k} = h;$$

si avrà $\chi = \operatorname{senh} \frac{x}{k}$, e se, nell'ipotesi che il campo Γ sia tutto il piano, supponiamo inoltre non nulli i limiti inferiori delle funzioni

$$a, \ \psi = \frac{ac - b^2}{a \operatorname{senh}^2 \frac{x}{k} + 2b \operatorname{senh} \frac{x}{k} + c},$$

e finito il limite superiore di H, si giunge per il campo C a condizioni ancora meno restrittive della sua libertà di estendersi illimitatamente in varie direzioni. Nelle ipotesi del n. 3, il coefficiente c dalla (I) deve avere all'infinito un tal comportamento da risultare il rapporto $\frac{x^2}{c}$ limitato superiormente, qui il coefficiente c deve invece crescere all'infinito dell'ordine (almeno) di un esponenziale, per modo che il rapporto $\operatorname{senh}^2 \frac{x}{k} : c$ risulti limitato superiormente.

Considerando la famiglia Φ di cerchi concentrici

$$x^2 + y^2 = h^2 ,$$

bisognerà limitarsi a quella parte di Γ che è tutta al disopra della retta $y = \varepsilon$ (ε costante positiva), o tutta al disotto della retta $y = -\varepsilon$. Si ha $\chi = \frac{x}{y}$, per cui, se il campo Γ è tutto il piano e vogliamo applicare il nostro teorema di unicità a campi C situati ovunque nel semipiano $y \geq \varepsilon$, dobbiamo supporre che le funzioni

$$a \;,\; \psi = \frac{y^2(ac - b^2)}{ax^2 + 2bxy + cy^2} ,$$

abbiamo, per $y \geq \varepsilon$, limiti inferiori non nulli (ne seguirà il rapporto $x^2 : cy^2$ limitato superiormente). Sarà possibile allora la determinazione della costante positiva θ, e si avrà

$$\alpha = e^{\frac{x^2}{2y^2}} \;,\; \beta = \frac{H}{\theta} e^{\frac{x^2}{2y^2}} ,$$

se dunque, inoltre, i rimanenti coefficienti h, k, A dell'equazione sono tali che il prodotto $He^{\frac{x^2}{2y^2}}$ non superi un numero positivo N, per un campo C del semipiano $y \geq \varepsilon$, il cui contorno stacchi su ogni cerchio Φ (che lo incontra) un arco di proiezione ortogonale sull'asse x non superiore alla quantità $\delta = \pi \sqrt{\frac{\theta}{N}}$, vale il teorema di unicità. Ne segue in particolare che: *Per ogni campo* C *tutto contenuto nella porzione dell'angolo retto* $y \geq \varepsilon$, $x \geq -\frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2\delta}$, *limitata dalla retta* $y = \varepsilon$ *e dalla parabola*

$$y^2 = 2\delta x + \delta^2 + \varepsilon^2 ,$$

vale il teorema di unicità.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota III di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le ricerche sperimentali riferite nelle mie due precedenti Note su questo argomento ([1]) mettono così chiaramente in evidenza l'analogia, d'altronde ben nota, che passa tra l'isteresi elastica e l'isteresi magnetica, che il lettore non avrà mancato di istituire spontaneamente un parallelo fra il concetto di deformazione permanente e quello di magnetizzazione residua.

Tale parallelo richiederebbe, per essere svolto a fondo, il tracciamento sperimentale di cicli bilaterali (cioè compresi fra limiti di forza di segni contrarii) che le nostre macchine per le prove dei materiali non permettono assolutamente di eseguire. Nei limiti puramente qualitativi che fin dal principio ho imposto alla mia indagine, il fenomeno può però essere approfondito nel modo seguente.

Uno dei soliti fili di rame, il quale, per un lungo periodo di tempo, aveva servito alle più svariate esperienze, rimanendone energicamente incrudito, venne, il 2 febbraio 1914, assoggettato ad un carico variabile gradualmente (in ragione di circa 50 kgr. al minuto primo), alternativamente in senso crescente e decrescente, fra i seguenti limiti:

$$1200\ ,\ 100\ ,\ 1000\ ,\ 300\ ,\ 800\ ,\ 500\ ,\ 600\ \text{kgr.}$$

Un tale trattamento può facilmente concepirsi come risultante dalla sovrapposizione di un primo carico il quale, raggiunti i 600 kgr., si sia mantenuto costante durante tutto il resto dell'esperienza, e di un altro sforzo, che diremo, per intenderci, addizionale, il quale varii fra i seguenti valori:

$$+600\ ,\ -500\ ,\ +400\ ,\ -300\ ,\ +200\ ,\ -100\ ,\ 0\ \text{kgr.}$$

alternativamente positivi e negativi, e tali che la differenza tra il valore assoluto di uno qualunque di essi ed il valor assoluto del successivo sia una costante positiva.

Il comportamento del materiale si può rilevare così dalla tabella numerica allegata, come dal diagramma disegnato con tratto continuo nella parte sinistra della fig. 1; esso ha questo di interessante, che basta a caratterizzare completamente lo stato in cui il materiale si viene a trovare alla fine di questa prima fase (preparatoria) dell'esperienza, nel senso che le

([1]) Presentate, per la pubblicazione in questi Rendiconti, nelle sedute del 1° e del 15 febbraio 1914.

leggi generali, che ho già avuto precedentemente occasione di enunciare (Nota II), bastano da sole a determinare in qual modo il materiale dovrà deformarsi al variare ulteriore del carico applicato. Ed invero, sia che detto carico prenda a crescere, sia che esso prenda a diminuire, debbono man mano chiudersi successivamente tanti cicli quanti durante le operazioni precedenti ne son rimasti di aperti: in altri termini, le due curve di deformazione che si possono descrivere facendo crescere lo sforzo addizionale fino a + 600 kgr., ovvero facendolo decrescere fino a — 600 kgr., debbono contenere tutti i

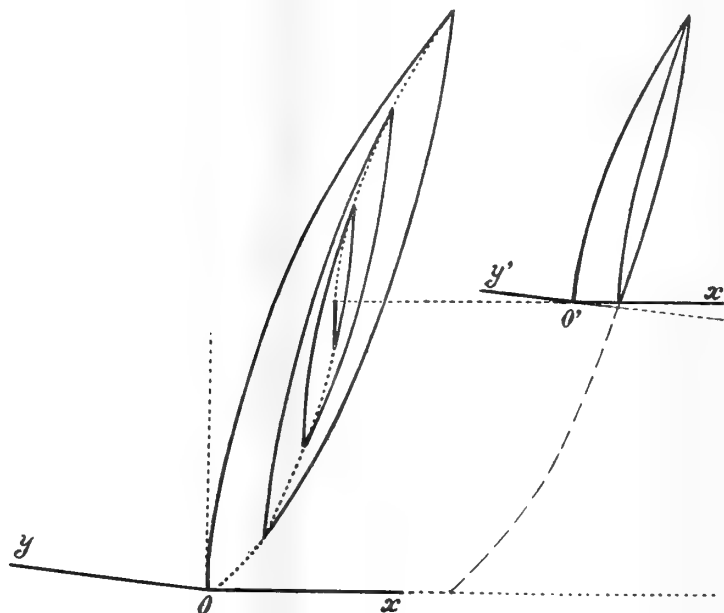



Fig. 1.

successivi punti di regresso corrispondenti rispettivamente ai massimi ovvero ai minimi valori che il carico ha toccati nelle trasformazioni suddescritte, epperò debbono necessariamente presentare l'andamento indicato mediante punteggiate nella figura.

L'esperienza, eseguita nel senso dei carichi crescenti, ha completamente confermato queste previsioni, fornendo valori della deformazione praticamente coincidenti con quelli osservati alla fine delle varie operazioni di carica realizzate durante il periodo preparatorio.

La curva di deformazione che così si ottiene non è più pertanto una delle solite curve limiti di un ciclo chiuso: essa presenta, a fronte di quelle, una curvatura assai più sentita, e ricorda, nel suo andamento generale, quella che abbiamo a suo tempo convenuto di chiamare la curva di prima deformazione. Nè è da credersi che si tratti soltanto di una semplice somiglianza di forma: si riscontra qui un vero e proprio rinnovarsi di quei medesimi

fenomeni che caratterizzano il comportamento del materiale quando esso vien cimentato per la prima volta. Il cappio ottenuto facendo variare lo sforzo addizionale da 600 kgr. a 0 e viceversa (riferito, nella parte destra della figura 1, ai due nuovi assi x' ed y', la cui origine O′ rappresenta lo stesso speciale stato di deformazione in cui il materiale si trovava alla fine della prima fase dell'esperienza), presenta infatti immutate tutte le caratteristiche dei processi di prima deformazione di cui ci siamo occupati nella Nota I, tanto per ciò che concerne l'esistenza delle deformazioni permanenti, quanto

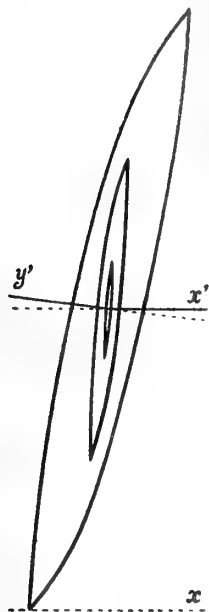



Fig. 2.

per ciò che riguarda l'intervento di quelle speciali modificazioni, nella deformabilità del materiale, che si sono allora denotate col nome generico di incrudimento.

Senonchè questo incrudimento ci si presenta questa volta completamente giustificato dallo specialissimo trattamento a cui il materiale è stato in precedenza assoggettato. Ed è poi facile constatare che la stessa deformazione permanente non è qui altro che una semplice manifestazione dei fenomeni di isteresi: se infatti si attribuiscono al carico addizionale valori negativi, la deformazione (intesa sempre contata a partire dallo stato in cui il materiale si trovava alla fine della fase preparatoria) si annulla ben presto [1],

[1] L'intensità della *forza coercitiva* non raggiunge, nel caso concreto, i 10 kgr.

poi diviene a sua volta negativa, raggiungendo una grandezza eguale a quella della massima deformazione positiva precisamente quando il carico addizionale diviene eguale a — 600 kgr. [1].

Il comportamento del materiale che ha subìto la preparazione dianzi descritta, per quanto in sostanza non differisca da quello che si riscontra nei saggi presi allo stato naturale, cessa pertanto di essere un fatto di eccezione, per rientrare nell'àmbito delle leggi generali che regolano i processi di deformazione per cicli chiusi.

Alcune esperienze successive mi hanno permesso di riconoscere che la diversa velocità con cui le operazioni sopra descritte potevano venir realizzate, se influiva sull'entità numerica dei singoli risultati, non alterava però menomamente l'andamento generale dell'esperienza. A questo proposito mi sono sembrati particolarmente degni di essere qui ricordati alcuni cicli (fig. 2) presentanti tutti i caratteri della bilateralità, che io ho rilevati il 10 febbraio ultimo scorso operando nel solito modo sullo stesso spezzone, dopo di avergli fatte subire tutte le trasformazioni di cui consta la fase preparatoria con la massima velocità che la macchina permette di realizzare quando si rinuncia ad apprezzare le deformazioni, velocità che è di almeno 100 volte più grande di quella adottata nelle esperienze del 2 febbraio.

[1] Riprendendo l'esperienza dal principio si verrebbe a realizzare, in un caso anche più generale, quel processo di eliminazione delle deformazioni per alternazioni decrescenti che il Cantone utilizzò sistematicamente nelle sue già citate ricerche.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali		(1)	(2)	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2 febbraio	9	0	834	—	1893	—	—	0		—
»		100	939	+ 105	2021	+ 128	+ 233	233		+ **2.33**
»		200	1060	+ 121	2138	+ 117	+ 238	471		+ 2.38
»		400	1299	+ 239	2375	+ 237	+ 476	947		+ 2.38
»		600	1538	+ 239	2618	+ 243	+ 482	1429		+ 2.41
»		800	1779	+ 241	2867	+ 249	+ 490	1919		+ 2.45
»		1000	2025	+ 246	3119	+ 252	+ 498	2417		+ 2.49
»		**1200**	2272	+ 247	3371	+ 252	+ 499	**2916**		+ 2.50
»		1100	2154	— 118	3255	— 116	— 234	2682		— **2.34**
»		900	1917	— 237	3015	— 240	— 477	2205		— 2.38
»		700	1682	— 235	2772	— 243	— 478	1727		— 2.39
»		500	1444	— 238	2529	— 243	— 481	1246		— 2.41
»		300	1204	— 240	2282	— 247	— 487	759		— 2.43
»		100	955	— 249	2033	— 249	— 498	261		— 2.49
»		200	1073	+ 118	2150	+ 117	+ 235	496		+ **2.35**
»		400	1313	+ 240	2386	+ 236	+ 476	972		+ 2.38
»		600	1551	+ 238	2625	+ 239	+ 477	1449		+ 2.39
»		800	1790	+ 239	2870	+ 245	+ 484	1933		+ 2.42
»		**1000**	2029	+ 239	3119	+ 249	+ 488	**2421**		+ 2.44
»		900	1911	— 118	3001	— 118	— 236	2185		— **2.36**
»		700	1679	— 232	2761	— 240	— 472	1713		— 2.36
»		500	1441	— 238	2520	— 241	— 479	1234		— 2.39
»		300	1200	— 241	2274	— 246	— 487	747		— 2.44
»		400	1318	+ 118	2390	+ 116	+ 234	981		+ **2.34**
»		600	1554	+ 236	2630	+ 240	+ 476	1457		+ 2.38
»		**800**	1790	+ 236	2872	+ 242	+ 478	**1935**		+ 2.39
»		700	1674	— 116	2755	— 117	— 233	1702		— **2.33**
»		500	1439	— 235	2516	— 239	— 474	1228		— 2.37
»		**600**	1557	+ 118	2632	+ 116	+ 234	**1462**	0	+ **2.34**
»		700	1673	+ 116	2752	+ 120	+ 236	1698	236	+ 2.36
»		800	1791	+ 118	2873	+ 121	+ 239	**1937**	475	+ 2.39
»		1000	2029	+ 238	3118	+ 245	+ 483	**2420**	958	+ 2.41
»		**1200**	2275	+ 246	3367	+ 249	+ 495	**2915**	**1453**	+ 2.48
»		1100	2157	— 118	3250	— 117	— 235	2680	1218	— **2.35**
»		1000	2040	— 117	3132	— 118	— 235	2445	983	— 2.35
»		800	1801	— 239	2891	— 241	— 480	1965	503	— 2.40
»		600	1564	— 237	2646	— 245	— 482	1483	21	— 2.41

(1) Contata a partire dall'inizio dell'esperienza. — (2) Riferita allo stato speciale in cui il materiale viene a trovarsi alla fine delle operazioni preparatorie descritte al principio di questa Nota.

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali		(1)	(2)	
2 febbraio		700	1681	+ 117	2764	+ 118	+ 235	1718	256	**+ 2.35**
»		800	1798	+ 117	2885	+ 121	+ 238	1956	494	+ 2.38
»		1000	2038	+ 240	3125	+ 240	+ 480	2436	974	+ 2.40
»		**1200**	2277	+ 239	3367	+ 242	+ 481	**2917**	**1455**	+ 2.41
»		1100	2159	— 118	3251	— 116	— 234	2683	1221	**— 2.34**
»		1000	2040	— 119	3134	— 117	— 236	2447	985	— 2.36
»		800	1804	— 236	2890	— 244	— 480	1967	505	— 2.40
»		600	1566	— 238	2646	— 244	— 482	1485	23	— 2.41
»		400	1328	— 238	2401	— 245	— 483	1002	— 460	— 2.42
»		200	1085	— 243	2155	— 246	— 489	513	— 949	— 2.44
»		0	838	— 247	1909	— 246	— 493	20	**—1442**	— 2.47
»	14	0	830	— 8	1903	— 6	— 14	6	**—1456**	—
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10 febbraio	15	**600**	1609	—	2640	—	—		0	—
»		**700**	1725	+ 116	2758	+ 118	+ 234		**234**	**+ 2.34**
»		600	1609	— 116	2641	— 117	— 233		1	**— 2.33**
»		500	1493	— 116	2521	— 120	— 236		**— 235**	— 2.36
»		600	1609	+ 116	2639	+ 118	+ 234		— 1	**+ 2.34**
»		700	1725	+ 116	2758	+ 119	+ 235		**234**	+ 2 35
»		800	1841	+ 116	2877	+ 119	+ 235		469	+ 2.35
»		**900**	1959	+ 118	2997	+ 120	+ 238		**707**	+ 2.38
»		800	1843	— 116	2880	— 117	— 233		474	**— 2 33**
»		600	1609	— 234	2644	— 236	— 470		4	— 2.35
»		400	1376	— 233	2404	— 240	— 473		— 469	— 2 37
»		300	1257	— 119	2284	— 120	— 239		**— 708**	— 2.39
»		400	1375	+ 118	2399	+ 115	+ 233		— 475	**+ 2 33**
»		600	1607	+ 232	2636	+ 237	+ 469		— 6	+ 2.34
»		800	1840	+ 233	2875	+ 239	+ 472		466	+ 2.36
»		900	1958	+ 118	2997	+ 122	+ 240		**706**	+ 2.40
»		1000	2077	+ 119	3118	+ 121	+ 240		946	+ 2.40
»		**1200**	2319	+ 242	3367	+ 249	+ 491		**1437**	+ 2.46
»		1100	2203	— 116	3249	— 118	— 234		1203	**— 2.34**
»		1000	2086	— 117	3130	— 119	— 236		967	— 2.36
»		800	1850	— 236	2892	— 238	— 474		493	— 2.37
»		600	1616	— 234	2650	— 242	— 476		17	— 2.38
»		400	1380	— 236	2408	— 242	— 478		— 461	— 2.39
»		200	1143	— 237	2165	— 243	— 480		— 941	— 2.40
»		0	899	— 244	1912	— 253	— 497		**—1438**	— 2.48

GIORNO	ORA	Sforzo totale Kgr.	SPECCHIO SINISTRO		SPECCHIO DESTRO		Somma delle differenze parziali	Deformazione totale		Incremento della deform. riferito ad 1 kgr. di incremento dello sforzo
			Letture	Differenze parziali	Letture	Differenze parziali		(1)	(2)	
10 febbraio		100	1016	+ 117	2030	+ 118	+ 235		—1203	+ **2.35**
»		200	1135	+ 119	2147	+ 117	+ 236		— 967	+ 2.36
»		400	1371	+ 236	2383	+ 236	+ 472		— 495	+ 2.36
»		600	1606	+ 235	2622	+ 239	+ 474		— 21	+ 2.37
»		800	1843	+ 237	2865	+ 243	+ 480		459	+ 2.40
»		1000	2079	+ 236	3110	+ 245	+ 481		940	+ 2.41
»		1200	2324	+ 245	3360	+ 250	+ 495		**1435**	+ 2.47
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Fisica. — *L'effetto Hall longitudinale nelle leghe ferromagnetiche di rame, manganese, alluminio* (¹). Nota di OTTAVIO BONAZZI, presentata dal Corrisp. A. BATTELLI.

1. È ben noto che la resistenza elettrica dei conduttori cambia quando essi vengono introdotti in un campo magnetico. Tale variazione è molto grande specialmente nel bismuto, e fornisce per questo un mezzo semplice e comodo per la misura dell'intensità di un campo: ma essa riesce sensibile pure, ed è stata misurata, per molti altri metalli, sia in direzione parallela, sia in direzione perpendicolare al campo magnetico.

La teoria elettronica sembra fornirci una facile spiegazione del fenomeno. Infatti le particelle cariche, cui si pensa dovuta la convezione della corrente, sotto l'azione di un campo longitudinale più non percorrono linee rette, ma eliche; e sotto l'azione di un campo trasversale debbono percorrere delle cicloidi. Nell'un caso e nell'altro le linee di corrente hanno entro il conduttore una lunghezza più grande: e ciò porta che la resistenza di questo deve risultare, in ogni caso, aumentata.

2. Ora, le esperienze eseguite coi varî metalli hanno concordemente rivelato un aumento di resistenza nella direzione *parallela* al campo magnetico.

Un risultato altrettanto semplice ed uniforme non si è invece avuto per le misure della variazione di resistenza in direzione *perpendicolare*, ossia

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica dell'Università di Berlino, diretto dal prof. Rubens; completato nell'Istituto di fisica dell'Università di Pisa, diretto dal professore A. Battelli.

— secondo la denominazione di Nernst [1] — per le misure dell'effetto Hall longitudinale. Infatti, mentre per molte sostanze (bismuto, cadmio, zinco, mercurio, carbone, argento, oro, rame, stagno, palladio, piombo, platino, tantalio) è stato trovato anche in questo caso *aumento* di resistenza (fig. 1) (potrebbe dirsi: *effetto Hall longitudinale positivo*), pei metalli ferromagnetici (ferro, acciaio, nichel, cobalto), risultò invece una *diminuzione* di resistenza (*effetto Hall longitudinale negativo*) già nelle ricerche di lord Kelvin del 1856 [2].

Ricerche ulteriori di altri sperimentatori hanno poi mostrato come possa talora ottenersi anche con metalli magnetici un aumento, usando campi sufficientemente deboli. Più precisamente, in certi campioni di ferro e nel nichel (fig. 2) l'effetto Hall longitudinale con campi deboli è positivo; va crescendo col campo fino ad un massimo, oltre il quale decresce e poi si annulla; con

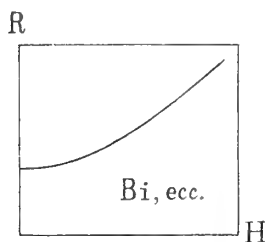
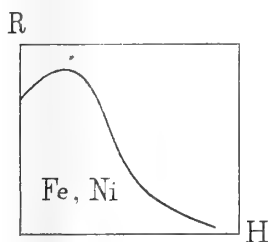
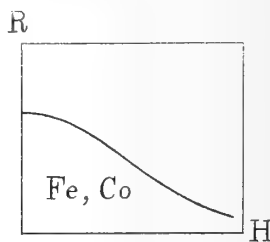



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

campi più intensi diventa negativo [3]. Nel cobalto, e in altri campioni di ferro, si riscontra effetto negativo fin dalle prime misure coi campi più deboli (fig. 3).

La teoria elettronica — come ho accennato — offre diretta spiegazione del solo effetto Hall longitudinale positivo. Viene perciò spontaneo di pensare che l'*aumento* di resistenza sia in ogni caso il modo più genuino di presentarsi del fenomeno; e che il contegno caratteristico dei materiali magnetici sia da attribuirsi alla sovrapposizione di altri fenomeni — talora più intensi del primo e, quindi, capaci di mascherarlo — dipendenti dallo stato di magnetizzazione.

Questi risultati io ho dovuto qui riassumere, onde si possa ben comprendere lo scopo e la portata della ricerca da me eseguita sulle leghe di Heusler.

3. Delle leghe magnetiche composte di rame, manganese, alluminio, scoperte da Heusler, sono state studiate ormai quasi tutte le proprietà fisiche,

(1) Nernst, Ann. der Phys., *31*, 783 (1887).
(2) Thomson, Math. a. Phys. Pap., II, 307.
(3) Grunmach, Ann. der Phys., *22*, 141 (1907).

senza che però si sia potuto concludere in modo abbastanza sicuro sulla causa che provoca le proprietà ferromagnetiche nell'unione di quei tre metalli non ferromagnetici.

Particolarmente importante per tal proposito deve riuscire lo studio di alcune proprietà che sono intimamente connesse coi fenomeni magnetici: quali, ad esempio, l'effetto Joule, l'effetto Hall vero e proprio (trasversale), l'effetto termomagnetico, l'effetto Kerr, e l'effetto Hall longitudinale.

Orbene, di questi fenomeni, i primi quattro erano già studiati anche nelle leghe dl Heusler, e si erano ottenuti i seguenti risultati:

1°) L'effetto Joule è in quesle leghe inverso, ossia — essendosi sperimentato solo con campi abbastanza deboli [1] — è quale si presenta pure nel ferro e nell'acciaio.

2°) Anche in riguardo all'effetto Hall trasversale ed all'effetto termomagnetico [2], le leghe di Heusler si comportano nettamente come gli altri materiali ferromagnetici.

3°) Sembrano invece discostarsene del tutto relativamente all'effetto Kerr [3], il quale in esse non si è potuto rivelare.

Io mi sono proposto di ricercare se le leghe in discorso si schierino, oppure no, col ferro, nichel, cobalto, in rispetto all'effetto Hall longitudinale, ossia in rispetto alla variazione di resistenza elettrica in un campo magnetico trasversale.

E qui riferisco i risultati da me ottenuti.

4. Data la grandissima difficoltà che offre la lavorazione meccanica di queste leghe, ho dovuto limitare la ricerca allo studio di un solo campione, scelto fra tanti come il meno fragile e il più duttile. La sua composizione centesimale, determinata coll'analisi chimica, era:

$$Cu\ 72\ ;\ Mn\ 18\ ;\ Al\ 10\ .$$

Aveva proprietà magnetiche molto spiccate.

Dapprima coll'aiuto di una potente trafila, in seguito col lavoro a mano di un meccanico specialista, si potè ridurre la lega in forma di filo di *un decimo di millimetro* di diametro. Due pezzi di questo filo, lunghi circa 70 cm., furono accoppiati saldandoli insieme ad un estremo, e furono avvolti insieme a spirale piana, isolati fra loro, frapponendo tra le varie spire una strisciolina di carta (fig. 4). Il rocchettino così formato equivaleva dunque all'insieme di due spirali piane, unite in serie pel loro estremo centrale; ed

[1] Austin, Verh. der. deut. phys. Ges., *6*, 211 (1904).
[2] Zahn e Schmidt, Verh. d. deut. phys. Ges., *9*, 98 (1907).
[3] Ingersoll, Phil. Mag., *11*, 41 (1906).

il coefficiente d'induzione di un tal rocchettino per un campo magnetico trasversale (cioè in direzione dell'asse) era addirittura nullo.

Aveva una resistenza di ohm 109,962 a 10°.

5. Introdotto il rocchettino fra i poli di un elettromagnete, ne ho misurato la resistenza con eccitazioni del magnete gradatamente crescenti. In una prima serie di misure ho adoperato, per campi magnetici deboli, una elettrocalamita a due rocchetti verticali, con estremità polari piane, parallele; nella seconda serie di misure, per campi più intensi, ho usato un grosso elettromagnete tipo Weiss, con estremità polari a tronco di cono, del diametro estremo di 20 mm.

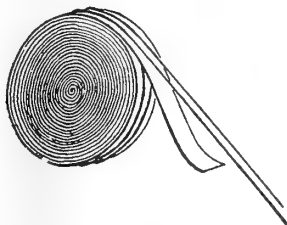



Fig. 4.

In un caso e nell'altro la distanza dei poli era di mm. 5; nell'interstizio fissavo il rocchettino di lega Heusler, col suo asse (lungo mm. 2) nella direzione delle linee di forza del campo.

Ambedue gli elettromagneti erano stati preventivamente campionati per quella data distanza fissa dei loro poli: era stata cioè determinata — mediante le variazioni di resistenza di una spirale di bismuto tarata, di Hartmann e Braun — l'intensità del campo magnetico pei varî valori dell'intensità di corrente eccitante.

Le misure di resistenza sono state eseguite col comune metodo del ponte di Wheatstone. La cifra dei centesimi di ohm venne determinata direttamente; quella dei millesimi fu calcolata per interpolazione dalle due deviazioni che si avevano nel galvanometro in senso opposto, aggiungendo o togliendo un centesimo di ohm.

Le misure con campi intensi dovettero esser fatte ad intervalli di parecchie ore l'una dall'altra, poichè il calore sviluppantesi nell'elettromagnete si propagava ben presto al rocchettino di lega Heusler e ne alterava notevolmente e rapidamente la resistenza in una misura difficile a computarsi. In tal modo però le determinazioni successive venivano fatte con temperatura dell'ambiente — e quindi anche della lega — sensibilmente diversa ogni volta: e perciò i risultati hanno dovuto poi esser ridotti tutti ad un'unica temperatura, che fu quella di 10°.

PRIMA SERIE DI MISURE.

Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm
0	109,962	1820	109,951
300	961	2920	940
720	960	3480	932
1000	959	4960	905
1470	953	5850	890

SECONDA SERIE DI MISURE.

Intensità di corrente nel-l'elettromagnete ampère	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm	Intensità di corrente nel-l'elettromagnete ampère	Intensità del campo magnetico gauss	Resistenza della lega a 10° ohm
0,8	6700	109,872	3,2	18810	109,561
0,9	7630	848	4,4	21140	503
1,1	9160	808	6,3	23590	459
1,2	9870	798	10,3	26760	410
1,4	11150	750	12,4	27770	393
1,7	12950	698	14,4	28500	380
2,0	14500	658	16,5	29080	375
2,5	16680	615	20,9	29940	364

6. I risultati delle due serie di misure sono riportati nelle due tabelle qui unite, e rappresentati nel grafico della figura 5.

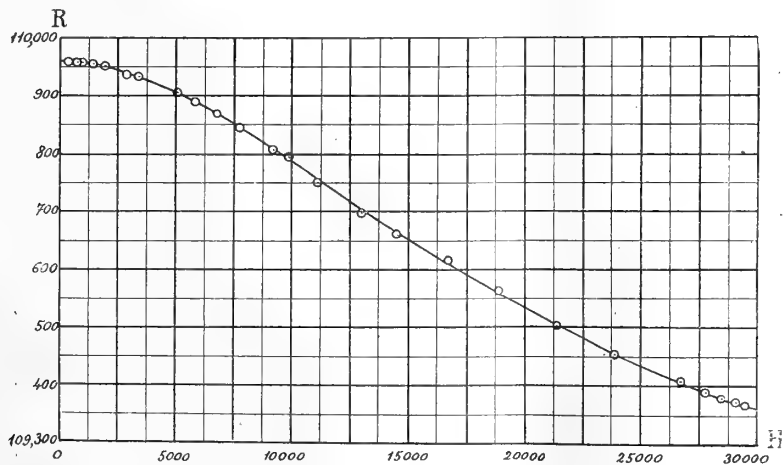



FIG. 5

Noi vediamo dunque che la lega in studio presenta una *diminuzione di resistenza*; diminuzione gradualmente maggiore per campi magnetici via via più intensi. Col campo massimo raggiunto nelle misure, di 30.000 gauss, la diminuzione di resistenza importa 0,6 ohm, corrispondente ad una diminuzione relativa di $5,4 \cdot 10^{-3}$.

Ora, poichè la diminuzione di resistenza per un campo magnetico trasversale, ossia l'effetto Hall longitudinale negativo, è — come ho ricordato prima — caratteristica dei materiali ferromagnetici, noi concludiamo così che anche in riguardo a questo fenomeno le leghe di Heusler possono classificarsi insieme colle altre sostanze ferromagnetiche. Più precisamente, esse si comportano, almeno in modo qualitativo, come il cobalto e come alcuni campioni di ferro.

Non rimane, così, che un solo fenomeno, l'effetto Kerr, che contraddistingue le leghe magnetiche di rame, manganese, alluminio, dagli altri materiali magnetici. Senonchè le esperienze in proposito sono state eseguite finora da un solo sperimentatore; onde, per la loro importanza, meriterebbero ulteriore conferma.

Fisica. — *Intorno ad un condensatore sferico o conico per l'illuminazione laterale nei microscopii.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

I varî condensatori usati in microscopia per l'illuminazione laterale a fondo oscuro, sono costruiti per scopi e condizioni ben determinate e sono destinati principalmente ai medici e naturalisti, ed un fisico in molti casi non può giovarsene.

Dopo aver acquistato parecchi di questi condensatori ed aver trovato ostacolo al loro uso in questo inconveniente, ho cercato di costruirne in modo facile, usando sottili zone sferiche o coniche, tagliate da palloncini o da imbutini (scelti come i più regolari) ed inargentate all'esterno.

Essi erano certo imperfetti (ed inoltre, di solito, le condizioni teoriche d'illuminazione non erano che imperfettamente soddisfatte) però si prestavano a qualsiasi adattamento, dimodochè con un solo di essi ho ottenuto facilmente che fossero visibili così le particelle ultramicroscopiche del vetro rubino d'oro, come le particelle sospese ed in movimento browniano, nei liquidi e nei gaz, ciò che avrebbe richiesto tre diversi condensatori dei soliti e non pochi accessorii.

È chiaro che i condensatori sferici (e specialmente quelli conici) non possono essere usati utilmente con luce parallela. Se ABCD è la sezione meridiana di una sottil zona sferica, i raggi paralleli all'asse, dopo riflessi dall'arco AB, si concentreranno in un breve arco di caustica molto lontano

dall'asse medesimo; lo stesso avverrà per i raggi rifless dall'arco CD e nelle altre sezioni meridiane, e s'otterrà così un anello intensamente illuminato attorno e fuori del campo del microscopio. Essi raggi s'incontrano poi sull'asse in una lineetta alta quanto la zona o più; saranno quindi illuminate molte parti che non si trovano alla distanza conveniente dall'obbiettivo, con diminuzione della luce utile e con produzione di luce diffusa nociva.

In generale, i raggi di luce provenienti da un punto sull'asse e riflessi dall'arco di circonferenza AB non potranno incontrarsi in un punto pure sull'asse. Perchè ciò avvenisse, dovrebbe l'arco di circonferenza poter essere assimilato ad un arco d'ellisse avente per fochi i suddetti due punti; ora ciò non è possibile neppure approssimativamente (ad eccezione del caso che la

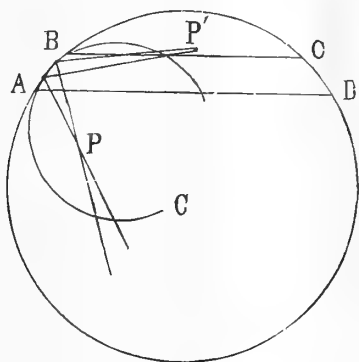



Fig. 1.

zona diventi una calotta), perchè i due archi non hanno lo stesso raggio di curvatura.

Se però si considera che i raggi emessi da un punto P′ sull'asse, dopo riflessi sull'arco di circonferenza brevissimo AB, s'incontreranno approssimativamente in un punto P fuori dell'asse (o, più esattamente, in un breve arco di caustica), si vede che i raggi provenienti dal punto P, dopo riflessi possono concentrarsi reciprocamente in un punto P′ sull'asse ed opportunamente situato.

Riferendosi al paragone dell'arco di circonferenza con quello d'ellisse, si ha che questa, se è soggetta alle condizioni di avere un foco in P′ e di esser tangente all'arco di circonferenza, non è completamente determinata e potrà esser assoggettata alla condizione di avere un triplice punto di contatto coll'arco di circonferenza, e quindi lo stesso raggio di curvatura.

Facendo ruotare, la figura, di 360° attorno all'asse P′C, il punto P′ rimarrà immobile, l'arco AB descriverà la zona sferica ed il punto P descriverà una circonferenza.

Si potrà dunque ottenere che i raggi riflessi dalla zona sferica, nelle varie sezioni meridiane, si incontrino in un punto dato sull'asse, usando come sorgente di luce una circonferenza o sottil anello di raggio determinato, a una distanza determinata, che emetta luce (utilmente) sotto un piccolo angolo in una direzione determinata.

È bensì vero, che ogni punto P di questa circonferenza emetterà anche raggi utili facenti un piccolo angolo colla sezione meridiana su cui esso punto si trova, e questi raggi non saranno concentrati in P'; difatti la zona generata colla suddetta rotazione dell'arco AB di circonferenza o d'ellisse attorno all'asse CP' non può coincidere coll'ellissoide di rivoluzione avente per fochi P e P', (la quale sola ha la proprietà di concentrare in P' i raggi emessi dal punto P), perchè questo ha per asse di rivoluzione PP' e non CP', quindi i due elementi di superficie sferica ed ellissoide attorno ad AB hanno diverso uno dei raggi di curvatura.

Inoltre in pratica non si potrà avere una circonferenza luminosa di spessore nullo, ma invece una fessura circolare che, per quanto sottile, sarà decomponibile in una infinità di anelli concentrici, di spessore infinitesimo, a ciascuno dei quali corrisponderà un diverso punto di concentrazione dei raggi, approssimativamente sull'asse.

In conclusione, i raggi provenienti dalla fessura circolare, per le suddette ragioni, saranno concentrati, invece che in un punto, in uno spazio di piccolissimo diametro e spessore, quest'ultimo tanto minore (finchè la diffrazione è trascurabile) quanto più sottile è la fessura. Siccome, diminuendo lo spessore di questa, si diminuirebbe altresì la quantità di luce che serve per l'illuminazione, sarà utile che la fessura sia di grande diametro e corrispondente spessore, e che di essa si produca una immagine impiccolita, avente il diametro e la posizione e l'inclinazione dei raggi, opportuni.

Il punto P' ove si concentrano i raggi dovrà trovarsi sulla base superiore della zona, un po' al disopra; oppure anche, quando l'obiettivo del microscopio abbia una sufficiente distanza frontale, un po' al disotto; la zona dovrà esser tagliata ad una distanza di circa 45° dalla sezione equatoriale cui è parallela.

Stabilita la posizione del punto P' ove (o attorno al quale) si vogliono concentrati i raggi riflessi dalla zona, per trovare la posizione e il diametro della fessura circolare o della sua immagine e la direzione dei raggi incidenti, ho disegnato sulla carta, in scala ingrandita, la sezione meridiana ABCD della zona, di cui avevo misurato i diametri e la distanza delle basi; ho trovato il centro C della circonferenza di cui ABCD fa parte, ed ho segnato il punto P'.

Condotto pel punto medio M d'incidenza il raggio riflesso P'M, ho tracciato il raggio incidente PM che dà la direzione media di questi raggi; e

per trovare la pozizione del punto P immagine di P′, mi son servito della formula $1/p + 1/p' = 2/R \cos i = 1/f$.

Se sopra M C come diametro, si descrive una circonferenza, essa taglia su P′M e su P M corde uguali di lunghezza $R \cos i$, la cui metà è la distanza focale principale f per l'angolo di coincidenza i. Segnando il punto di coordinate cartesiane f, f' e, per questo punto tracciando una retta che tagli sopra uno degli assi a partir dall'origine un segmento uguale a P′M, il segmento tagliato sull'altro asse avrà la lunghezza cercata P M, in conformità d'un noto procedimento facilmente dimostrabile. Le distanze del punto P dalla base maggiore della zona e dall'asse dànno la posizione ed il raggio della fessura.

A riguardo della direzione dei raggi incidenti, ossia della loro inclinazione media sull'asse della zona, conviene notare che questa inclinazione è nulla se la sorgente di luce è una fessura circolare direttamente illuminata dai raggi solari; mentre, se di questa fessura si produce un'immagine con una lente convergente, l'inclinazione media sull'asse dei raggi partenti da questa fessura avrà per tangente il raggio della fessura diviso per la distanza focale della lente, e quindi una sola di queste due lunghezze può esser scelta arbitrariamente, quando si vuole ottenere una determinata inclinazione.

L'andamento dei raggi riflessi dall'arco A B, la loro concentrazione in P′, la più opportuna altezza della zona riflettente, meglio che colle formule risultano se si costruiscono le caustiche per riflessione del punto P′ o del punto P prodotte dall'arco A B.

A tale scopo ho costruito un semplice strumento costituito da un parallelogrammo articolato insieme con una delle diagonali; questa ruota attorno ad un pernio infisso in C e descrive con una sua estremità l'arco A B, ed i due lati adiacenti rappresentano i due raggi luminosi incidente e riflesso. Una scanalatura nel regolo diagonale lascia scorrere il pernio del vertice opposto a quello che descrive l'arco A B; un'altra scanalatura nel regolo che rappresenta il raggio incidente, fa sì che esso possa scorrere sopra un pernio fisso, che rappresenta il punto luminoso. Tracciando parecchi raggi riflessi successivi, risulta la caustica voluta.

Il ragionamento col quale si stabiliscono le condizioni in cui deve funzionare il condensatore conico, è quello stesso che valse per il condensatore sferico.

Sia A B C D la sezione meridiana di una zona tagliata perpendicolarmente all'asse di un cono retto a base circolare che si suppone riflettente, e si voglia che i raggi riflessi dalla zona si concentrino in un punto P′ sull'asse. Se consideriamo invece P′ come punto luminoso, i raggi che esso emette riflettendosi su A B produrranno in P un'immagine virtuale; ed i raggi che, andando in senso inverso, formerebbero in P un immagine reale, riflettendosi

su AB la formeranno in P'. Facendo ruotare la figura attorno all'asse, P' rimane immobile, AB descrive la zona conica e P descrive una circonferenza.

Se dunque si usa come sorgente di luce una fessura circolare, e di questa, mediante una lente, si produce una immagine avente il diametro e la posizione della suddetta circonferenza, con raggi aventi la debita inclinazione sull'asse, questi, riflettendosi sulla zona, saranno concentrati in P'. Anche in questo caso si sono trascurati i raggi obliqui rispetto alle sezioni meridiane che impediranno la rigorosa concentrazione dei raggi in un punto.

Venendo a qualche particolare di costruzione e di uso di questi condensatori, dirò che quello sferico, che ho quasi sempre usato, era stato tagliato da un palloncino di circa 4 cm. di diametro, dalla parte del collo perchè ivi il vetro era più regolare; era alto 8 mm. e le sue pareti facevano a

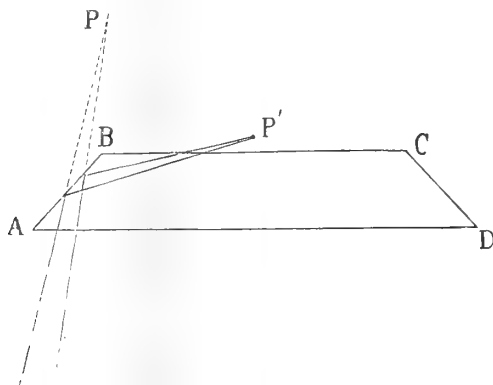



Fig 2.

metà altezza un angolo coll'asse di circa 40°; era stato inargentato e verniciato nel modo solito ed incollato colla base inferiore più larga sopra un disco di vetro da specchi, in mezzo al quale incollai un disco di carta nera di diametro un po' maggiore di quello della base superiore della zona.

Prima che mi fossi reso ben conto delle condizioni teoriche necessarie per ottenere il miglior concentramento dei raggi riflessi, collocai questo condensatore sul piano portaoggetti, avente un foro di circa 4 cm. di diametro d'un sostegno III Zeiss da microscopî, dal quale avevo tolto il condensatore d'Abbe. Facendovi arrivare luce parallela e con un dischetto di carta sottile, constatai che i raggi riflessi producevano su questo un anello brillantissimo e sottile, lasciando però nell'oscurità la parte centrale; questa si restringeva bensì fino a scomparire se sollevavo il disco di carta, ma lo spazio illuminato diveniva molto esteso, sfumato e meno brillante.

Per ottenere che i raggi riflessi fossero meno convergenti, cosicchè il loro punto d'incontro venisse a trovarsi sull'asse delia zona, resi divergenti i raggi incidenti collocando al posto del condensatore d'Abbe una lente negativa (la lente di *flint* d'un obbiettivo di binocolo da teatro) scelta per

tentativi in modo d'ottener l'effetto voluto. Questa disposizione empirica, teoricamente non ottima, è molto semplice e di facile uso. Altri tentativi ho fatto con vario risultato, facendo cadere i raggi riflessi dalla zona sopra una lente emi sferica, colla base in alto. Più opportuno sarebbe stato un disco di vetro con superficie o contorno torico.

In seguito cercai d'avvicinarmi, il meglio che mi fosse possibile, alle condizioni teoriche, e trovai graficamente, nel modo già detto, che la sorgente circolare di luce doveva essere 9 mm. distante dalla base inferiore della zona; e perciò incollai questa sopra un disco di vetro, spesso appunto 9 mm. e sulla faccia inferiore di questo incollai un disco di carta nera di diametro un po' minore di quello teorico. Il condensatore così formato collocai sul piano portaoggetti suddetto; vi produssi sulla faccia inferiore, mediante una lente convergente e giovandomi dello specchio piano del microscopio, l'immagine d'una fessura circolare attraversata dai raggi solari.

Questa era ottenuta col foro a vite, di 10 cm. di diametro, del portaluce, in cui avvitavo un disco d'ottone di 98 mm. di diametro con tre piccole sporgenze simmetriche che entravano nel cavo della vite. La lente convergente deve necessariamente avere un diametro uguale o maggiore di quello della fessura, e, se non fosse acromatica, produrrebbe un'immagine di questa quasi interamente decomposta nei varî colori dello spettro e, perciò, larga e meno brillante.

Feci uso perciò di una doppia lente (da lettura) di 12 cm. di diametro che resi acromatica incollandola sull'armatura e riempiendo l'intervallo di Xilolo reso un po' più dispersivo coll'aggiunta di poco solfuro di carbonio.

Cercai, in seguito, d'ottenere le condizioni migliori d'illuminazione, non più seguendo la teoria ma per tentativi, collocando cioè sul piano porta-oggetti prima un foglio di carta e producendovi un'immagine molto brillante della fessura e del voluto diametro e poi sostituendo alla carta il condensatore e cercando d'ottenere sul dischetto di carta sovrapposto un cerchietto molto ristretto e molto brillante.

L'osservazione delle particelle d'oro nel vetro rubino non presenta difficoltà. Occorre staccare anzitutto dal vetro porta-oggetti, mediante un leggero riscaldamento, il prismetto rettangolare, che viene fornito dalla Casa Zeiss; però, se esso venisse collocato lungo l'asse del condensatore, e illuminato, non sarebbe possibile di veder altro che un'intensa luce verde, perchè lo strato illuminato è troppo spesso. Per evitar ciò e rendere visibili le singole particelle d'oro, ho ricoperto interamente di vernice nera le faccie laterali del prismetto, e con una punta sottile d'ago (o con un bulino) ad $^1/_3$ di millimetro dalla sommità vi ho tracciato tutt'attorno una sottile linea che mettesse a nudo il vetro. Collocando il prismetto nel mezzo del condensatore in modo che i raggi riflessi cadessero su questa linea, le singole particelle riuscirono facilmente visibili con varî ingrandimenti. Ottenni facilmente lo

stesso scopo anche nel modo solito, producendo nel prismetto scoperto l'immagine d'una fessura lontana 3 metri, mediante un obbiettivo fotografico di 32 mm. di diametro e 21 cm. di distanza focale.

Per osservare le particelle di fumo sospese ed in vivo movimento browniano (osservabile anche con mediocre ingrandimento), ho adattato sul condensatore un coperchio d'ottone con un foro centrale chiuso da un vetrino coprioggetti e munito di due tubetti, uno per l'ingresso, l'altro per l'uscita del fumo, p. es., di tabacco, che deve però esser pochissimo denso. Per evitare la luce diffusa da tutte le particelle che non sono nel campo del microscopio o alla conveniente distanza, il fondo del campo del microscopio era formato da un foro in una scatola d'ottone colle pareti annerite, dimodochè lo strato occupato dal fumo, e illuminato, era molto sottile.

Però, a causa della vastità dello spazio occupato dal fumo, in questo si formavano correnti, dimodochè le particelle, oltre al movimento browniano, avevano un movimento comune di traslazione.

Per evitare ciò, ho anche fatto entrare il fumo in un tubetto di vetro, cilindrico, colle pareti verticali, chiuso superiormente da un vetrino coprioggetti e collocato nell'interno del condensatore.

Per l'osservazione delle particelle sospese nei gaz sarebbe utile che i raggi riflessi del condensatore fossero orizzontali o anche (se non si richiede un forte ingrandimento e, quindi, una grande distanza frontale) diretti verso il basso, perchè quelli diretti verso l'alto attraversano il vetrino coprioggetti e cadendo sull'armatura dell'obbiettivo, producono facilmente una diffusa e nociva illuminazione del campo.

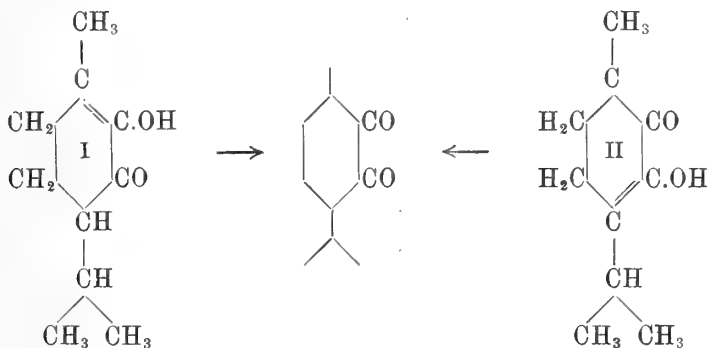
Finalmente per l'osservazione delle particelle colloidali in sospensione nei liquidi ho riempito completamente il condensatore di un liquido che non sciogliesse la colla delle congiunzioni, petrolio, xilolo o anche, per breve tempo, acqua distillata. In questi casi non sarebbe necessario che la zona fosse inargentata, perchè vi si produrrebbe riflessione totale; (il condensatore sferico o conico potrebbe essere di vetro massiccio). Ricoprii il condensatore col suo coperchio con foro centrale chiuso da un vetrino coprioggetti; su questo collocai una goccia del liquido da osservare e, su questa, un secondo vetrino coprioggetti (impedivo che i due venissero a contatto, collocandovi presso l'orlo tre pezzetti di stagnola sottile o mica o foglia d'oro). L'osservazione si faceva nel modo solito, con un obbiettivo a secco.

Anche col suddetto condensatore, a causa della intensa illuminazione che esso produce, è utile di sostituire lamine di quarzo ai vetrini coprioggetti.

Un anello molto luminoso (i cui raggi sono concentrati approssimativamente in un punto dal condensatore sferico) può ottenersi facendo riflettere i raggi solari, resi convergenti da una lente, sopra un tubetto di vetro inargertato di 1 o 2 cm. di diametro, coassiale colla lente e collocato presso al foco.

Chimica-fisica. — *Sullo spettro d'assorbimento ultravioletto della Buccocanfora* [1]. Nota di Mario Mayer, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

La buccocanfora, chetone idroaromatico che si estrae dalle foglie del Bucco (*Barosma crestata*, fam. *Rutaceae*), ha la costituzione corrispondente alla formola I

```
        CH3                                      CH3
         |                                        |
         C                    |                   C
  CH2 /     \ C.OH          /   \ CO       H2C /     \ CO
   |    I    |      --->   |     |   <---   |    II    |
  CH2 \     / CO            \   / CO       H2C \     // C.OH
        CH                    |                   C
         |                   / \                  |
        CH                                       CH
       /  \                                     /  \
    CH3   CH3                                CH3   CH3
```

ossia quella di un 6-ossimenten-5-one, com'è stato già dal 1906 dimostrato da Semmler e Mc Kenzie, e recentemente anche dal Cusmano [2]. Allo scopo di spiegare un comportamento anomalo di questa sostanza, e precisamente la sua inattività ottica, che non si accorda con la assimmetria molecolare di detto composto, è stata invocata da Cusmano e Poccianti [3] la possibilità della coesistenza, in soluzione, del composto corrispondente alla formola I con un altro isomero, la cui struttura sarebbe data dalla formola II.

L'investigazione spettrochimica delle soluzioni alcooliche della buccocanfora sintetica, che è racemica come lo è la naturale, ha reso anche probabile questa ipotesi, inquantochè la presenza di una banda di assorbimento nello spettro ultravioletto estremo, propria di questa sostanza, rende facile l'ammettere in questo caso, come in consimili conosciutissimi nella letteratura sull'argomento [4] un equilibrio in soluzione fra due forme isomere corrispondentemente a due composti di formole I e II.

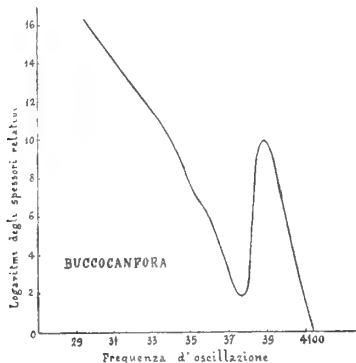
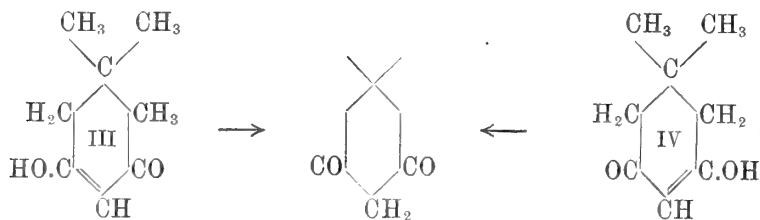
[1] Lavoro eseguito nello Stabilimento fotomeccanico e fotochimico dell'ing. A. Alinari di Firenze.

[2] Semmler e Mc Kenzie, Ber., *39*, 1158 (1906); Cusmano, questi Rendiconti, *22* (5) II, 569 (1913).

[3] Questi Rendiconti, *23* (5) I, 347 (1914).

[4] Smiles, *Relation between Chemic. constit. and. physic. properties.* London, 1910 pag. 339 e segg.

Recentemente anche Gilling (1), studiando la dimetiltetraidroresorcina ha ottenuto un chetoalcool III il cui comportamento spettrochimico fa am-

mettere, nelle soluzioni di questo composto, un equilibrio fra le forme isomere rappresentate in struttura dalle formole III e IV. Il Gilling non ha pubblicato però ancora i resultati numerici delle sue ricerche spettrochimiche. I nostri, che hanno servito alla costruzione della curva qui annessa alla presente Nota, potrebbero condurre anche ad un'altra interpretazione. La banda persistente situata fra 3700 e 3800 di ascissa corrisponde ad una delle curve del benzene (Smiles, loc. cit., pag. 391); quindi non si può *con sicurezza* affermare che essa sia *esclusivamente* dovuta all'equilibrio molecolare al quale è stato accennato più sopra.

Accennerò qui brevemente alla tecnica sperimentale seguìta in questa ricerca, tecnica che non differisce molto da quella comunemente usata con tanto successo dalla scuola inglese.

Spettrografo. — Lo spettrografo usato fu costruito dalla ditta Steinheil di Monaco; agisce mediante tre prismi di quarzo. L'immagine dello spettro viene fotografata in una camera fotografica del formato di cm. 13 × 18, e munita di dispositivo per eseguire quattro fotografie in serie sulla medesima lastra sensibile.

Sorgente luminosa. — Si adoperò una lampada ad arco alimentata dalla corrente stradale continua a 150 volt, convenientemente abbassata da

(1) Trans. Chem. Soc. London, *103*, 2030, dec. 1913.

una resistenza adatta. Il polo positivo era costituito da una bacchetta di carbone ordinario da lampada imbevuta di cloruro ferrico e poi arroventata alla soffieria come consiglia il Piutti [1]. Per polo negativo servì un cilindretto di ferro di diametro uguale alla bacchetta di carbone. I due poli formavano fra di loro un angolo di circa 100°.

Materiale fotografico. — Dovendo eseguire fotografie solamente per lo studio della regione violetta ed ultravioletta dello spettro, si usarono comuni lastre di media sensibilità, e precisamente quelle etichetta verde di M. Cappelli. Lo sviluppo fu eseguito con il metolo idrochinone in soluzione alcalina.

La luce dell'arco, funzionante a circa 10 amp., era sufficiente per eseguire delle pose cortissime, come 5 minuti secondi per lo spettro di confronto del ferro, e 15 secondi in media per le fotografie eseguite intercalando fra la fenditura e l'arco lo strato di 60 mill. di soluzione alcoolica di buccocanfora.

Soluzioni. — Queste furono racchiuse nel tubo a spessore variabile di Baly e Desch [2] con finestre di quarzo [3] di un centimetro di diametro circa. Le finestrine furono masticiate al tubo di vetro, lungo circa 8 cm., mediante soluzione di colla di pesce in acido acetico glaciale.

Per lo studio spettrochimico della buccocanfora servì una soluzione N/4 della sostanza (corrispondente alla soluzione satura del composto in alcool alla temperatura di 15°, ossia gr. 4,2 per 100), ed un'altra 10 volte più diluita, ossia N/40.

Furono fotografati gli assorbimenti corrispondenti ai seguenti spessori di strato di soluzione:

N/4 60 mill.—40—20—10
N/40 60—40—20—5.

I limiti della banda d'assorbimento e quelli dell'assorbimento generale nell'ultravioletto estremo furono stabiliti in base al confronto con un arco campione di emissione, preventivamente studiato, della sorgente luminosa impiegata.

Rappresentazione grafica. — Il grafico qui annesso è stato costruito prendendo come ascisse le inverse delle lunghezze d'onda, ossia le frequenze di oscillazione e come ordinate, non i logaritmi dei millimetri di strato di cui era stato fotografato l'assorbimento, ma i logaritmi degli *spessori relativi.* Questi si ottengono dividendo il numero dei millimetri degli strati fotografati per quello dell'ultimo strato — che non presenta più assorbi-

[1] Questi Rendiconti, (5), *22*, II, 195 (1913).
[2] Trans. Chem. Soc. London, *85*, 1039 (1904).
[3] Ringrazio qui la ditta Carl Zeiss di Jena che mi ha fornito le due laminette di quarzo necessarie.

mento — su cui si sperimenta: nel nostro caso quindi 5 mill. di soluzione N/40.

L'esame del grafico rivela appunto la presenza di una banda di assorbimento il cui massimo coincide colla frequenza 3750, ossia la lunghezza d'onda 268 $\mu\mu$, oltre al solito assorbimento dell'ultravioletto estremo che presentano una grandissima quantità di sostanze organiche incolore.

Se questa banda si deve attribuire *solamente* alla presenza del nucleo benzenico, il resultato sperimentale al quale si giunge non è meno interessante. La buccocanfora è ancora un fenolo: derivato quindi del benzene. Il suo comportamento chimico è quello di un fenolo: forse allora la banda notata ci esprime appunto la presenza di ancora un *frammento attivo* del nucleo benzenico nella molecola.

Ad ogni modo queste osservazioni intorno al comportarsi chimico-fisico di questo singolare composto, oggetto di questa Nota, sono, a parer mio, di una certa importanza. Infatti ci mettono, fra l'altro, in guardia contro possibili interpretazioni unilaterali [1], e ci avvertono che qualche volta non si può concludere, col solo esame spettroscopico, nulla di preciso intorno alla costituzione di certi composti.

Chimica-fisica. — *Sullo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcooliche di santonina e di suoi derivati in presenza di alcali* [2]. Nota di M. Mayer, presentata dal Corrisp. A. Garbasso.

1. Oggetto della presente Nota è lo studio spettrochimico della colorazione rosso-violacea che dànno le soluzioni alcooliche di santonina in presenza di potassa caustica, nonchè di quella verde che dà la diidrosantonina nelle medesime condizioni [3] e di una simile presentata dalle ossisantonine [4] in soluzione alcoolica addizionata di etilato sodico.

La tecnica sperimentale seguìta per lo studio spettroscopico di tali reazioni è identica a quella descritta da me in un' altra Nota, pubblicata in questi Rendiconti [5], alla quale rimando per i particolari e per la interpretazione delle curve tracciate. Solamente, furono usate lastre sensibili Cappelli etichetta verde, ortocromatizzate in un bagno di pinacromo all' 1 $^0/_{00}$. Questa sensibilizzazione è più che sufficiente per poter fotografare tutto lo spettro

(1) Cfr. Knorr, Lieb. Ann., *306*, 85 (1898).

(2) Lavoro eseguito nello Stabilimento fotomeccanico e fotochimico dell' ingegnere A. Alinari in Firenze.

(3) Cusmano, questi Rendiconti (5), *22*, I, 507 (1903).

(4) Id., Rend. Soc. chim. ital., 1914, pag. 1.

(5) Anno 1914 (5), *23*, I, pag. 439.

nell'aranciato e anche un po' nel rosso; quindi bastante al mio scopo. Le pose date furono, di necessità, un po' più lunghe di quelle per lastre ordinarie, ma non oltrepassarono mai i 45 minuti secondi.

2. Le soluzioni adoperate per lo studio spettrochimico dei su citati composti furono le seguenti:

a) Santonina incolora: N/20 e N/100 in alcool; rispettivamente gr. 1,33 e 0,246 per 100.

b) Diidrosantonina: N/500 e N/2500 in alcool; rispettivamente gr. 0,0496 e 0,0099 per 100.

c) Ossisantonine fusibili a 156° e a 212°: N/50 e N/500 in alcool; rispettivamente gr. 0,525 e 0,0525 per 100.

Tutte queste soluzioni sono perfettamente incolore e, a parte quelle di santonina, inalterabili alla luce. Però, se ad esse si addiziona un po' di alcali caustico, in capo ad alcuni minuti si nota una spiccata colorazione rosa-violacea per le soluzioni di santonina, una *fluorescenza* giallo-verdastra per quelle di diidrosantonina, ed una simile, una più rossastra, e più lenta ad apparire, per le ossisantonine. Queste ultime richiedono, in generale, l'addizione di etilato sodico quale alcali.

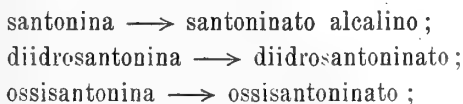
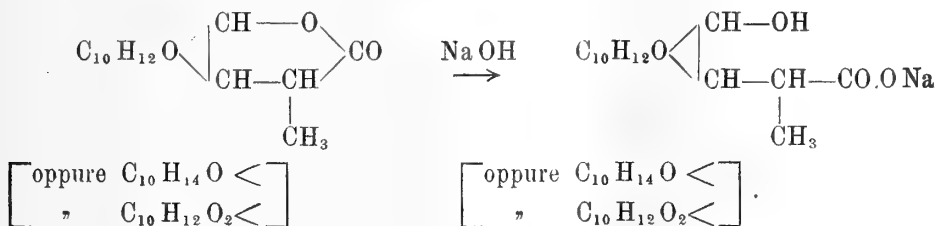
3. Queste varie colorazioni permangono, in generale, assai poco. Le prime soluzioni a scolorarsi sono quelle delle due ossisantonine isomere: quella N/50, in capo ad un quarto d'ora, torna ad esser incolora. Le soluzioni verdi di diidrosantonina resistono anche un'ora e più; quelle rosacee di santonina si scolorano molto lentamente, e, dopo due o tre ore, assumono una colorazione giallastra che si attenua dopo lungo tempo.

In tutti e tre i casi, l'azione della potassa caustica, e dell'etilato sodico, si ammette esser molto semplice e procedere in modo simile: si apre l'anello lattonico caratteristico della santonina, e si forma il santoninato alcalino corrispondente: e cioè:

santonina $\longrightarrow$ santoninato alcalino;
diidrosantonina $\longrightarrow$ diidrosantoninato;
ossisantonina $\longrightarrow$ ossisantoninato;

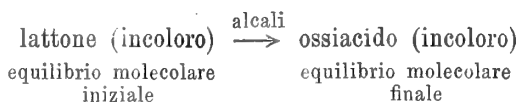
ossia, in istruttura,

$$C_{10}H_{12}O\left\langle\begin{array}{l}CH-O\\CH-CH\\\quad\;\;|\\\quad\;\;CH_3\end{array}\right\rangle CO \quad \xrightarrow{NaOH} \quad C_{10}H_{12}O\left\langle\begin{array}{l}CH-OH\\CH-CH-CO.ONa\\\quad\;\;|\\\quad\;\;CH_3\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll}\text{oppure} & C_{10}H_{14}O<\\ \quad " & C_{10}H_{12}O_2<\end{array}\right] \qquad\qquad \left[\begin{array}{ll}\text{oppure} & C_{10}H_{14}O<\\ \quad " & C_{10}H_{12}O_2<\end{array}\right].$$

Ora, questa reazione di idratazione semplicissima, in lattoni complessi come la santonina ed i suoi derivati, dà origine a prodotti intermedî co-

lorati; oppure, secondo le vedute moderne, le agitazioni molecolari, inevitabili durante la reazione, si rendono a noi visibili in questi tre casi con una marcatissima colorazione, provocata dunque dalla comparsa d'una banda d'assorbimento *molto simile*, e nella regione visibile dello spettro.

La comparsa e la scomparsa della colorazione ci dà quindi il modo di seguire l'inizio (e *l'induzione*), il procedere e il finire della trasformazione seguente:

lattone (incoloro)	$\xrightarrow{\text{alcali}}$	ossiacido (incoloro)
equilibrio molecolare iniziale		equilibrio molecolare finale

4. L'esame del grafico che riporta le tre bande d'assorbimento caratteristiche della santonina, diidrosantonina e delle ossisantonine (ambedue

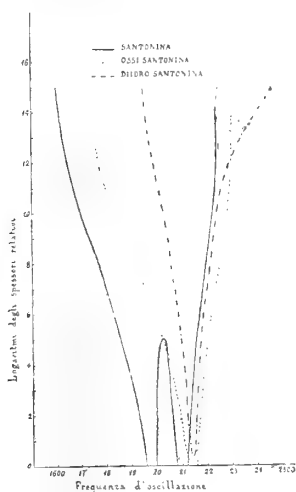



Fig. 1.

questi ultimi composti hanno identico comportamento spettrochimico) in soluzione alcàlina, rivela che la reazione

$$\text{lattone} \longrightarrow \text{ossiacido}$$

sembra decorrere, salvo piccole differenze dovute alla varia natura della sostanza studiata, in modo molto simile per i tre composti presi in considerazione.

Infatti, si nota una banda molto persistente d'assorbimento che si estende, per la parte più importante, nella regione dello spettro visibile compresa fra 540 e 440 $\mu\mu$ di lunghezza d'onda. Un po' irregolare è la santonina, che presenta una doppia banda per diluizioni assai grandi.

Le curve d'assorbimento date le concentrazioni delle soluzioni adoperate, dànno anche una idea della grande sensibilità della reazione fra la santonina o suoi derivati a anello lattonico chiuso e gli alcali caustici per scopo analitico. La reazione è sufficientemente rapida, nettissima e differenziale,

5. Le piccole variazioni nel decorso delle tre curve d'assorbimento dei tre tipi di sostanze studiate (santonina e derivati ossigenati o idrogenati), diventano assai notevoli se si osserva anche il comportamento spettrochimico nell'ultravioletto di detti composti, sempre in presenza di alcali caustico.

Si nota subito qui (nel secondo grafico riportato, e che dà una idea dell'andamento dell'assorbimento nell'ultravioletto estremo), che, mentre le curve della diidrosantonina e della ossisantonina sono molto simili per decorso, la curva della santonina è di tutt'altro tipo e presenta un brusco flesso in corrispondenza all'ordinata 7 (logaritmo dello spessore relativo) e all'ascissa 3900 (lunghezza d'onda: 256 $\mu\mu$). Ma queste simiglianze e dissimiglianze si accentuano molto di più, se si pon mente al fatto che nella reazione studiata,

lattone ⟶ ossiacido,

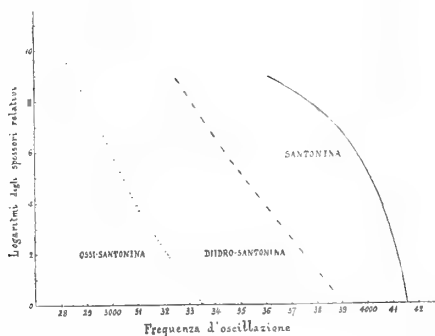



Fig. 2.

nel caso della diidrosantonina e della ossisantonina si manifesta una spiccata fluorescenza, il che non avviene nel caso della santonina. Ora, per il poco che si conosce sulle cause della comparsa della fluorescenza — e quel poco, mal si applica ancora alla precisa interpretazione di fenomeni intermolecolari in aggregati atomici così complessi come sarebbe un composto della serie idroaromatica —, siamo portati ad ammettere che la introduzione dei due atomi di idrogeno o di un atomo di ossigeno nella molecola della santonina porti con sè di conseguenza un cambiamento abbastanza profondo *almeno nei collegamenti* fra atomo e atomo della molecola della santonina stessa.

In generale, è anche risaputo che le sostanze le quali possiedono una fluorescenza sono piuttosto atte anche a reazioni vivaci; ciò sarebbe quindi in relazione colla molto maggior velocità di apertura dell'anello lattonico

che si nota nella diidro- e nella ossisantonina, e che di conseguenza conduce ad una molto più pronta decolorazione delle soluzioni alcaline di questi composti. Ed a questo proposito ricordo qui che la differente velocità di formazione delle ossime della diidrosantonina e della santonina ha servito appunto al Cusmano stesso (loc. cit.) per ottenere la separazione delle due sostanze, inquantochè la santonina è molto più lenta a combinarsi con la idrossilamina.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della miersite e della cuproiodargirite* [1]. Nota I di E. Quercigh, presentata dal Socio G. Struever.

Com'è noto, la fase dell'ioduro d'argento stabile a temperatura ordinaria è l'esagonale, che si rinviene anche come minerale in natura (iodirite); a temperature superiori a circa 147°, questa si trasforma in un'altra fase, otticamente isotropa, poco ben conosciuta, poichè tuttora si ritiene da molti cubica e da altri liquida, senza ragioni assolutamente decisive. Nel 1898, L. J. Spencer descrisse sotto il nome di *miersite*, in onore del prof. H. A. Miers, un minerale nuovo, da lui rinvenuto in due campioni del British Museum, provenienti da Broken Hill [New South Wales (Australia)], che egli ritenne costituito da questa seconda fase dell'ioduro d'argento [2].

Si presentava in croste cristalline ed aggregati poco distinti, associata in un campione a calcosina, quarzo e granato, nell'altro a malachite, anglesite e wad. Alcuni piccoli cristalli furono da lui misurati e descritti: presentavano abito tetraedrico, con facce del cubo abbastanza sviluppate, sfaldatura perfetta secondo il rombododecaedro {110}, geminazione frequente secondo le facce del tetraedro, splendore adamantino, colore giallo pallido, scalfittura e polvere di colorito più intenso; al microscopio apparivano isotropi; l'analisi qualitativa mise in evidenza che una parte dell'argento era sostituita dal rame.

Due anni dopo, lo Spencer [3], avendo raccolto nuovo materiale, diede ulteriori dettagli sulla miersite. La rinvenne accompagnata anche da limonite, cerussite e da cuprite non ancora alterata; determinò ancora la sfaldatura, la durezza = 2,5; accertò la frattura concoide, l'inalterabilità alla luce solare, l'isotropia ottica delle lamelle di sfaldatura secondo il rombo-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[2] L. J. Spencer, *Miersite a cubic modification of native silver iodide.* Nature, 57 (1898) 574.

[3] L. J. Spencer, *Marshite, miersite and iodyrite from Broken Hill. N. S. W.*, Min. Mag., XIII, 59 (1901) 41.

dodecaedro, l'assenza di piroelettricità. Nei cristalli misurati predominavano le facce $(\bar{1}00)$ $(0\bar{1}0)$ e $(00\bar{1})$ del cubo e le (111) del tetraedro, che era pure piano di geminazione. L'analisi qualitativa svelò di nuovo, oltre all'argento ed all'iodio, il rame in quantità variabili nei varî individui, e tracce di cloro.

Alcuni cristalli, però, provenienti da due dei campioni, differivano notevolmente dagli altri, poichè, quantunque avessero l'abito tetraedrico, la durezza e la sfaldatura della miersite, si presentavano di color più pallido, ed al microscopio apparivano birifrangenti; contenevano solo tracce di rame, e furono considerati da Spencer come un intimo e regolare accrescimento di miersite e iodirite, reso più probabile dall'aver egli trovato cristalli di iodirite con abito tetraedrico composto di quattro romboedri geminati, con angoli vicinissimi a quelli del sistema cubico, tanto che al goniometro sarebbe stato impossibile il distinguerli dalla marshite e dalla miersite.

Riscaldando, sino a fusione completa, dei frammenti di varî cristalli, otticamente isotropi, di miersite, lo Spencer osservò che, nel raffreddamento, ad un certo punto compaiono, nella superficie omogenea di color giallo vivo, degli aghi giallo-pallidi che si estendono rapidamente, sicchè il campo risulta occupato da due sostanze otticamente isotrope, di colore diverso, separate nettamente fra loro. A temperatura più bassa, la sostanza giallo-viva si trasforma rapidamente in iodirite birifrangente. La quantità relativa delle due sostanze, che allora si presentano coesistenti, è variabile nei varî cristalli: in generale la iodirite è molto scarsa; alle volte manca completamente, salvo per il caso dei cristalli birifrangenti accennati, in cui la iodirite è quasi pura.

Ripetendo queste esperienze con miscele preparate artificialmente, di concentrazioni comprese fra $AgI + CuI$ e $8AgI + CuI$, egli, in seguito, osservò che la miscela $4AgI + CuI$, dopo raffreddata, si presentava quasi completamente isotropa con solo qualche punto birifrangente qua e là, mentre, per concentrazioni superiori in CuI, ogni traccia di sostanza birifrangente spariva, per riapparire su vasta scala alle concentrazioni più elevate in AgI. Perciò lo Spencer credette di poter concludere che la miersite fosse un composto chimicamente definito, della probabile formola $4AgI . CuI$, capace di dare miscele isomorfe colla marshite, e soltanto semplici mescolanze colla iodirite.

Un anno dopo, G. T. Prior [1] analizzò quantitativamente alcuni cristalli di miersite che al microscopio apparivano esenti da impurità. La composizione trovata concorda benissimo colla formola $4AgI . CuI$. Dall'insieme delle ricerche di Spencer e di Prior, la miersite, da allora in poi, fu considerata, senza alcuna riserva, come costituita da un composto chimico

[1] G. T. Prior, *The identity of kilbrickenite with geocronite: and analyses of miersite, marshite and copper-pyrites.* Min. Mag., XIII, 605 (1902) 189.

definito; infatti, come tale è stato riportato dal Dana [1] ed accettato senza altro nei più importanti trattati, come quelli di Groth [2] e di Hintze [3].

Che le conclusioni di Spencer si debbano adottare senza discussione, non mi sembrò sostenibile, poichè il fatto che la miscela 4AgI . CuI, dopo fusa, cristallizzi in un tutto in massima parte isotropo, « with only a speck here and there of birifrangent iodyrite [4] », non prova minimamente l'avvenuta formazione di un composto; ed è ovvio che l'analisi di Prior ci dice solo la composizione, non la costituzione del materiale esaminato, per quanto in esso sia semplice il rapporto stechiometrico fra i due ioduri, poichè è noto che molti minerali si presentano con rapporti anche più semplici fra i loro componenti, senza però essere dei composti, ma delle semplici soluzioni solide. Nè si comprende facilmente come Spencer ammetta un composto, dopo aver osservato che frammenti di cristalli isotropi di miersite davano, per raffreddamento dopo fusione, un prodotto costituito in generale da due sostanze, di cui una, per quanto in scarsa quantità, era la iodirite birifrangente.

Ammettendo, con Spencer, che il composto 4AgI . CuI dia miscele isomorfe colla marshite e non colla iodirite, siccome i frammenti da lui esaminati, prima della fusione, erano isotropi, dovevano avere una concentrazione in AgI minore o, al massimo, eguale a quella espressa da 4AgI . CuI, e non si spiega come poi compaia la iodirite, la quale non dovrebbe rimanere libera, sia che le soluzioni solide, formatesi per le prime, avessero concentrazione in CuI superiore a quella della fase liquida coesistente in equilibrio, sia nel caso opposto; nè si può ammettere una parziale decomposizione del composto 4AgI . CuI, perchè certi frammenti si mostrarono, dopo fusione, completamente privi di iodirite.

Più logica (o per lo meno con ugual diritto di venire avanzata) sarebbe stata l'ipotesi dell'esistenza di soluzioni solide fra CuI ed AgI in rapporti limitati a temperatura ordinaria, tanto più che *a priori* non appare inverosimile che la fase regolare dell'ioduro rameoso, stabile a temperatura ordinaria, disciolga allo stato solido, e stabilizzi anche sotto ai 147°, la fase otticamente isotropa del AgI, che potrebbe pure essere cubica. Allora si comprenderebbe bene come la miersite a massima concentrazione in AgI, monorifrangente prima della fusione, diventasse birifrangente dopo, poichè durante il raffreddamento la formazione dei primi cristalli misti, molto ricchi in CuI e poco suscettibili di variare la propria concentrazione in accordo colla fase liquida coesistente, aumentando la concentrazione di AgI in questa ultima, farebbe subito ad essa sorpassare il limite di solubilità di AgI in CuI allo stato solido, determinando, nella solidificazione, la separazione di

(1) E. S. Dana, I Appendix (1899) 47; II App. (1909), 69.
(2) P. Groth, Chem. Krystallographie, I (1906) 202.
(3) C. Hintze, Handb. d. Mineralogie, I (1912) 2321.
(4) Spencer, loc. cit., pag. 44.

Ag I, che, giunto alla temperatura di trasformazione, diventa, com'è naturale, birifrangente.

Questa ipotesi non fu però avanzata, anzi fu esclusa da B. Gossner (¹): « eine Molekularverbindung von Ag I mit Cu I mit konstanter Zusammensetzung und nicht eine isomorphe Mischung haben wir mit ziemlicher Sicherheit vor uns im Miersit »; e da Groth (²): « scheinen auch keine eigentlichen isomorphen Mischungen von Cu I und Ag I zu existieren, vielmehr liefert die geschmolzene Mischung beider Salze beim Erstarren eine kubisch kristallisierende Verbindung von der Zuzammensetzung 4 Ag I . Cu I und ein Ueberschuss an Ag I scheidet sich getrennt aus, während ein solcher von Cu I von den Kristallen der Verbindung aufgenommen wird ».

Se oltre a ciò si considera che le determinazioni di G. F. Rodwell (³), dei coefficienti di dilatazione e dei punti di fusione di alcune miscele di Ag I e Cu I, non permettono in alcun modo di dedurre l'esistenza di un eventuale composto, si vede bene che il problema della costituzione della miersite, dopo più di 15 anni dalla sua scoperta, era ancora da risolvere. Questo io mi proposi di fare, e l'argomento mi sembrò interessante, anche perchè, più di 20 anni fa, fu descritto, molto sommariamente, da H. Schulze (⁴) un minerale analogo, la *cuproiodargirite*, la cui natura (quantunque la composizione risulti, dall'analisi, corrispondere alla formola Cu I . Ag I) ed il cui stesso diritto di esistere come specie minerale indipendente, sono assai discutibili, date le scarse notizie lasciateci da Schulze in proposito, notizie rimaste poi anche le uniche.

Per cercare di raggiungere il mio scopo, intrapresi principalmente quattro serie di esperienze:

1°) Analisi termica del sistema binario Ag I + Cu I.

3°) Esame delle sezioni sottili ottenute dai blocchi analizzati termicamente.

3°) Osservazione microscopica del processo di cristallizzazione, fino a temperatura ordinaria, delle varie miscele di Ag I e Cu I.

4°) Esperienze sulla sintesi delle miersiti.

1. *Analisi termica del sistema binario* Ag I + Cu I.

È certo che, per la natura stessa del giacimento di Broken Hill, va esclusa l'ipotesi che la miersite vi si sia formata per via ignea; ma è indiscutibile che lo studio delle relazioni d'affinità che esistono fra l'ioduro

(¹) B. Gossner, *Untersuchungen polymorpher Körper*. Zeitschr. f. Kryst, XXXVIII (1904) 129.

(²) P. Groth, loc. cit., pag. 174.

(³) G. F. Rodwell, *On the effects of heat on certain haloid compounds of silver, mercury, lead and copper*. Phil. Trans., 173 (1882) 1125 e seg.

(⁴) H. Schulze, Chemiker Zeitung (1892) XVI, 1952; E. S. Dana, I Appendix (1899).

d'argento e quello rameoso, quando si separano dalle loro miscele binarie fuse, avrebbe dovuto gettare buona luce sulla quistione discussa; ed a tale proposito nulla si sapeva finora, perchè, quantunque gli alogenuri degli elementi del I gruppo di Mendelejeff sieno stati largamente studiati da questo punto di vista, le ricerche fin qui eseguite riguardano più particolarmente i cloruri, e perchè, d'altra parte, le esperienze di Rodwell nulla rivelano, da sole, in proposito.

L'analisi termica venne eseguita adoperando i soliti termoelementi, platino-platinorodio, collegati a galvanometri di Siemens & Halske. Il peso delle miscele adoperate era costantemente di gr. 15, ed ebbi cura che le disposizioni adottate fossero tali da dare buon affidamento sia per ciò che riguarda la velocità di raffreddamento e la sensibilità alle variazioni termiche, sia per quanto concerne la protezione dall'ossidazione delle miscele.

Gl'ioduri adoperati provenivano da Merk e Kahlbaum, e se si eccettua un po' d'umidità eliminata accuratamente prima d'intraprendere le esperienze, non contenevano impurezze svelabili coi comuni saggi analitici.

Il punto di solidificazione dell'ioduro d'argento si manifesta a 557°, con un arresto molto netto nella curva di raffreddamento.

Se si confronta questa cifra con quelle finora trovate dai varî sperimentatori che se ne occuparono:

T. Carnelley	530°	(J. Chem. soc., *29* (1876), 489).
»	527	(J. Chem. soc., *33* (1878), 273).
Rodwell	527	(loc. cit., pag. 1133).
Ramsay e Eumorfopoulos . . .	556	(Phil. mag., *41* (1896), 360).
Steger	526	(Zeitschr. f. physik. Chemie, *43* (1903), 601).
Mönkemeyer	552	(N. Jahrbuch. Min. Beilbd., XXII (1906), 28).
Sandonnini	546	(Rend. Acc. Lincei, XXI, 2° (1911), 199).
Quercigh	557	

si vede subito che, mentre le determinazioni di Carnelley, di Rodwell e di Steger dànno valori che, quantunque concordanti, appaiono con grande probabilità troppo bassi, le altre sembrano più attendibili. La temperatura trovata da Ramsay ed Eumorfopoulos (556°) è di solo 1° diversa dalla mia (557°): e siccome questi due valori sono i più alti finora trovati, si può ritenere che rappresentino la temperatura più approssimata a quella vera di solidificazione dell'ioduro di argento.

Che questo punto critico, che si manifesta a 557° con notevole tonalità termica, sia poi un vero punto di cristallizzazione della fase cubica dell'Ag I, od un *punto di chiarificazione*, è indifferente per lo scopo di queste ricerche.

L'ioduro rameoso, fuso in modo da proteggerlo dall'ossidazione, cristallizzò a 602°.

Esistono in proposito altri dati, che sarà bene confrontare:

T. Carnelley	601° ± 3°	(J. Chem. soc., *33* (1878), 273).
Carnelley e O' Shea.	628	(J. Chem. soc., *45* (1884), 409).
Rodwell	601	(loc. cit.).
Mönkemeyer	590	(loc. cit.).
Quercigh	602	

Il valore di Mönkemeyer, che pure è uno dei più attendibili, non ha l'esattezza delle temperature inferiori da lui date, poichè il punto fisso più alto con cui egli graduò il suo termoelemento è quello dello zinco e da questa temperatura in poi egli dovette ricorrere all'estrapolazione che diminuisce, com'è ovvio, l'esattezza; quindi non è improbabile che anche questo valore, come quello dell' Ag I sia inferiore al reale, e più di quello, stante la temperatura più elevata. Il valore di Carnelley e O' Shea mi sembra troppo alto.

La temperatura di trasformazione della fase otticamente isotropa dello Ag I in quella birifrangente fu da me trovato termicamente a 147°; e su questo punto esiste una discreta concordanza fra i varî sperimentatori:

Wernicke . . .	139°-138°,5	metodo	ottico	(Pogg. Ann., *142* (1871) 560.
Rodwell	148°	»	dilatometrico	(loc. cit., pag. 1133; vedasi diagramma tav. 96 stesso volume).
Kohlrausch	145°	»	della conduttività	(Wiedm. Ann., N. F., *17* (1882), 642).
Mallard e Le Chatelier	146°	»	ottico	(Compt. rendus, *97* (1883), 102. Bull. Soc. Min. Fr., *6* (1883), 182).
W. Schwarz . .	145°,4-146°,9	»	ottico	(Beitr. z. Kenntnis d. unkehrb. Umwdlp. polym. Korper. Göttingen 1892). Zeitschrift für Kryst. 25 (1896) 613).
Steger	146°-147°	»	termico	(Zeitschr. f. physik. Ch, *43*, (1903), 601).
Mönkemeyer	. . . 143°	»	termico	(loc. cit.).
	. 146°,9-147°,2	»	ottico	
Stoltzenberg e Huth .	134°	»	ottico	(Zeitschr. f. physich. Ch., *71*, (1910), 644).
Sandonnini.	142°	»	termico	(loc. cit).
Quercigh	147°	»	termico	

Sembra, da questo confronto, che il valore di 147° sia il più attendibile, come quello a cui tende il maggior numero di determinazioni, se si eccettua quella, antiquata, di Wernicke, e quella evidentemente errata di Stoltzenberg e Huth che trovarono inoltre la temperatura di fusione di AgI a « circa 500° ».

La trasformazione della fase esagonale di Cu I in quella cubica stabile a basse temperature, fu trovata da me a 402°. Mönkemeyer ottenne (loc. cit., pag. 42) termicamente il valore di 400°, otticamente quello di 397°-399°; altri dati non esistono in proposito, perchè Rodwell dilatometricamente non potè osservare tale trasformazione.

I risultati delle esperienze termiche sono esposti nella seguente tabella e rappresentati graficamente nel diagramma della fig. 1.

Come si vede da quest'ultimo, tutte le miscele presentano nel raffreddarsi un primo rallentamento di durata variabile, i cui punti d'inizio e di fine si trovano su due curve A *c d* B ed A *a b* B, che hanno in comune i punti di fusione dei componenti puri e si avvicinano di molto a circa 50 % mol. di CuI, concentrazione alla quale raggiungono anche un minimo di temperatura.

TABELLA I.

N.	% di Cu I in peso	% di Cu I molecolari	I equilibrio monovariante inizio	I equilibrio monovariante fine	II equilibrio monovariante inizio	II equilibrio monovariante fine	Equilibrî invarianti temperatura	Equilibrî invarianti durata in m″
1	100 (0 Ag I)	100 (0 Ag I)	—	—	—	—	602° / 402	80 / 60
2	87.96	90	559°	548°	370°	354°	—	—
3	76.45	80	533	520	350	334	—	—
4	65.44	70	516	500	335	317	—	—
5	54 90	60	500	492	319		—	—
6	44 80	50	490	485	298		—	—
7	35.11	40	495	490	278		—	—
8	25.80	30	506	495	270		—	—
9	16.87	20	521	510	245		—	—
10	8.27	10	535	524	205		—	—
11	4.10	5	544	536	175		147	70
12	0 (100 Ag I)	0 (100 Ag I)	—	—	—	—	557 / 147	60 / 130

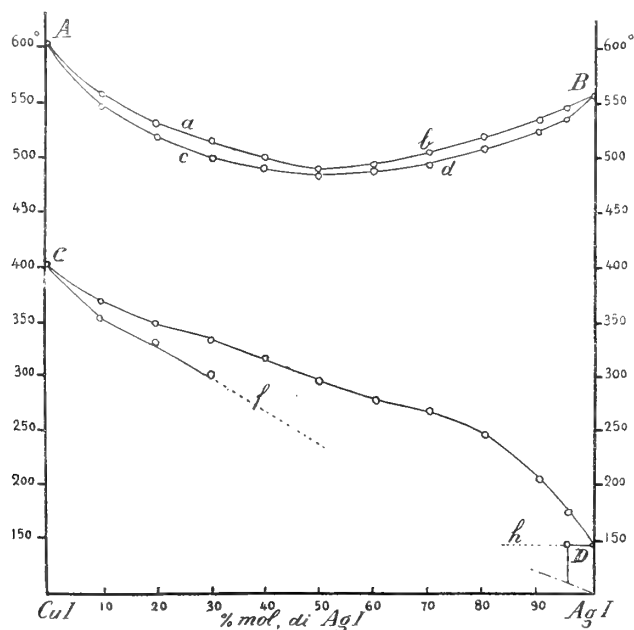



FIG. 1.

A temperature più basse, tutte le miscele presentano un nuovo rallentamento nella velocità di raffreddamento, che incomincia in corrispondenza ai punti della curva C D, e la cui fine si scorge bene termicamente solo per concentrazioni in Cu I superiori al 70 %.

La miscela 95 % Ag I presenta inoltre, a 147°, un arresto, che è più breve di quello di eguale quantità di Ag I puro; tale arresto non si può osservare con certezza termicamente, nelle condizioni d'esperienza, per concentrazioni inferiori in Ag I.

Il diagramma sarebbe dunque del tipo delle sostanze che formano soluzioni solide in tutti i rapporti ad elevata temperatura, soluzioni che poi, raffreddandosi subiscono una trasformazione; per forti concentrazioni di Ag I si osserva anche parziale smistamento con susseguente formazione della fase esagonale dello ioduro d'argento messo in libertà. Questo diagramma verrà ampiamente discusso, in base anche ad altre ricerche, in una prossima Nota. Osservo solo, per il momento, che, in base all'analisi termica eseguita, sembra priva di obiezioni l'esclusione della formazione del composto 4 Ag I · Cu I nelle condizioni d'esperienza, che sono simili a quelle in cui Spencer ammise che esso si formasse.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa.* IV Nota preventiva del dott. F. Plate, presentata dal Socio R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri* [1]. Nota II del dott. Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

L'influenza delle ghiandole a secrezione interna dei Mammiferi sulle larve degli Anfibî, ha richiamato recentemente lo studio di molti osservatori.

Gudernatsch [2] ha per il primo (1912), con ricerche assai interessanti, osservato che la tiroide dei Mammiferi, somministrata a larve di *Rana*, sotto forma di cibo, accelerava la fase di metamorfosi e la differenziazione dello animale: la tiroide produceva inoltre un arresto dell'accrescimento delle larve. Opposta era l'influenza del timo: favoriva l'accrescimento larvale, ma posponeva o sopprimeva la metamorfosi.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto d'anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Roma.

[2] Gudernatsch, I. F., *Feeding experiments on Tadpoles. I. The influence of specific organs given as food on growth and differentation.* Arch. f. Entvichlungsmechanik. vol. XXXV, pp. 457-483, 1912.

Io (Cotronei, 1913) (¹) mi son servito della somministrazione di tiroide allo scopo di studiare le correlazioni organiche, squilibrando le secrezioni interne, nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri. Ho notato che la tiroide, somministrata come unico nutrimento, tendeva a produrre fenomeni letali; la morte sopraggiungeva dopo un tempo vario; per lo più, se le larve, al momento in cui s'iniziavano gli esperimenti, erano abbastanza sviluppate, la morte sopravveniva quando erano in fase di metamorfosi; ma la metamorfosi non si compiva: ho però notato che questo non era da confondersi con i fenomeni descritti da Gudernatsch per il timo. Ho dimostrato, con osservazioni macroscopiche e istologiche, che l'influenza della tiroide dei Mammiferi, somministrata intensamente alle larve degli Anfibî Anuri, si può considerare come influenza disarmonica, oltre che acceleratrice; perchè l'animale inizia la fase di metamorfosi con lo stato di sviluppo disarmonico di diversi organi.

Brachet (1913) (²) si è limitato a comunicare poche parole di conferma ai risultati di Gudernatsch.

Romeis (1913) (³) ha studiato il comportamento della rigenerazione di larve di *Rane*, nutrite con differenti organi a secrezione interna.

Babak (1913) (⁴) ricorda, a proposito delle ricerche di Gudernatsch, le sue osservazioni sull'influenza del sistema nervoso (⁵), nei processi morfogenetici della metamorfosi; ed annunzia che un suo allievo ha ottenuto l'inizio della metamorfosi in larve di Amblystoma, dopo una settimana di nutrizione con tiroide.

Gudernatsch (1914) (⁶), con un nuovo lavoro pubblicato in questi ultimi giorni, considera molte diete miste: dove la tiroide è mista, con altro nutrimento, esercita un'azione acceleratrice sullo sviluppo. Il timo è quello che più contrasta l'influenza della tiroide. Gudernatsch ammette, però, che la maggior parte delle larve nutrite soltanto con tiroide di Mammiferi muore subito dopo l'apparizione degli arti anteriori e la simultanea riduzione della

(¹) Cotronei G., *Primo contributo sperimentale allo studio delle relazioni degli organi nell'accrescimento e nella metamorfosi dagli Anfibî Anuri. L'influenza della nutrizione con tiroide di Mammiferi.* Bios, vol. II, fasc. I, settembre 1913.

(²) Brachet A., *Presentation de têtards soumis à des conditions de nutrition spéciales.* Ann. et Bull. Soc. Roy. d. Sc. Med. et Nat. de Bruxelles, an. 71, fasc. 4°, pagina 104.

(³) Romeis B., *Der Einfluh verschiedenartiger Ernährung auf die Regeneration bei Kaulquappen.* Arch. f. Entw. Mech., Bd. 137, an. 1913.

(⁴) Babak E., *Einige Gedanken über die Beziehung der Metamorphose bei den Amphibien zur inneren Sekretion.* Zentralbl. f. Physiol., Bd. XXVII, n. 10, an. 1913.

(⁵) *Ueber die Beziehung des centralen Nervensystem zu den Gestalsvorgangen der Metamorphose des Frosches,* Phluger, Arch. Bd. CIX, 1905.

(⁶) Gudernatsch. I. F., *Feeding experiments on tadpoles.* II. *A further contributions to the knowledge of organs with internal secretion.* The American Journ. of anat., vol. 15, n. 4, January 14, 1914, pag. 431.

loro coda (1914, pag. 469). Se la tiroide viene somministrata a lunghi intervalli, gli animali possono essere tenuti vivi per parecchie settimane, però aggiunge: « They will not undergo, however any further changes; except perhaps a continued reduction of their tails, nor will they ever fed again ». Gudernatsch cita alcuni casi nei quali (esperimenti del 1911) afferma di avere ottenuto completo riassorbimento della coda e sopravvivenza da 2 a 4 giorni. In esperimenti del 1912 (che riporta in questo lavoro), alcune larve di *Bufo* riuscirono a riassorbire quasi completamente la coda dietro il trattamento di nutrizione con tiroide; ma non sopravvissero. Importante è questa concordanza di Gudernatsch con i miei risultati: « A recovery from the thyroid influence is extremely rare ». Difatti, soltanto 5 esemplari di un esperimento di parecchie centinaia, e 6 in un altro, riuscirono a sopravvivere.

L'autore conclude che ritiene accertato che la tiroide contiene un principio che stimola la differenziazione, mentre il timo (e la milza) agisce in modo opposto, favorendo l'accrescimento larvale.

Nel mio lavoro del 1913 ho descritto come la nutrizione con tiroide, pur rappresentando una causa acceleratrice, tendeva a culminare, nei casi da me ottenuti, con il fenomeno della morte: ho osservato che la morte sopraggiungeva più rapida, allorquando, con la emissione d'un solo arto, la coda era notevolmente ridotta. Nei casi, però, nei quali io ho ottenuto una sopravvivenza di moltissimi giorni dall'inizio dei fenomeni di metamorfosi, gli esemplari in esame avevano conservato per tutto il tempo la coda, in gran parte non riassorbita.

Là dove nei miei esperimenti ho ottenuto una più lunga sopravvivenza, bisogna distinguere due risultati:

1°) L'arto anteriore sinistro è stato emesso; ma non è stato emesso l'arto anteriore destro. (Cotronei, 1913, Esperimento VIII, pp. 31 e 32). La più lunga vitalità è stata ottenuta in una larva di *Rana esculenta*, nutrita dapprima con tuorlo d'uovo di gallina: la nutrizione con tiroide s'inizia il 26 giugno; il 6 luglio l'animale emette l'arto anteriore sinistro: muore il 26 luglio, senza emettere l'arto anteriore destro. L'animale ha preso un aspetto raniforme; ma la coda, dopo 20 giorni dall'emissione dell'arto, è ancora lunga mm. 11 [1], mentre la lunghezza rostro-anale misura mm. 9. L'arto anteriore e gli arti posteriori sono notevolmente sviluppati: la coda, per quanto ancora così lunga, non presenta i caratteri larvali: il lembo ventrale si trova appena accennato soltanto verso la parte posteriore: un pò più il lembo dorsale: il diametro trasversale è piccolissimo.

2°) Gli arti anteriori sono stati emessi entrambi.

(1) Le misurazioni di questa larva come di quella seguente si riferiscono a esemplari conservati in alcool a 70°.

Il caso migliore si riferisce ad un esemplare di *Rana esculenta*, che ha emesso l'arto anteriore sinistro (Esperimento X, pag. 32) tra il 10 luglio e l'11 luglio; l'arto anteriore destro viene emesso il 14 luglio. L'animale muore il 4 agosto: è dunque sopravvissuto 25 giorni dall'emissione del 1° arto; considerando il tempo trascorso, la coda si mantiene ancora lunga, giacchè misura mm. 13,5 (mentre la lunghezza rostro-anale è di mm. 10).

Per la descrizione dei caratteri della coda valgono le osservazioni precedenti.

Il tubo digerente, nei due esemplari riferiti, si mostrava molto differenziato. Lo stomaco è nettamente distinto e rigonfiato, mentre l'intestino si presenta ridotto e con diametro assai ristretto.

Anche in un esemplare di *Bufo vulgaris* (Esperimento 9, pag. 32) trovo che l'animale è morto il 24 luglio, mentre l'arto anteriore sinistro è stato emessso l'8 luglio: pure in questo caso la coda è notevolmente lunga.

I casi ricordati dimostrano che anche là dove la metamorfosi è stata rapidamente accelerata, la coda mostra tendenza a conservarsi, e in molti casi funzionante, per il tempo della sopravvivenza al regime sperimentato (osservare il diario dei miei esperimenti del 1913); ma ho già notato come Gudernatsch abbia descritto d'avere ottenuto, con gli esemplari nei quali si emettevano gli arti anteriori, contemporanea riduzione della coda; ed io stesso ho descritto (in un unico esperimento, però, 1913; Esperimento VII, pag. 31), una notevole riduzione della coda quando era emesso un arto, e, qualche volta, ancora prima dell'emissione dell'arto: in questi casi, però, le larve non potevano servirsi del residuo della coda per il movimento, e nei miei esperimenti io non ho mai ottenuto sopravvivenza.

Bisogna osservare che i fenomeni di riduzione sono anche in relazione con la perdita d'acqua: e poichè la struttura istologica era abbastanza ben conservata, almeno in una notevole parte della coda residuale, dobbiamo pensare che la maggiore riduzione della coda era in relazione con il grande addensamento dei tessuti (notevole perdita d'acqua).

Prima di chiudere queste brevi osservazioni, ricorderò che in qualche esemplare di Bufo m'è avvenuto di ottenere una riduzione quasi completa. Si trattava di esperimenti preliminari, nei quali era stata poi smessa la nutrizione con tiroide.

Ho voluto, nel proseguire le mie ricerche, osservare dopo quanto tempo si lasciavano scorgere gli effetti morfologici di una nutrizione con tiroide (Gudernatsch, nel 2° lavoro dice che, dopo 24 ore, si può scorgere qualche effetto; ma non riferisce osservazioni in proposito); è da notarsi che anche in questo genere di ricerche i risultati che si ottengono bisogna considerarli in relazione con lo stadio e il grado d'accrescimento degli esemplari sperimentati.

Una larva di *Rana esculenta* di circa 30 mm. di lunghezza totale, che presenta l'abbozzo degli arti posteriori, viene esaminata dopo circa 3 giorni di esperimento. Il tubo digerente, macroscopicamente, già mostra di essersi notevolmente ridotto: lo stomaco però non è rotato a sinistra: il diametro dei giri della spirale intestinale si è molto ristretto: macroscopicamente, la coda mostra un maggiore addensamento. Gli arti anteriori non sono stati emessi. All'esame istologico si nota che le fibre muscolari in una gran parte dell'intestino si sono addensate: i fenomeni degenerativi dell'epitelio larvale sono iniziati; vi sono tuttavia delle parti dell'intestino in cui la struttura larvale appare integra. L'esame istologico della coda non mostra tessuti in degenerazione. Gli arti posteriori si trovano allo stato di tessuto primitivo indifferenziato: si nota solo un orientamento di cellule in strato superficiale: si scorge qualche vaso sanguigno: non esistono altre differenziazioni istologiche. Ad una condizione abbastanza inoltrata nelle modificazioni del tubo digerente, non corrisponde affatto lo stato di sviluppo degli arti.

In larve meno sviluppate, alle quali ho somministrato tiroide di mammiferi per un periodo di tempo più lungo, noto ancora che gli arti sono assai poco sviluppati, formati soltanto di tessuto primitivo indifferenziato, quando sono avanzate le modificazioni del tubo digerente.

Questi risultati confermano che le disarmonie di sviluppo si manifestano presto, con l'influenza della tiroide, prima ancora che sia inoltrata la fase di metamorfosi. I miei risultati del 1913 si riferivano a esemplari che già avevano emesso un arto anteriore.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane* [1]. Nota II del dott. G. Amantea (assistente), presentata dal Socio L. Luciani.

Riferirò qui brevemente le prime osservazioni generali, che finora ho potuto eseguire, servendomi del metodo descritto nella Nota precedente, sulla secrezione spermatica normale del cane.

Debbo premettere che, dopo essermi assicurato che veramente nel cane l'ejaculazione dura tutto il periodo del coito, (ciò che ha servito di base per la costruzione della *vagina artificiale*, e ciò che ho facilmente potuto constatare, stimolando in modo adeguato la zona riflessogena peniena per gli atti sessuali, e quindi imitando le condizioni del coito normale, tenendo tra il pollice e l'indice, lubrificati con vasellina e applicati sulla regione retrobulbare, il pene dell'animale), sono ricorso allo stesso metodo semplice per stabilire se spermatozoi siano presenti in qualsiasi porzione del liquido spermatico eliminato durante una intera ejaculazione. Raccogliendo lo sperma

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

in modo frazionato, ho potuto così accertare che nell'ejaculazione del cane è possibile distinguere tre periodi: nel *primo periodo*, coincidente coi movimenti di coito (movimenti di va e vieni del treno posteriore, amplesso) e col vero orgasmo, lo sperma eliminato è lattescente e ricchissimo di spermatozoi; nel *secondo*, che incomincia dal momento in cui il cane fa l'atto di scavalcare, e si confonde senza limiti netti col successivo, lo sperma diviene sempre più povero di spermatozoi; nel *terzo* infine, il liquido eliminato, limpidissimo, è affatto privo di spermatozoi. La prima porzione di sperma, se il cane su cui si sperimenta si trovava da molto tempo in completo riposo sessuale, può anche contenere numerosi cristalli.

Nelle ricerche istituite col metodo della vagina artificiale, ho finora tenuto conto della *durata del coito fittizio*, della *quantità di sperma* raccolto, e del *numero degli spermatozoi* in esso contenuti. La durata del coito è stata misurata dal tempo trascorso dall'introduzione del pene del cane nell'apparecchio, fino al distacco spontaneo dell'animale da quest'ultimo. Lo sperma raccolto nel sacchetto interno e a pareti sottili dell'apparecchio, si è misurato versandolo con cura, e nel modo più completo possibile, in un piccolo cilindro graduato in decimi di cc. e fornito di tappo a smeriglio. Ho calcolato in media, che, la quantità di liquido che rimane aderente alla superfice interna del sacchetto è uguale a cc. 0,2; perciò al liquido versato nel cilindro ho sempre aggiunto, nel valutarne il volume, come costante, cc. 0,2. La numerazione degli spermatozoi ho potuto poi eseguire in modo assai semplice, ricorrendo al noto apparecchio di *Thoma-Zeiss*. Volendo però fare la conta subito dopo raccolto lo sperma, una difficoltà si presenta, e consiste nella mobilità di cui gli spermatozoi sono dotati. Ho ovviato a tale inconveniente diluendo nel mescolatore, invece che con le soluzioni consigliate nel caso degli eritrociti, con una soluzione di bisolfato di chinina all'1 %, che istantaneamente uccide gli spermatozoi senza alterarli. Si può anche però aspettare che gli spermatozoi perdano i loro movimenti, (ciò che avviene di solito quasi sempre dopo tre ore circa a temperatura dell'ambiente), e quindi procedere alla numerazione nello stesso modo come si pratica pe gli eritrociti. Prima di prendere il campione di sperma, è sempre conveniente di agitare bene il liquido, nello stesso cilindro graduato, capovolgendolo più volte, dopo averlo chiuso col tappo. La diluizione consigliabile per la numerazione è quella di 1 : 10 - 1 : 20. Nelle mie ricerche ho sempre assunto come risultato definitivo per ciascuna numerazione la media di non meno di tre conte successive, sempre eseguite con campioni differenti di sperma, e contando gli spermatozoi distribuiti su almeno 200 quadratini dell'apparecchio di *Thoma-Zeiss*.

Finora ho così potuto sperimentare su più di 30 cani, di varia taglia e di varia razza, e tutti in perfetta maturità sessuale; non mi è stato però finora possibile di tenere esatto conto dell'età dei singoli animali.

Prima di istituire altre ricerche ho inteso il bisogno di bene orientarmi di fronte alla secrezione spermatica normale dell'animale, da me prescelto per lo studio. E qui appunto, come già ho detto, riferirò le prime osservazioni sulla durata del coito fittizio, sulla quantità di sperma e sul numero degli spermatozoi nel cane, in condizioni affatto normali.

La *durata del coito fittizio* non è la stessa in tutti i cani; ma, *per uno stesso animale, normalmente si mantiene sempre costante entro certi limiti, che non vengono mai oltrepassati*. Un cane, per es., pel quale la durata del coito fittizio oscilla normalmente fra 8′ e 12′, non la presenterà normalmente mai di 5′ a 6′ o di 15′-20′. Tenendo conto di più ejaculazioni successive, provocate intercalando tra l'una e l'altra sufficenti periodi di riposo (almeno 3-4 giorni), si può ritenere che in una discreta maggioranza di cani la durata del coito fittizio oscilla fra 7′-15′; in un altro buon numero di cani oscilla fra 15′ e 18′, come risulta dalla tabella I. Difficilmente si osserva una durata inferiore ai 7′, mentre è più facile osservarla superiore ai 18′. Comunque, posso affermare che durate troppo brevi (1′-5′) o troppo lunghe (25′-30′) non sono più da considerare come normali. Se si eseguono raccolte successive di sperma molto ravvicinate tra loro, si nota che la durata dell'ejaculazione in un primo periodo diviene sempre più lunga, mentre, quando incomincia la stanchezza dell'animale, diviene eccessivamente breve.

TABELLA I.

CANE	Peso in kgr.	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi eliminati
I . . .	4,600	10	1,7	109.480.000
II . . .	4,800	7	2,6	38.740.000
III . . .	5,500	10	4,3	44.290.000
IV . . .	6,400	16	16,0	164.800.000
V . . .	6,700	15	2,7	130.680.000
VI . . .	7,000	8	4,2	151.620.000
VII . . .	7,200	15	13,3	163.590.000
VIII. . .	7,800	11	6,3	211.680.000
IX . . .	8,000	15	6,0	348.000.000
X . . .	8,600	14	7,1	188.860.000
XI . . .	9,000	9	6,8	208.080.000
XII . . .	9,600	12	7,5	248.000.000
XIII. . .	9,900	11	5,0	110.000.000
XIV. . .	10,000	10	6,5	280.800.000
XV . . .	11,100	18	16,5	199.650.000
XVI. . .	11,100	11	5,7	548.340.000
XVII . .	18,000	8	7,4	109.520.000
XVIII . .	20,000	8	7,7	93.170.000
XIX. . .	20,100	12	19,1	679.960.000
XX . . .	20,300	9	8,8	364.320.000

Esempio della durata del coito fittizio, della quantità di sperma e del numero degli spermatozoi in 18 cani normali, dopo un lungo periodo di riposo sessuale.

La *quantità di sperma* è anch'essa *normalmente costante, entro certi limiti, per ogni cane.* Se lo sperma si raccoglie per più volte, ma senza intercalare tra una raccolta e l'altra un sufficente periodo di riposo, (se si raccoglie, per es., una volta al giorno), la sua quantità è massima il primo giorno, e decresce nei successivi. Per raccolte cioè non distanziate sufficentemente, la più grande quantità di sperma corrisponde alla prima. Fra la quantità di sperma e le dimensioni dell'animale, esiste un certo rapporto, nel senso che eliminano più sperma i cani di taglia maggiore; ma esso non è assoluto. Basta, a dimostrarlo, il fatto che la maggior quantità di sperma l'ho ottenuta, alle volte, da cani di media taglia. (Vedi tabella I). Sperimentando su animali normali e in riposo sessuale, e riferendomi alla prima raccolta eseguita su ciascuno, ho finora trovato come quantità minima cc. 1,7, e come quantità massima cc. 19,1, indipendentemente dalla taglia.

In quanto poi al *numero complessivo degli spermatozoi* di ogni ejaculazione, *esso non è in rapporto nè con la durata del coito, nè con la quantità di sperma eliminata, nè con le dimensioni dell'animale.* Probabilmente però esiste un rapporto con l'età, di cui però finora non mi è stato possibile tenere esatto conto. Riferendomi sempre alla prima raccolta di sperma eseguita su cani in riposo sessuale, posso dire di aver rilevato che il numero complessivo degli spermatozoi oscilla fra 38,740,000 e 679,960,000 per un'ejaculazione (vedi tabella I).

Varî fattori (stimoli periferici, eccitamenti psichici, stato di nutrizione dell'animale ecc.) possono influenzare la durata del coito fittizio; questi stessi fattori, e molti altri ancora, direttamente o indirettamente, in senso positivo o in senso negativo, possono influire sulla complessiva quantità del liquido spermatico eliminato; numerosi fattori infine possono anche far variare la produzione e l'eliminazione degli spermatozoi; ma di essi mi occuperò in seguito.

Prima di terminare, voglio qui solo accennare ad un fatto, che, sebbene mi sembri già bene osservato, spero di poter mettere più chiaramente in rilievo in un' altra Nota. Esso consiste in questo: se si raccoglie lo sperma da un cane normale dopo un lungo e sicuro periodo di riposo sessuale, e poi si fa una seconda raccolta con un intervallo di tempo opportuno (da 2 a 3 giorni, fino a 10-12), si può nella seconda raccolta ottenere un numero di spermatozoi di molto superiore a quello della prima. Evidentemente la prima ejaculazione ha esercitato un'azione eccitante (trofica) sulla secrezione testicolare (vedi tabella II).

TABELLA II.

CANE	Data della raccolta	Numero degli spermatozoi eliminati
I	15 novembre 1913	208.080.000
	21 " 1913	572.400.000
II	18 novembre 1913	93.170.000
	20 " 1913	825.500.000
III	10 novembre 1913	44.400.000
	22 " 1913	189.200.000
IV	3 gennaio 1914	211.680.000
	15 " 1914	450.210.000
V	18 gennaio 1914	110.000.000
	21 " 1914	263.320.000

Esempio del modo come può aumentare il numero degli spermatozoi quando si eseguono due raccolte successive di sperma, con un intervallo di 2 a 12 giorni tra la prima e la seconda.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA presenta un piego suggellato, inviato dal signor A. TRICCA, perchè sia conservato negli Archivi Accademici.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXI. (1892-1913). Fasc. 9°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Bianchi. Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche . . . . . . Pag. 383
Volterra. Sulle equazioni alle derivate funzionali . . . . . . » 393
Crudeli. Nuovi criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . . . . » 400
Gateaux. Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation (pres. dal Socio *Volterra*) » 405
Godeaux. Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (pres. dal Corrisp. *Severi*) . . . . . . » 408
Picone. Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche (pres. dal Socio *Bianchi*) . . . . . . » 413
Colonnetti. Esperienze sulla elasticità a trazione del rame (pres. dal Socio *Volterra*) . . » 421
Bonazzi. L'effetto Hall longitudinale nelle leghe ferromagnetiche di rame, manganese, alluminio (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . . . » 427
Guglielmo. Intorno ad un condensatore sferico o conico per l'illuminazione laterale nei microscopî (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . . » 432
Mayer. Sullo spettro d'assorbimento ultravioletto della Buccocanfora (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . . . . » 439
Id. Sullo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcooliche di santonina e di suoi derivati in presenza di alcali (pres. *Id.*) . . . . . . » 442
Quercigh. Sulla vera natura della miersite e della cuproiodargirite (pres. dal Socio *Strüver*) 446
Plate. Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa (pres. dal Socio *Pirotta*) (*) 453
Cotronei. Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri (pres. dal Socio *Grassi*) . . . . . . » »
Amantea. Ricerche sulla secrezione spermatica. Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane (pres. dal Socio *Luciani*) . . . . . . » 457

CORRISPONDENZA

Blaserna (Presidente). Presenta un piego suggellato, inviato dal signor A. Tricca, perchè sia conservato negli Archivi accademici . . . . . . » 461

ERRATA-CORRIGE

A pag. 451, linea 34 invece di *esagonale*, legg. *birifrangente*.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 5 aprile 1914.* N. 7.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 7°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'[illegible]mo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

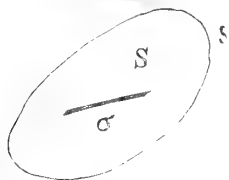
Seduta del 5 aprile 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota I del Socio Carlo Somigliana.

I.

Oggetto di questa Nota è di stabilire nel modo più generale il problema delle deformazioni di un corpo elastico, quando in esso avvengono delle interposizioni o soppressioni di sottili strati di materia lungo una data superficie, e l'equilibrio si ristabilisce senza intervento alcuno di forze esterne.

Deformazioni di questa specie sono state studiate largamente, e con brillante successo, dal prof. Volterra che le chiamò *distorsioni*. Manterremo anche noi questa denominazione, notando però subito che, in ciò che segue, essa assumerà un significato più ampio di quello che essa ha nei lavori del Volterra. Ecco come porremo il problema delle distorsioni.

Sia S lo spazio occupato dal corpo elastico, s la superficie che lo limita. Sia poi σ una superficie che supporremo dapprima, per semplicità, tutta

interna al corpo; lungo di essa immaginiamo venga eseguito un taglio. Le due faccie del taglio siano poi spostate arbitrariamente l'una rispetto all'altra, in modo da lasciare un piccolo spazio vuoto, che allora supporremo riempito da nuovo materiale; oppure in modo da penetrare nelle parti contigue del corpo, nel qual caso supporremo soppresse queste parti che verrebbero in certo modo ad essere doppiamente riempite del materiale del corpo. In entrambi i casi supporremo saldati i lembi del taglio fra loro o col materiale aggiunto.

L'intuizione ci dice che uno stato speciale di tensione, e di equilibrio, si deve determinare nel corpo.

Vediamo di studiare la quistione analiticamente e col sussidio dell'ordinaria teoria dell'elasticità.

Le condizioni che devono essere soddisfatte lungo il taglio σ sono quelle che ci dicono che i punti corrispondenti sulle due faccie del taglio devono subire spostamenti differenti in modo o da lasciare il vano nel quale avviene la infiltrazione di materia, o da determinare il sottile strato che deve essere soppresso. In un punto qualunque di σ, indicando con u_σ, v_σ, w_σ delle funzioni arbitrarie dell'ordine di grandezza degli spostamenti elastici u, v, w; con ν, ν' le normali alle due faccie di σ; con u_ν, v_ν, w_ν le componenti degli spostamenti elastici pei punti della faccia di normale ν, e analogamente con $u_{\nu'}$, $v_{\nu'}$, $w_{\nu'}$ i valori corrispondenti per l'altra faccia, dovremo avere

$$(1_a) \qquad u_\nu - u_{\nu'} = u_\sigma \quad , \quad v_\nu - v_{\nu'} = v_\sigma \quad , \quad w_\nu - w_{\nu'} = w_\sigma \,.$$

Inoltre non devono intervenire forze esterne, nè di massa, nè superficiali. Indicando perciò con la solita notazione i coefficienti di tensione, se n è la normale interna ad s, dovremo avere sopra questa superficie

$$(2) \qquad X_n = 0 \quad , \quad Y_n = 0 \quad , \quad Z_n = 0$$

e sulla superficie σ

$$(1_b) \qquad X_\nu + X_{\nu'} = 0 \quad , \quad Y_\nu + Y_{\nu'} = 0 \quad , \quad Z_\nu + Z_{\nu'} = 0 \,.$$

Difatti perchè sussista l'equilibrio delle tensioni lungo σ è necessario che i due vettori che rappresentano le tensioni elastiche sull'una e sull'altra faccia di σ si facciano equilibrio.

A rigore queste condizioni dovrebbero essere soddisfatte sulle due faccie *spostate* di σ; ma, come sempre si fa nella teoria dell'elasticità, supposti piccolissimi gli spostamenti, ammetteremo che le condizioni stesse siano soddisfatte sulla σ.

Ora è facile vedere che le condizioni poste sono sufficienti ad individuare, anche dal punto di vista analitico, la deformazione del corpo.

Sia E la funzione che rappresenta l'energia elastica e che è, come sappiamo, una funzione quadratica positiva dei sei coefficienti di deformazione

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z} \, ,$$

$$y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \, ,$$

per cui si ha

$$2\mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_x} x_x + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y_y} y_y + \cdots + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_y} x_y$$

ed inoltre, come è noto,

$$\mathrm{X}_x = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_x} \quad , \quad \mathrm{Y}_y = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y_y} , \; \ldots \quad \mathrm{X}_y = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x_y} \, .$$

In queste condizioni, ammesse soddisfatte le equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\frac{\partial \mathrm{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{X}_z}{\partial z} = 0 \, , \; \ldots$$

si trova subito

$$\int_{\mathrm{S}} 2\mathrm{E} d\mathrm{S} = -\int_\sigma (\mathrm{X}_\nu u_\nu + \mathrm{Y}_\nu v_\nu + \mathrm{Z}_\nu w_\nu) \, d\sigma - \int_\sigma (\mathrm{X}_{\nu'} u_{\nu'} + \mathrm{Y}_{\nu'} v_{\nu'} + \mathrm{Z}_{\nu'} w_{\nu'}) \, d\sigma$$
$$- \int_s (\mathrm{X}_n u + \mathrm{Y}_n v + \mathrm{Z}_n w) \, ds \, ,$$

e quindi se si ammette che siano soddisfatte le $(1_{a,b})$ e le (2) si ha

$$\text{(A)} \qquad \int_{\mathrm{S}} 2\mathrm{E} d\mathrm{S} = -\int_\sigma (\mathrm{X}_\nu u_\sigma + \mathrm{Y}_\nu v_\sigma + \mathrm{Z}_\nu w_\sigma) \, d\sigma \, .$$

Questa relazione ci prova quanto abbiamo asserito. Da essa infatti risulta che la deformazione risultante dalla differenza di due deformazioni, che soddisfacessero entrambe alle $(1_{a,b})$ (2), sarebbe tale da annullare l'espressione della energia elastica. Essa rappresenterebbe cioè uno spostamento rigido del corpo. La deformazione che soddisfa alle equazioni indefinite dell'equilibrio ed alle condizioni superficiali $(1_{a,b})$ (2) è quindi univocamente determinata all'infuori di uno spostamento rigido, dal quale si può sempre fare astrazione nelle quistioni d'equilibrio elastico.

Queste considerazioni stanno qualunque sia la struttura del corpo dal punto di vista elastico, sia esso cioè isotropo od anisotropo.

Noi possiamo quindi stabilire di chiamare distorsione qualunque deformazione prodotta in un corpo elastico qualsiasi da uno strato di

discontinuità, nel senso precedentemente indicato quando non intervengano forze esterne a ristabilire l'equilibrio.

Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso in cui σ incontra la superficie s.

II.

Le relazioni $(1_{a,b})$ devono valere lungo tutta la superficie σ e comprendono tutte le condizioni meccaniche relative alla distorsione da aggiungersi alle equazioni indefinite dell'equilibrio. Le (1_a) potranno quindi essere derivate lungo direzioni tangenti alla σ e potremo da esse dedurre nuove condizioni parimenti necessarie.

Data l'invarianza delle relazioni precedenti rispetto alla posizione degli assi coordinati, per studiare il significato delle $(1_{a,b})$ in un punto generico di σ, potremo fissare che gli assi siano presi in modo che la direzione positiva dell'asse z coincida con la direzione della normale ν in quel punto. Due direzioni ortogonali arbitrariamente scelte nel piano tangente a σ, che supporremo sempre determinato, daranno le direzioni degli assi delle x e delle y.

Potremo quindi derivare le (1_a) rispetto ad x e ad y. E per brevità indicheremo con $D[f]$ il salto che una funzione f subisce nel passaggio attraverso σ nella direzione di ν. Cioè se f_ν ed $f_{\nu'}$ sono rispettivamente i valori di f sulle due faccie di σ, porremo

$$D[f] = f_\nu - f_{\nu'} .$$

Dalle (1_a) allora derivando rispetto ad y troviamo

$$D[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \quad , \quad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} . \tag{3}$$

Queste equazioni ci determinano le discontinuità attraverso la superficie σ di tre dei sei coefficienti di deformazione; è facile vedere che le (1_b) ci determinano le discontinuità dei rimanenti tre. Esse infatti possono essere scritte, tenendo conto dell'attuale orientazione degli assi

$$D[X_z] = 0 \quad , \quad D[Y_z] = 0 \quad , \quad D[Z_z] = 0$$

e siccome X_z , Y_z , Z_z sono funzioni lineari indipendenti dei sei coefficienti di deformazione, le equazioni precedenti, tenendo conto delle (3) potranno porsi sotto la forma

$$D[a_{3i} z_z + a_{4i} y_z + a_{5i} z_x] = -\left[a_{1i} \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i} \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i} \left(\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} \right) \right]$$
$$i = 3, 4, 5$$

ove le a_{ih} sono delle costanti, che rappresentano i coefficienti dell'espressione dell'energia. E siccome le stesse equazioni possono scriversi anche sotto la forma

$$(4) \qquad a_{3i}\,D[z_z] + a_{4i}\,D[y_z] + a_{5i}\,D[z_x] =$$
$$= -\left[a_{1i}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i}\frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}\right)\right]$$

risolvendo rispetto a $D[z_z]$, $D[y_z]$, $D[z_x]$ avremo le discontinuità richieste.

Nel caso dell'isotropia queste equazioni sono

$$D[X_z] = \mu\, D[x_z] = 0 \quad , \quad D[Y_z] = \mu\, D[y_z] = 0 \,,$$
$$D[Z_z] = D[\lambda(x_x + y_y) + (\lambda + 2\mu)\, z_z] = 0 \,,$$

ove λ, μ sono le solite costanti dell'isotropia.

Abbiamo di qui

$$D[x_z] = 0 \quad , \quad D[y_z] = 0$$
$$D[z_z] = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Possiamo dunque concludere *che le condizioni poste rispetto alla superficie* σ, *cioè le* $(1_{a,b})$, *determinano in modo completo le discontinuità che attraversando questa superficie debbono subire tutti i sei coefficienti di deformazione*

$$x_x \quad y_y \quad z_z \quad y_z \quad z_x \quad x_y \,.$$

Da ciò segue che fissando, come ha fatto Weigarten [1], per definire le distorsioni, che i sei coefficienti di deformazione debbono essere continui attraverso il taglio, *si vengono a porre delle condizioni nuove ad un problema già per se stesso fisicamente e analiticamente determinato*, cioè si viene a trattare un problema speciale, della cui opportunità può discutersi sotto altri punti di vista.

Giova però osservare che se la continuità di tutti i coefficienti di deformazione, e quindi di quelli di tensione, porta a considerare nell'intorno di un punto qualunque appartenente al taglio una distribuzione di tensioni analoga a quella che si ha nei punti ordinarî del corpo, in modo cioè, come si esprime il Volterra, che non resti traccia del taglio, e della interposizione o sottrazione di materia, anche nel caso più generale nostro non si ha, nell'intorno dei punti del taglio, una distribuzione di tensioni che contraddica alle ordinarie leggi dell'equilibrio. Difatti queste sono completamente rispettate per gli elementi superficiali tangenti a σ. E per quelli che attraversano

[1] *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1901.

questa superficie avviene invece che possono considerarsi come separati in due elementi, l'uno situato da una parte e l'altro dall'altra di σ, ciascuno dei quali per se stesso è soggetto a due tensioni uguali e contrarie (a cagione della continuità lungo σ) come ordinariamente avviene per tutti gli elementi superficiali interni ad un corpo elastico. Queste due porzioni dell'elemento sono quindi in equilibrio, ciascuna separatamente, sebbene soggette a tensioni generalmente diverse.

Da ciò che precede possiamo dedurre le condizioni perchè tutti i sei coefficienti di deformazione (e quindi di tensione) siano continui attraverso il taglio, cioè si verifichi la distribuzione supposta da Weingarten. Queste condizioni, in base alle (3) (4), sono evidentemente le seguenti

$$(5) \qquad \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} = 0 \, .$$

Il Weingarten ha dato una interpretazione geometrica di tali condizioni che egli ha trovato sotto altra forma.

Notiamo intanto che in queste relazioni gli assi x, y si devono intendere appartenenti ad una terna di assi variabili da punto a punto sopra σ, in modo che l'asse delle z sia sempre coincidente colla normale alla superficie.

Il significato delle (5) è allora che nel passaggio dalla superficie σ a quella infinitamente vicina che si ottiene facendo subire ad ogni punto uno spostamento di componenti u_σ, v_σ non vi sono nè allungamenti lineari, nè variazioni nell'angolo di due direzioni ortogonali; ossia l'elemento superficiale si mantiene rigido. Il che porta, secondo anche Weingarten, alla condizione che le due superficie debbano essere applicabili.

Qui però conviene aggiungere un'osservazione di notevole importanza.

Noi possiamo infatti soddisfare alle (5), oltre che nel modo anzidetto, anche supponendo che le u_σ, v_σ siano nulle in tutti i punti della superficie e attribuendo alla w_σ valori arbitrarî. La discontinuità si conserva quindi per la sola componente normale.

Esiste quindi una distorsione che soddisfa alle condizioni di Weingarten (cioè alla condizione che siano continui tutti i coefficienti di deformazione attraverso σ) e che si ottiene spostando normalmente al taglio tutte le coppie di punti corrispondenti sulle due faccie di esso.

Questa distorsione è completamente sfuggita al Weingarten. Io ho già avuto occasione di segnalarla in un caso speciale, quello in cui σ è piana [1].

Naturalmente questa distorsione può sussistere insieme a quella precedentemente considerata; e così dalla sovrapposizione delle due si ha il tipo

[1] *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* Atti del IV Congresso dei Matematici. Roma, 1908.

più generale delle distorsioni, che nella citata Comunicazione al Congresso di Roma ho proposto di chiamare *di Weingarten*.

Questo risultato risolve così in modo completo la quistione relativa alle condizioni perchè una distorsione sia di Weingarten. Il risultato a cui ero giunto nel caso di un taglio piano si estende in modo semplicissimo e diretto al caso di un taglio secondo una superficie qualunque ([1]).

III.

È nota la corrispondenza che esiste fra i problemi della Statica elastica ed alcuni problemi della teoria del potenziale, corrispondenza che è stata la base delle geniali ricerche del Betti nella Teoria dell'elasticità.

Nella teoria delle distorsioni questa corrispondenza è stata interpretata dal Volterra come una analogia fra idrodinamica ed elastostatica. Vediamo quale sia il significato dei precedenti risultati sotto questo punto di vista.

Proponiamoci il problema di trovare una funzione V armonica in uno spazio S, la quale debba avere sulla superficie s la derivata normale interna nulla, e sia sempre regolare essa e le sue derivate prime e seconde in tutto S, eccetto che sopra una superficie σ, interna ad S, attraverso la quale essa debba avere assegnate discontinuità, mentre la derivata normale si conserva continua.

Debbasi cioè avere

$$(6_a) \qquad \Delta_2 V = 0 \quad \text{in tutto S}$$

$$(6_b) \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sopra } s$$

$$(6_c) \qquad V_\nu - V_{\nu'} = g\,, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial \nu'} = 0 \quad \text{sopra } \sigma$$

ove g è una funzione arbitrariamente data, che supporremo però regolare, in tutti i punti di σ.

È facile vedere che la V, dalle condizioni precedenti, è univocamente determinata all'infuori di una costante additiva.

Si ha infatti dalle (6_a)

$$\int_S \Delta_1 V dS = -\int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int_\sigma V_\nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - \int_\sigma V_{\nu'} \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma$$

([1]) Devo qui notare che pressochè nella stessa epoca in cui compariva la Nota del Weingarten, il prof. Gebbia, in una Memoria degli Annali di Matematica: *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici* (Ser. III, tom. VII, 1902). considerava le deformazioni elastiche per interposizione o soppressione di materia, con concetti che in parte collimano con quelli dai quali noi siamo partiti.

e quindi per le $(6_{b,c})$

$$\int \Delta_1 V dS = -\int_\sigma (V_\nu - V_{\nu'}) \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = -\int_\sigma g \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma .$$

Questa relazione è l'analoga della (A) e ci dice subito che due funzioni le quali soddisfacciano alle $(6_{a,b,c})$ non possono differire che per una costante. Il problema proposto è nella teoria del potenziale l'analogo del problema delle distorsioni, come noi l'abbiamo posto, nella statica elastica.

Osserviamo ora che mentre la seconda delle (6_c) determina il modo di comportarsi della derivata normale di V attraverso σ, la prima assegna invece determinate discontinuità per le derivate tangenziali. Assumendo infatti gli assi x, y nel piano tangente in un punto di σ, troviamo

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial x} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V_\nu}{\partial y} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial y} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial y} .$$

E analogamente derivando un'altra volta rispetto ad x e ad y ricaviamo

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x \partial y} .$$

Risultano così determinate dalla prima equazione (6_c) le discontinuità di tre delle derivate seconde. Dalla seconda delle (6_c), che può scriversi

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial z} = \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial z} ,$$

derivando rispetto ad x, e y abbiamo le discontinuità (che in questo caso sono nulle) di altre due

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x \partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y \partial z} ,$$

e finalmente la discontinuità della sesta derivata risulta determinata dalla equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2} .$$

Possiamo dunque concludere che le due relazioni (6_c) determinano le discontinuità di tutte le derivate prime e seconde della funzione V.

Che la funzione V possa effettivamente esistere risulta subito dall'osservare che per le condizioni $(6_{b,c})$ si ha

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma = 0 .$$

Come possa determinarsi risulta dalle considerazioni seguenti. Poniamo

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma ,$$

ove r indica la distanza da un punto generico di σ, e, indicando con U una nuova funzione da determinarsi invece di V, poniamo

$$V = U + W .$$

Cerchiamo a quali condizioni deve soddisfare la U. Per le proprietà ben note dei potenziali di doppio strato, avendosi sopra σ

$$W_\nu - W_{\nu'} = g$$

dovremo avere

$$(7_a) \qquad U_\nu - U_{\nu'} = 0 .$$

La U sarà quindi continua attraverso σ, e dovranno essere parimenti continue tutte le sue derivate prime e seconde. Difatti dalla seconda delle (6_c) e per le proprietà delle derivate normali della W, dovrà essere

$$(7_b) \qquad \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu'} = 0 .$$

E da questa relazione insieme alla (7_a), col procedimento precedentemente indicato, risulta appunto la continuità di tutte le derivate prime e seconde. In altri termini siccome la funzione W e le sue derivate prime e seconde hanno su σ le stesse discontinuità che deve avere la V, la funzione U e le sue derivate prime e seconde dovranno essere continue.

Quindi U dovrà essere in S armonica, finita e continua insieme a tutte le sue derivate prime e seconde; inoltre sulla superficie s dovrà soddisfare alla condizione

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial n} ,$$

mentre d'altra parte si ha

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = - \int_s \frac{\partial W}{\partial n} ds - \int_\sigma \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \nu'} \right) d\sigma = \int_S \Delta_2 W dS = 0 .$$

Il problema è quindi ridotto alla determinazione di una funzione armonica e regolare in uno spazio S della quale sono assegnati i valori della derivata normale sulla superficie s, che ne forma il contorno. Per quanto è noto una tale funzione esiste sempre.

Conviene però osservare che pei punti della linea che forma il contorno di σ possono presentarsi in certi casi degli infiniti per le derivate della funzione W e quindi anche di V. Però tali infiniti vengono a scomparire se si suppone che sul contorno di σ si annulli la funzione g, insieme ad alcune sue derivate tangenziali.

Una osservazione di questo genere, per quanto riguarda il problema elastico, si trova nella citata mia Comunicazione al Congresso dei Matematici.

Il problema d'idrodinamica che corrisponde al problema analitico ora considerato è il seguente:

In uno spazio S, *a pareti rigide esiste una fessura* σ; *da ogni elemento superficiale di questa esce da una parte, e si assorbe dall'altra, una uguale quantità di un fluido incomprensibile nell'unità di tempo. Determinare il moto stazionario, non rotatorio del fluido, che ne consegue.*

È chiaro che un moto stazionario di questa specie può avvenire anche se lo spazio S è semplicemente connesso linearmente. Il che invece, come è ben noto, non potrebbe accadere se non vi fosse immissione od assorbimento di fluido.

A rigore nel problema enunciato il potenziale di velocità V non è determinato direttamente dalla funzione g, ma dal flusso $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ attraverso gli elementi di σ. Ma non è qui il caso di ricercare le relazioni che passano fra g e $\frac{\partial V}{\partial \nu}$.

Da quanto abbiamo detto segue poi che il caso di g costante deve essere escluso, poichè allora comparirebbero effettivamente dei valori infiniti per le derivate prime di W sulla linea del contorno di σ. Il problema idrodinamico diviene, in questo caso, quello del moto determinato nel fluido da una linea vorticosa coincidente colla linea del contorno della superficie σ. (Cfr. Lamb., *Hydrodynamics*, art. 148).

Il procedimento precedente che riconduce la determinazione della funzione V al cosidetto secondo problema di Dirichlet, suggerisce un procedimento per risolvere per via analoga, il problema delle distorsioni di un corpo elastico. Un tale concetto fu già sostanzialmente applicato dal Volterra nei casi da lui trattati.

Per estenderlo al caso nostro dobbiamo trovare la deformazione che corrisponde nella statica elastica al potenziale W di doppio strato. Di tal quistione ci occuperemo in una Nota successiva.

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli.* Nota del Socio ANGELO ANGELI.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. ALMANSI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

In questa Nota ci proponiamo dapprima di eseguire l'inversione di certi integrali o, come al presente si preferisce di dire, di risolvere certe equazioni integrali di Volterra di prima specie. Gli sforzi fatti in quest'ordine di studî hanno avuto per scopo di preparare il materiale occorrente all'integrazione di una speciale categoria di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra. Però ci è parso che queste ricerche sull'inversione di integrali abbiano anche un valore loro proprio. Ed è perciò che la loro esposizione non è stata ristretta a quella parte di esse che è strettamente necessaria al conseguimento del principale scopo prefissoci. D'altra parte dobbiamo pure osservare che, mentre i risultati che esponiamo nella presente Nota sul problema dell'inversione di integrali sono suscettibili di ulteriori estensioni, in varii sensi, essi non contengono tutto quello che è indispensabile per risolvere, in tutti i casi, il problema di integrazione propostoci e di cui tratteremo nell'ultima parte di questa stessa Nota. Al fine di completare questi studii, abbiamo in animo di ritornare sull'argomento in una prossima occasione.

I.

Si tratti, in primo luogo, di determinare la funzione $\varphi(x)$ dall'equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{I}_n(x-\xi)\, d\xi = \Phi(x)\,, \tag{1}$$

dove n è un numero intero e

$$(2)\qquad I_n(t)=\sum_1^{\infty}{}_i\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,(n+i)!},$$

supposto, s'intende, che l'equazione (1) sia possibile, ciò che richiede che $\Phi(x)$ si annulli, per $x=0$, di ordine $n+1$.

Per risolvere questa quistione, partiamo dalla formola

$$(3)\qquad I_1(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_0(x_1-\xi)\,I_1(\xi-x_0)}{\xi-x_0}\,d\xi\,,$$

che abbiamo dimostrata in una Nota precedente [1], e teniamo presenti le notissime relazioni fra le funzioni I di diversi indici che andiamo a scrivere:

$$(4)\qquad I_0'(t)=I_1(t)\ ,\ I_1'(t)-\frac{1}{t}I_1(t)=I_2(t)\ ,\ 2I_n'(t)=I_{n+1}(t)+I_{n-1}(t)\,,$$

dove l'accento è simbolo di derivata. Derivando la (3) rispetto ad x_1 e tenendo conto delle due prime relazioni (4), si trova subito

$$(5)\qquad I_2(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_1(x_1-\xi)\,I_1(\xi-x_0)}{\xi-x_0}\,d\xi\,.$$

Vogliamo ora dimostrare che sussiste la formola generale

$$(6)\qquad I_n(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n-1}(x_1-\xi)\,I_1(\xi-x_0)}{\xi-x_0}\,d\xi$$

che si può porre anche sotto la forma

$$(6')\qquad I_n(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_1(x_1-\xi)\,I_{n-1}(\xi-x_0)}{x_1-\xi}\,d\xi\,.$$

Poichè la (6) è giusta per $n=1$ e per $n=2$, per dimostrarla in generale, basta far vedere che, se essa è vera per un determinato valore di n, è vera anche per il valore successivo. E, per questo, basta derivare la (6), rispetto ad x_1, e tener conto dell'ultima delle (4).

Alla (6) si può dare anche l'aspetto seguente

$$(6'')\qquad 2I_n'(x_1-x_0)-I_{n-1}(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_n(x_1-\xi)\,I_1(\xi-x_0)}{\xi-x_0}\,d\xi\,.$$

Per determinare ora la funzione φ dall'equazione (1) si moltiplichino ambo i membri di essa per $\frac{I_1(x_1-x)}{x_1-x}dx$ e s'integri poi, rispetto ad x, fra 0 ed x_1. Troviamo così col solito scambio delle integrazioni e con l'aiuto

[1] Questi Rendiconti. Seduta 31 maggio 1913.

della (6''),

$$\int_0^{x_1} \varphi(\xi) \{ 2\mathrm{I}'_n(x_1 - \xi) - \mathrm{I}_{n-1}(x_1 - \xi) \} d\xi = \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx ,$$

da cui, supponendosi $n > 0$,

$$(7) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(\xi)\, \mathrm{I}_{n-1}(x_1 - \xi)\, d\xi = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx .$$

A questo modo siamo passati dall'equazione (1) ad un'equazione analoga in cui n è sostituito con $n - 1$. Ripetendo n volte questo procedimento si perverrà ad una equazione integrale di prima specie il cui nucleo sarà $\mathrm{I}_0(x_1 - \xi)$ e che quindi sappiamo risolvere.

La formola di risoluzione della equazione (1), a cui così perveniamo, si semplifica tenendo conto della identità

$$(8) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} = \int_x^{x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{\mathrm{I}_1(\xi - x)}{\xi - x} d\xi ,$$

la quale è un caso particolare di un'identità più generale che presto dimostreremo.

II.

Poniamo, per n, nella (6''), una volta $n - 1$ ed un'altra volta $n + 1$. Sommando e sottraendo le due equazioni, risultanti, membro a membro, otteniamo le altre due equazioni seguenti:

$$(9) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{I}'_n(x_1 - x_0) - \mathrm{I}'_{n-1}(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}'_n(x_1 - \xi)\, \mathrm{I}_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} d\xi ,$$

$$(10) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{n-1}{n} \frac{\mathrm{I}_{n-1}(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{\mathrm{I}_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} d\xi .$$

Queste equazioni fanno dipendere la risoluzione delle equazioni integrali di Volterra di prima specie i cui nuclei sono $\mathrm{I}'_n(x_1 - x)$, $\frac{\mathrm{I}_n(x_1 - x)}{x_1 - x}$ dalla risoluzione delle equazioni analoghe i cui nuclei sono, rispettivamente, $\mathrm{I}'_0(x_1 - x) = \mathrm{I}_1(x_1 - x)$ e $\frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x}$, la prima delle quali sappiamo risolvere. Vogliamo mostrare che anche l'altra, cioè

$$(11) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx = \Phi(x_1) ,$$

si può agevolmente risolvere. Da essa abbiamo infatti, a causa della (8) che si deduce dalla (10) per $n = 1$,

$$\int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx .$$

Sottraendo questa equazione, membro a membro, da quella che si ottiene derivando la (11) rispetto ad x_1, abbiamo subito

$$\varphi(x_1) = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx . \tag{12}$$

III.

Passiamo adesso a risolvere l'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^n I_n(x-\xi)\,d\xi = \Phi(x), \qquad n > 0 \tag{13}$$

supposto, naturalmente, che essa sia possibile. Deriviamo perciò la (13), rispetto ad x, tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x-\xi)^n I_n(x-\xi)\Big] = (x-\xi)^n I_{n-1}(x-\xi) . \tag{14}$$

Perveniamo così all'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^n I_{n-1}(x-\xi)\,d\xi = \Phi'(\xi) . \tag{15}$$

Deriviamo ancora la (15) rispetto ad x nei due modi seguenti: una volta considerando la funzione $(x-\xi)^n I_{n-1}(x-\xi)$ come prodotto di $x-\xi$ e di $(x-\xi)^{n-1} I_{n-1}(x-\xi)$ ed applicando ancora la (14), un'altra volta considerando la stessa funzione come prodotto di $(x-\xi)^n$ e di $I_{n-1}(x-\xi)$ ed applicando la terza delle (4). Si arriva così alle equazioni:

$$\int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^{n-1} I_{n-1}(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^n I_{n-2}(x-\xi)\,d\xi = \Phi''(x),$$

$$n\int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^{n-1} I_{n-1}(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^n I_{n-2}(x-\xi)\,d\xi = 2\Phi''(x) - \Phi(x)$$

e, sottraendo, membro a membro, la prima dalla seconda, si trova

$$\int_0^x \varphi(\xi)(x-\xi)^{n-1} I_{n-1}(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\Phi(x) . \tag{16}$$

Con ripetuta applicazione di questo procedimento, abbiamo

$$\int_0^x \varphi(\xi) I_0(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^n \Phi(x) \tag{16'}$$

equazione, questa, che sappiamo risolvere.

IV.

Alla funzione $I_n(t)$ si dà un significato per ogni valore di n convenendo che

$$(17)\qquad I_n(t)=\sum_0^\infty{}_i\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,\Pi(n+i)}\ ,\qquad \Pi(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^\alpha\,dx\,.$$

Anche in questa ipotesi più generale vale la relazione (14), e quindi, data l'equazione integrale (13) con n qualunque, vale pure sempre la (16) per lo stesso valore di n. Quando n è la metà di un intero dispari, ripetendo il procedimento di riduzione $n-\frac{1}{2}$ volte, dalla (13) si ottiene

$$(18)\qquad \int_0^x\varphi(\xi)\,(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\,I_{\frac{1}{2}}(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n-\frac{1}{2}}\Phi(x)\,,$$

ossia, notando che

$$(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\,I_{\frac{1}{2}}(x-\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Sen}\,(x-\xi)\,,$$

dove il simbolo $\mathrm{Sen}\,(x-\xi)$ indica il seno iporbolico di $x-\xi$, anche

$$(18')\qquad \int_0^x\varphi(\xi)\,\mathrm{Sen}\,(x-\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\,.\,4\,.\,...\,(2n-1)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n-\frac{1}{2}}\Phi(x)\,.$$

E basta derivare due volte, rispetto ad x, questa equazione, per avere

$$(19)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2n-1)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{d^2}{dx^2}-1\right)^{n+\frac{1}{2}}\Phi(x)\,.$$

Sappiamo quindi risolvere la (13) anche quando n è la metà di un intero dispari, anzi in questo caso essa si risolve con solo operazioni di derivazione.

V.

Sia data ora l'equazione a derivate parziali a coefficienti costanti di tipo iperbolico

$$(20)\qquad \sum_1^n{}_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}+\varphi=0\,.$$

e proponiamoci di integrarla col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra.

L'equazione precedente corrisponde soltanto ad un tipo particolare di equazioni iperbolichè a coefficienti costanti. Il caso generale è stato preso in

considerazione dal Coulon nella sua bella tesi [1], ma esso dà luogo ad un problema d'inversione avente caratteri diversi e più complessi di quello a cui dà luogo il caso particolare che abbiamo preso in esame ed a cui soltanto vogliamo attenerci.

Escludiamo momentaneamente il caso $n=1$ di cui vogliamo occuparci a parte più tardi. Allora l'ipercono caratteristico dell'equazione (20) che ha il vertice nel punto (x_i, t) dello spazio lineare (ξ_i, τ), nel quale, come si suole, faremo le nostre considerazioni, ha per equazione

$$(21) \qquad (t-\tau)^2 - r^2 = 0 \quad , \quad r^2 = \sum_1^n {}_i (x_i - \xi_i)^2 .$$

Questo ipercono divide lo spazio lineare ad $n+1$ dimensioni (ξ_i, τ) in tre regioni indefinite e connesse, cioè quella in cui $r^2 > (t-\tau)^2$ e le due in cui $r^2 < (t-\tau)^2$ con $\tau > t$, ovvero con $\tau < t$, e di queste tre regioni soltanto le ultime due sono semplicemente connesse. Noi vogliamo applicare il metodo di Riemann-Volterra solo in una di queste due ultime regioni e, per fissare le idee, stabiliremo di rimanere nella ragione in cui $r^2 < (t-\tau)^2, \tau < t$.

La soluzione fondamentale, nel metodo di Riemann-Volterra, non è completamente determinata come accade, invece, nel metodo di Riemann propriamente detto, per $n=1$; circostanza, questa, che è lungi dal riuscire di imbarazzo. Noi sceglieremo queste soluzioni fondamentali com'è stato fatto dal Coulon, ponendo:

$$(22) \quad \varphi' = (t-\tau)^\lambda \psi(\theta) f(z) \quad , \quad \theta = \frac{r^2}{(t-\tau)^2} \quad , \quad z = \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} .$$

Sostituendo, per φ, questa espressione di φ', nella (20), si vede subito che la detta equazione è soddisfatta assoggettando le due funzione ψ ed f a soddisfare alle equazioni:

$$(23) \qquad \theta(1-\theta)\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \left(\frac{n}{2} + \frac{2\lambda-3}{2}\theta\right)\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{\lambda}{2}\frac{\lambda-1}{2}\psi = 0 ,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{n+2\lambda}{z}\frac{df}{dz} - f = 0 .$$

La funzione φ' dev'essere determinata in modo che, per $z=0$, ossia sulla varietà conica caratterisrica $(t-\tau)^2 - r^2 = 0$, si annulli e per $r=0$ sia:

$$\lim_{r=0} r^{n-1} \varphi' = 0 \quad , \quad \lim r^{n-1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = G(t-\tau) ,$$

G essendo il simbolo di funzione determinata.

[1] Paris, Hermann, 1902.

L'integrale della (24) che resta finito per $z=0$ è determinato a meno di un fattore costante e lo assumeremo sotto la forma

$$(25) \qquad z^{-\frac{n+2\lambda-1}{2}} \, I_{\frac{n+2\lambda-1}{2}}(z) .$$

Possiamo prendere inoltre, per ψ, la funzione

$$(26) \quad \psi = \theta^{\frac{2-n}{2}} (1-\theta)^{\frac{n+2\lambda-1}{2}} F\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{n+2\lambda+1}{2}, 1-\theta\right),$$

dove F è il simbolo di funzione ipergeometrica; questa funzione, infatti, soddisfa alla (23) e si annulla per $\theta=1$ se

$$(27) \qquad n+2\lambda-1>0.$$

λ resta allora arbitrario essendo, fissato n, soggetto soltanto a soddisfare alla diseguaglianza precedente ed alle altre condizioni perchè la serie

$$F\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{n+2\lambda+1}{2}, 1\right)$$

sia convergente, ossia alle altre condizioni:

$$(27') \qquad n+\lambda-1>0 \,, \lambda+2>0 \,, n-2>0.$$

Lasciamo da parte il caso $n=2$ che si presenta con caratteri eccezionali e di cui desideriamo occuparci in seguito. Non diremo parola sul caso $n=3$ di cui ci siamo occupati nelle Note precedenti, e supporremo perciò che sia $n \geq 4$. In questa ipotesi soddisfacciamo alle condizioni (27) e (27') prendendo $\lambda=-1$ e quindi

$$(26') \qquad \psi = \theta^{\frac{2-n}{2}} (1-\theta)^{\frac{n-3}{2}} = \left(\frac{t-\tau}{r}\right)^{n-2} \left[1-\frac{r^2}{(t-\tau)^2}\right]^{\frac{n-3}{2}} .$$

Scegliendo φ' a questo modo, abbiamo:

$$\lim_{r=0} r^{n-1} \varphi' = 0 \quad , \quad \lim_{r=0} r^{n-1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = (2-n)(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau).$$

Chiamando poi Σ_n la porzione di una varietà regolare ad n dimensioni la quale abbia la proprietà di essere incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ, nello spazio (ξ_i, τ), compresa nell'interno della regione $r^2<(t-\tau)^2$, $\tau<t$, avremo, subito, col solito procedimento, indicando con φ una soluzione regolare della (16) e con $D\varphi$ il simbolo di derivata conormale,

$$(28) \quad 2(n-2) \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i, \tau)(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_n} (\varphi D\varphi' - \varphi' D\varphi)\, d\Sigma_n ,$$

dove t_0 indica il valore di τ nel punto d'incontro di Σ_n con la retta $r=0$.

Nella equazione (28) n è un numero intero maggiore di 3 e quindi, per quello che abbiamo precedentemente stabilito, sappiamo determinare la funzione φ qualunque sia $n > 3$.

VI.

A solo titolo di complemento a ciò che è stato precedentemente esposto, aggiungiamo le osservazioni seguenti. Nel caso $n = 1$ si ha un solo tipo di equazioni iperboliche a coefficienti costanti che può sempre ridursi alla forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varphi = 0\,, \tag{29}$$

e questa equazione s'integra nel modo più felice col metodo delle caratteristiche di Riemann propriamente detto. Questa integrazione può, però, conseguirsi anche col metodo di Riemann-Volterra.

Le due caratteristiche uscenti dal punto $(x\,, t)$ del piano $(\xi\,, \tau)$ dividono questo piano in quattro regioni illimitate semplicemente connesse, e le nostre considerazioni possono aver luogo, indifferentemente, in una qualunque di esse. Restiamo in quella in cui $\xi \leqq \tau$ e $\tau < t$, e supponiamo che sia limitata da una linea s.

La retta $\xi = x$ divide la regione finita così risultante in due regioni parziali: una adiacente alla caratteristica $\xi - \tau = x - t$, e l'altra adiacente alla caratteristica $\xi + \tau = x + t$. Basta allora applicare il teorema di reciprocità in ciascuna di queste due regioni, assumendo come funzione fondamentale, nella prima,

$$[(t - \tau) - (x - \xi)]\, \frac{I_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}}\,,$$

e, nella seconda

$$[(t - \tau) + (x - \xi)]\, \frac{I_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}}\,,$$

e combinare fra loro le due equazioni risultanti per pervenire subito ad una equazione come la seguente

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(x\,, \tau)\, \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau = \text{funz. nota}$$

che sappiamo risolvere.

Matematica. — *Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Dans une Note présentée le 1[er] mars 1914 à l'Accademia dei Lincei, j'ai indiqué une représentation d'une fonctionnelle continue $\mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\infty}{z(t)}}\Big]\Big|$ d'une fonction réelle continue $z(t)$. M. Volterra m'a fait remarquer que ce résultat pouvait sans doute être appliqué aux fonctionnelles satisfaisant à la condition du cycle fermé.

Pour tous renseignements sur la question du cycle fermé, on pourra se reporter au chapître VII des *Leçons sur les fonctions de lignes* de M. Volterra (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

I. — Le principe du cycle fermé.

2. Soit, dans le champ réel, une fonctionnelle $\mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\Big]\Big|$ de la fonction $z(t)$ définie et continue ainsi que ses p premières dérivées pour $t \leq \theta$.

On dit que cette fonctionnelle *satisfait à la condition du cycle fermé* si, toutes les fois que $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{z(t)}}$ admet la période T, la fonction de θ, $\mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\Big]\Big|$, admet aussi la période T.

On dit qu'elle *satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps*, si la condition

$$\mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\Big]\Big| = \mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\theta-\lambda}{z(t+\lambda)}}\Big]\Big|$$

est vérifiée quel que soit le nombre λ et pour toute fonction $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}$.

3. M. Volterra a démontré une proposition qu'il a appelée *principe du cycle fermé* et que j'énonce d'abord sous la forme générale suivante:

La condition du cycle fermé et la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, sont équivalentes s'il y a dissipation des actions héréditaires; c'est-à-dire si la fonctionelle $\mathrm{U}\Big|\Big[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\Big]\Big|$ est très peu modifiée quand on modifie arbitrairement $z(t)$ pour les valeurs de t inférieures à une certaine limite $\theta - l$.

Avant d'énoncer le principe sous une forme précise, je pose une définition.

Soient $z(t)$ une fonction déterminée; $z_1(t)$ une fonction qui tend, avec ses p premières dérivées, vers la fonction $z(t)$ et ses p dérivées correspondantes, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Si, quel que soit le nombre μ positif ou nul, $\mathrm{U}\Big|\Big[z_1(t+\mu)\Big]_{-\infty}^{\theta-\mu}\Big|$ tend vers $\mathrm{U}\Big|\Big[z(t+\mu)\Big]_{-\infty}^{\theta-\mu}\Big|$ uniformément par rapport à μ, je dirai que $\mathrm{U}\Big|\Big[z(t)\Big]_{-\infty}^{\theta}\Big|$ est *continue d'ordre* p, p pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots$.

Traduisons cette condition en inégalités: étant donnés la fonction $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}$ et le nombre positif ε, on peut déterminer η et l positifs, tels que, si l'on a, dans l'intervalle $(\theta - l, l)$,

$$|z_1(t)-z(t)|<\eta\,,\ |z_1'(t)-z'(t)|<\eta\,,\ \ldots,\ |z_1^{(p)}(t)-z^{(p)}(t)|<\eta\,,$$

on ait, quel que soit le nombre μ positif ou nul,

$$\left|\mathrm{U}\Big|\Big[z_1(t+\mu)\Big]_{-\infty}^{\theta-\mu}\Big| - \mathrm{U}\Big|\Big[z(t+\mu)\Big]_{-\infty}^{\theta-\mu}\Big|\right| < \varepsilon\,.$$

Ceci posé, j'utiliserai le principe sous la forme suivante:

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\Big|\Big[z(t)\Big]_{-\infty}^{\theta}\Big|$ *satisfait à la condition du cycle fermé, et si elle est continue d'ordre* p, *elle vérifie la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps.*

Inversement, si elle satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, elle vérifie la condition du cycle fermé.

II. — Représentation.

4. Le théorème précédent va nous permettre de donner une représentation d'une fonctionnelle $\mathrm{U}\Big|\Big[z(t)\Big]_{-\infty}^{\theta}\Big|$ continue d'ordre p et satisfaisant à la condition du cycle fermé. Cette fonctionnelle vérifie la relation

$$\mathrm{U}\Big|\Big[z(t)\Big]_{-\infty}^{\theta}\Big| = \mathrm{U}\Big|\Big[z(t+\theta)\Big]_{-\infty}^{0}\Big|\,. \tag{1}$$

Tout revient donc à trouver une représentation de $\mathrm{U}\Big|\Big[z(t)\Big]_{-\infty}^{0}\Big|$.

5. J'indique d'abord quelques définitions dont j'aurai besoin par la suite.

Soit θ_0 un nombre déterminé pouvant prendre la valeur $+\infty$. Soit C un ensemble de fonctions $\overset{\theta_0}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ continues, ainsi que leurs p premières dérivées. Je dirai que l'ensemble C est *compact d'ordre p* si de toute infinité de fonctions de C on peut extraire une suite de fonctions tendant, avec leurs p premières dérivées, vers une fonction limite et ses p premières dérivées, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Je dirai qu'un ensemble Γ de fonctions $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, les nombres θ étant finis, est un *ensemble* - C_p, si l'ensemble des fonctions $\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t+\theta)}}$, qu'on déduit de toutes les fonctions de Γ, est compact d'ordre p.

6. Je vais utiliser quelques résultats de ma Note du 1[er] mars (page 311, II, 2). Je les rappelle ici, et comme je me suis mal exprimé dans l'énoncé de l'un d'eux, j'en profite pour le rectifier.

Dans cette Note j'ai désigne par Ω l'ensemble des fonctions continues $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, et par $\Omega(A, B)$ l'ensemble de ces fonctions telles que $A(t) \leq z(t) \leq B(t)$, A et B étant deux fonctions continues.

Soient n un nombre entier positif et $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\zeta_n(t)}}$ une fonction ainsi définie:

$$\zeta_n(t) = \begin{cases} z(t) & \text{quand } |z(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z(t) > n \\ -n & \text{quand } z(t) < -n. \end{cases}$$

Si $U|[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}]|$ *est une fonctionnelle définie et continue d'ordre* 0 *dans* Ω *on peut la représenter par l'expression*

$$U|[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}]| = \lim_{n \to \infty} \left\{ K_{n,0} + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} K_{n,s}(t_1, \dots, t_s)\, \zeta_n(t_1) \dots \zeta_n(t_s)\, dt_1 \dots dt_s \right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 *de fonctions* $z(t)$.

$K_{n,0}$ est une constante; $K_{n,s}$ une fonction continue.

Dans le cas où $U|[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}]|$ *n'est définie et continue d'ordre* 0 *que dans un domaine* $\Omega(A, B)$, *on peut éviter l'emploi des* $\zeta_n(t)$ *et donner pour* U *une représentation de la forme précédente où* $\zeta_n(t)$ *serait remplacée par* $z(t)$.

7. *Fonctionnelle continue d'ordre* 0 *satisfaisant à la condition du cycle fermé.*

Si cette fonctionnelle est $\mathrm{U}|[\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}]|$, il nous faut d'abord une représentation de $\mathrm{U}|[\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t)}}]|$. Appliquons les résultats du n° 6, en prenant 0 comme limite supérieure des intégrales.

Supposons d'abord la fonctionnelle *définie pour toutes les fonctions continues* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$: c'est-à-dire supposons qu'il y ait lieu d'envisager des actions de grandeur illimitée. Alors, les fonctions $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{\zeta_n(t)}}$ étant définies comme au n° 6 à partir de la fonction $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, on a

$$\mathrm{U}|[\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t)}}]| = \lim_{n\to\infty} \left\{ \mathrm{K}_{n,0} + \sum_{s=1}^{rn} \int_{-n}^{0} \cdots \int_{-n}^{0} \mathrm{K}_{n,s}(t_1, \dots, t_s)\, \zeta_n(t_1) \dots \zeta_n(t_s)\, dt_1 \dots dt_s \right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 de fonctions $\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t)}}$.

Si nous appliquons l'égalité (1), et effectuons le changement de variables $t_k + \theta = \tau_k$, nous obtenons la représentation

$$\mathrm{U}|[\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}]| = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{rn} \int_{\theta-n}^{\theta} \cdots \int_{\theta-n}^{\theta} \mathrm{K}_{n,s}(\tau_1 - \theta, \dots, \tau_s - \theta)\, \zeta_n(\tau_1) \dots \zeta_n(\tau_s)\, d\tau_1 \dots d\tau_s \Big\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble - C_0 *de fonctions* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$.

Dans le cas où l'on ne considère que des actions de grandeur limitée, c'est-à-dire que *des fonctions* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ *au plus égales, en valeur absolue, à un certain nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z(\tau)$ au lieu de $\zeta_n(\tau)$.

8. *Fonctionnelle continue d'ordre p satisfaisant à la condition du cycle fermé.* — La condition de continuité est d'autant plus générale et moins restrictive pour la fonctionnelle que p est plus élevé.

Soit n un nombre entier positif. Désignons par $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{\zeta_{n.p}(t)}}$ les fonctions définies de la façon suivante à partir de la dérivée d'ordre p de la fonction $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$:

$$\zeta_{n,p}(t) = \begin{cases} z^{(p)}(t) & \text{quand } |z^{(p)}(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z^{(p)}(t) > n \\ -n & \text{quand } z^{(p)}(t) < -n. \end{cases}$$

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta}$ est *définie pour toutes les fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$ *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre* p, on démontre qu'elle admet la représentation

$$\mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta} = \lim_{n \to \infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} + \\ + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{\theta-n}^{\theta} \cdots \int_{\theta-n}^{\theta} \mathrm{K}_s\left[\tau_1 - \theta, \dots, \tau_s - \theta; z(\theta), z'(\theta), \dots, z^{(p-1)}(\theta)\right] \times \\ \times \zeta_{n,p}(\tau_1) \dots \zeta_{n,p}(\tau_s)\, d\tau_1 \dots d\tau_s \Big\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble - C_p *de fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$.

$\mathrm{K}_{n,0}$ est une constante; K_s une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses $s+p$ variables.

Dans le cas où l'on ne considère que *des fonctions* $z(t)_{-\infty}^{\theta}$ *dont la dérivée d'ordre* p *est au plus égale, en valeur absolue, à un nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z^{(p)}(\tau)$ au lieu de $\zeta_{n,p}(\tau)$.

9. *Cas de convergence uniforme.* — Reprenons le cas d'une fonctionnelle continue d'ordre 0 satisfaisant à la condition du cycle fermé. Supposons, de plus, que les actions $z(t)$ ne puissent dépasser, en valeur absolue, un certain nombre positif M. Alors

$$(2) \qquad \mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]\right|_{-\infty}^{0} = \lim_{n \to \infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} + \\ + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{-n}^{0} \cdots \int_{-n}^{0} \mathrm{K}_{n,s}(t_1, \dots, t_s)\, z(t_1) \dots z(t_s)\, dt_1 \dots dt_s \Big\}$$

$$(3) \qquad \mathrm{U}\left|\left[z(t)\right]\right|_{-\infty}^{\theta} = \lim_{n \to \infty} \Big\{ \mathrm{K}_{n,0} + \\ + \sum_{s=1}^{r_n} \int_{\theta-n}^{\theta} \cdots \int_{\theta-n}^{\theta} \mathrm{K}_{n,s}(\tau_1 - \theta, \dots, \tau_s - \theta)\, z(\tau_1) \dots z(\tau_s)\, d\tau_1 \dots d\tau_s \Big\}.$$

La convergence de la représentation (3) n'est généralement pas uniforme dans tout le domaine D des fonctions continues $\left|z(t)\right|_{-\infty}^{\theta} \leq \mathrm{M}$.

Elle l'est en même temps que celle de la représentation (2). Or j'ai étudié ce dernier problème dans ma Note du 1er mars (page 313), dans le cas où l'intervalle de variation de t est $(-\infty, \infty)$. On passe sans difficulté au

cas où cet intervalle est $(-\infty, 0)$. Finalement, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{U}|[z(t)]|_{-\infty}^{\theta}$ *une fonctionnelle satisfaisant à la condition du cycle fermé, définie dans le domaine* D *des fonctions continues telles que* $|z(t)|_{-\infty}^{\theta} \leq \mathrm{M}$. *Pour qu'elle admette une représentation* (3), *la convergence étant uniforme dans* D, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε:

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *positifs tels que, si l'on a, dans l'intervalle* $(\theta - l, \theta)$, $|z_1(t) - z_2(t)| < \eta$, *on ait*

$$\left| \mathrm{U}|[z_1(t)]|_{-\infty}^{\theta} - \mathrm{U}|[z_2(t)]|_{-\infty}^{\theta} \right| < \varepsilon ;$$

2°) *on puisse déterminer* l' *positif et une division de l'intervalle* $(-l', 0)$ *au moyen de points* $-l'_1, \dots, -l'_p$, *de telle sorte que, si* $z_1(t)$ *et* $z_2(t)$ *ont la même valeur moyenne dans chacun des intervalles partiels* $(\theta - l', \theta - l'_1), \dots, (\theta - l'_p, \theta)$, *on ait*

$$\left| \mathrm{U}|[z_1(t)]|_{-\infty}^{\theta} - \mathrm{U}|[z_2(t)]|_{-\infty}^{\theta} \right| < \varepsilon .$$

Les conditions ainsi imposées à U, correspondent au cas où les actions ont une intensité limitée, où deux séries d'actions dont les intensités sont voisines depuis un temps assez long conduisent à des états actuels voisins, et où les actions oscillatoires à haute fréquence n'agissent que par leurs valeurs moyennes.

Matematica. — *Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche.* Nota di G. SANNIA, presentata dal Socio E. D'OVIDIO.

1. Siano

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 , \tag{1}$$

$$g(z) \equiv b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m = 0 , \tag{2}$$

due equazioni algebriche intere a coefficienti reali o complessi, non aventi radici comuni. Proponiamoci di cercare un limite inferiore μ dei moduli delle differenze tra le radici

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad ; \quad y_1, y_2, \dots, y_m$$

delle due equazioni.

Consideriamo perciò il loro *risultante*

$$\mathrm{R} = \prod_{r,s} (x_r - y_s) \qquad (r = 1, 2, \dots, n ; s = 1, 2, \dots, m) , \tag{3}$$

che è una funzione razionale dei coefficienti, perfettamente nota.

Detto A un numero maggiore dei moduli delle radici della (1) [1], e

[1] Tale è il massimo tra i numeri

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1 , \left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1 , \dots , \left|\frac{a_n}{a_0}\right| + 1 , \tag{a}$$

o un numero maggiore.

detto B un numero non minore dei moduli delle radici della (2), si ha

$$|x_r| < \mathrm{A} \quad , \quad |y_s| \leq \mathrm{B} \, ,$$

quindi

$$|x_r - y_s| \leq |x_r| + |y_s| < \mathrm{A} + \mathrm{B} \, ;$$

e dunque si sostituisce $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ a ciascun fattore del prodotto

$$(4) \qquad |\mathrm{R}| = \prod_{r,s} |x_r - y_s| \, ,$$

tranne che ad un sol fattore, si ottiene

$$|x_r - y_s| > |\mathrm{R}| : (\mathrm{A} + \mathrm{B})^{nm-1} \, .$$

Dunque: *il numero positivo*

$$(5) \qquad \mu = |\mathrm{R}| : (\mathrm{A} + \mathrm{B})^{nm-1}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici delle due equazioni (1) (2), *prive di radici comuni.*

2. Supponiamo, in particolare, che la (2) sia l'equazione derivata della (1):

$$(6) \qquad g(z) = f'(z) \equiv na_0 z^{n-1} + (n-1)\, a_1 \, , z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} = 0 \, .$$

Allora $m = n - 1$, R si riduce al *discriminante* D della (1), e come numero B, non minore dei moduli delle radici di (7), si può assumere lo stesso A ([1]); dunque: *il numero positivo*

$$(7) \qquad \nu = |\mathrm{D}| : (2\mathrm{A})^{n(n-1)-1}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici di una equazione (1), *priva di radici multiple, e le radici dell'equazione derivata* (6).

3. Ciò vale, in particolare, quando si suppongono reali i coefficienti della (1). Allora vale pure il teorema di Rolle: « tra due radici reali consecutive α e β $(\alpha < \beta)$ della (1) cade un numero dispari di radici dell'equazione derivata ». Ora, per quanto precede, noi possiamo aggiungere che: *queste radici cadono tutte nell'intervallo più piccolo* $(\alpha + \nu \, , \beta - \nu)$, *ove* ν *è il numero* (7) ([2]).

([1]) Poichè A, essendo non minore dei numeri (4), non è neppure minore dei numeri

$$\frac{n-1}{n}\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1 \, , \frac{n-2}{n}\left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1 \, , \ldots , \frac{1}{n}\left|\frac{a_{n-1}}{a_0}\right| + 1 \, ,$$

e quindi non è minore dei moduli delle radici della (a).

([2]) Un teorema analogo, enunciato da Laguerre e dimostrato dal Cesàro (Nouvelles Annales de math., 3ème série, tom. IV, pag. 328), dà per ν il valore $\frac{\beta - \alpha}{n}$. *Però esso suppone che le radici dell'equazione siano tutte reali.*

Ne segue subito che: *il numero*

$$\lambda = 2\nu = 2|D| : (2A)^{n(n-1)-1} \tag{8}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici reali della (1) [1].

4. Ritornando al teorema generale del § 1, applichiamolo supponendo che l'equazione (2) sia di primo grado,

$$g(z) \equiv z - \alpha = 0 ,$$

con la radice α reale o complessa. Allora, per la (4), si ha

$$|R| = \prod_r |x_r - \alpha| = |f(\alpha)| : |a_0| ;$$

inoltre si può assumere $B = |\alpha|$.

Otteniamo così il teorema: *se α è un numero qualunque (reale o complesso) non radice dell'equazione* (1), *il numero positivo*

$$\mu(\alpha) = |f(\alpha)| : |a_0| (A + |\alpha|)^{n-1} \tag{9}$$

è minore dei moduli delle differenze tra il numero α e le radici x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) della (1).

5. Questa proprietà della funzione $\mu(\alpha)$, suggerisce un nuovo *metodo di approssimazione* delle radici di una equazione algebrica. Per maggior chiarezza, lo esporremo sotto forma geometrica.

Incominciamo con l'osservare che nel piano rappresentativo della variabile complessa z, i punti x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), immagini delle radici della (1), saranno tutti contenuti nell'interno del cerchio Γ' che ha per centro il punto (origine) $z = 0$, e per raggio A.

Osserviamo inoltre che: *i punti x_i sono tutti esterni rispetto ad ogni cerchio C_r che abbia per centro un punto qualsiasi α_r, non radice di* (1), *e per raggio $\mu(\alpha_r)$*. Ciò non è che l'interpretazione geometrica del teorema del § 4.

Or prendiamo entro Γ', o sulla sua periferia, un punto α_1 e descriviamo il corrispondente cerchio C_1: esso staccherà da Γ' una regione Γ_1, tale che nel suo interno e sulla sua periferia non cadranno punti x_i. Sia Γ_1' la rimanente parte di Γ' (nella quale cadranno i punti x_i). Preso in Γ_1 o sul

[1] La conoscenza di un tal numero è utile nell'operazione della *separazione* delle radici reali della (1) col noto metodo di Waring-Lagrange. Allo stesso scopo Cauchy dette il numero analogo

$$\sqrt{|\Delta|} : (2A)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1} ,$$

ove Δ indica pure il discriminante di (1), come D nella (8); però Δ differisce in generale da D per un fattore, potenza di a_0.

contorno (e precisamente sulla parte di contorno interna a Γ') un punto α_2, descriviamo il corrispondente cerchio C_2: questo staccherà eventualmente ([1]) da Γ_1' una parte che, aggregata a Γ_1, determinerà una regione più ampia Γ_2 che, come Γ_1, non conterrà punti x_i. Sia Γ_2' la rimanente regione di Γ' (nella quale cadranno tutti i punti x_i). Preso dentro Γ_2 o sul contorno un punto α_3, descriviamo il corrispondente cerchio C_3: esso staccherà eventualmente da Γ_2' una parte che, aggregata a Γ_2, determinerà una regione Γ_3, più ampia di Γ_2, e che, come questa, non conterrà punti x_i. E così via, con procedimento analogo a quello che si segue nella *prosecuzione analitica* delle funzioni di variabile complessa.

Si ha così una successione di regioni (tutte d'un sol pezzo) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, ciascuna contenente la precedente e tali che in esse (contorno incluso) mai cadono punti x_i.

Crescendo r, la regione Γ_r andrà estendendosi nel cerchio Γ' e (insinuandosi fra gli n punti x_i) tenderà a ricoprire tutto il cerchio Γ', ad eccezione dei punti x_i, i quali così finiranno per essere separati ed approssimati di quanto si vuole.

Ciò è quasi intuitivo; ma può dimostrarsi rigorosamente. A tal fine basterà dimostrare che: *dato ad arbitrio in Γ' (contorno incluso) un punto β, che non sia un punto x_i, esso è **sempre** raggiungibile con la costruzione precedente.*

Infatti, si congiunga il punto β col punto α_1 (punto iniziale della costruzione precedente) mediante una linea s tutta contenuta in Γ' e non passante per alcun punto x_i; poi si costruiscano, successivamente: la circonferenza C_1 corrispondente al punto α_1; la circonferenza C_2 corrispondente al punto α_2 ove C_1 incontra l'arco $\alpha_1\beta$ di s, la circonferenza C_3 corrispondente al punto α_3 ove C_2 incontra l'arco $\alpha_2\beta$ di s, ecc. Dico che, così procedendo, si finirà per incontrare un cerchio C_r contenente β nel suo interno o sulla sua periferia.

Infatti i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono evidentemente legati da una relazione ricorrente, del tipo

$$\alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r}, \tag{10}$$

ove $i = \sqrt{-1}$, e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono numeri reali. Se con la costruzione precedente non si finisse per incontrare il detto cerchio C_r, la costruzione stessa si potrebbe continuare indefinitamente, ottenendo, su s, infiniti punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ susseguentisi (in questo ordine) sulla linea s nell'arco finito $\alpha_1\beta$. Questi punti ammetterebbero perciò un punto limite l (*giacente su s*); e, per la (10), si avrebbe

$$\lim_{r=\infty} \left[\mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r}\right] = l - l = 0.$$

([1]) Ciò accadrà certamente se α_2 si è preso sul contorno di Γ_1.

Ma $e^{i\varphi_r}$ è sempre finito e diverso da zero; dunque $\lim_{r=\infty} \mu(\alpha_r) = 0$, ossia, per la (9),

$$\lim_{r=\infty} \frac{|f(\alpha_r)|}{|a_0|(A + |\alpha_r|)^{n-1}} = \frac{|f(l)|}{|a_0|(A + |l|)^{n-1}} = 0,$$

cioè $f(l) = 0$. Dunque l coinciderebbe con un punto x_i, e quindi la curva s passerebbe per un punto x_i, contro l'ipotesi fatta.

6. La funzione $\mu(\alpha)$ può anche essere adoperata per approssimare le radici *reali* di un'equazione (1).

Infatti, dato un numero reale α_0, non radice della (1), si costruiscano le due successioni di numeri reali:

$$(11) \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \quad \text{ove} \quad \alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r) \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

e

$$(12) \qquad \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots \quad \text{ove} \quad \alpha_{r-1} = \alpha_r - \mu(\alpha_r) \quad (r = 0, -1, -2, \dots).$$

Essendo la funzione $\mu(\alpha)$ sempre positiva, per α non radice di (1), la prima successione è crescente, e la seconda è decrescente, e però *entrambe tendono a limiti finiti o infiniti*, che diremo rispettivamente L ed l.

Supponiamo che L sia finito. Allora, ragionando sulla relazione ricorrente (11) come poc'anzi abbiamo fatto sulla (10), si riconosce che L è radice di (1). E siccome, per la proprietà della funzione $\mu(\alpha)$ (§ 4), nessuna radice di (1) può cadere negli intervalli (α_0, α_1), (α_1, α_2), $(\alpha_2, \alpha_3), \dots$, se ne deduce che L è la più piccola radice di (1) maggiore di α_0. Se ne deduce, inoltre, che, se $L = +\infty$, non vi è alcuna radice di (1) maggiore di α_0.

Analogamente si vede che: se l è finito, l è radice di (1), ed è la più grande radice che sia minore di α_0; se $l = -\infty$, non esistono radici di (1) minori di α_0.

Dunque, mediante le successioni (11) e (12), possiamo approssimarci alla radice immediatamente superiore ed alla radice immediatamente inferiore ad un numero reale dato, α_0.

Fisica. — *La compressibilità del cloruro di metile.* Nota di E. BODAREU, presentata dal Corrisp. A. BATTELLI [1].

Nel corso delle esperienze sulla costante dielettrica dei gas compressi si mostrò necessario conoscere la variazione della densità del cloruro di metile in funzione della pressione, ovvero la dipendenza del prodotto della pressione per il volume dalla pressione stessa.

Giacchè questa relazione fra le grandezze citate non si è trovata nella letteratura rispettiva, ho eseguito le misure relative per mezzo d'un apparecchio costruito nel modo seguente:

Una canna di vetro a grosse pareti ben graduata M è saldata nella parte superiore ad un tubo capillare ripiegato (vedi la figura) che alla sua volta è in comunicazione con un rubinetto di vetro R a tenuta di mercurio. La parte inferiore è invece saldata ad un'altra canna N, lunga circa 4 metri, che funziona come un ramo di manometro.

Il volume compreso fra i singoli tratti della canna M fino al punto del tubo capillare fu misurato con grandissima cura pensando con un'ottima bilancia di Nemetz il mercurio che occupava lo spazio tra i singoli tratti.

Il gas è stato fornito in bombole d'acciaio dalla Ditta Kahlbaum di Berlino colla garanzia di estrema purezza.

Le misure si eseguivano nel modo seguente:

Si cominciava a fare per mezzo di pompa di Gaede una grande rarefazione tanto nella canna graduata quanto nei tubi che ad essa comunicano attraverso il rubinetto R; poi aprendo il rubinetto della bombola si faceva entrare il gas. Ripetendo più volte la stessa operazione, si poteva essere sicuri d'avere scacciata completamente l'aria dalla canna M e d'averla sostituita col gas puro. Dopo si alzava adagio adagio l'imbuto T contenente il mercurio, finchè quest'ultimo non era salito, attraverso il rubinetto, nel tubo capillare fino al punto F; e finalmente si chiudeva il rubinetto R.

La pressione del gas così rinchiuso dentro la canna graduata si poteva variare a piacere aggiungendo del mercurio nel tubo N dal disopra, oppure togliendone dall'apparecchio per mezzo d'un altro rubinetto messo in basso come si vede nella figura.

La tenuta dei due rubinetti era perfetta.

La differenza di altezza delle due colonne di mercurio si leggeva per mezzo d'un cannocchiale fornito di una livella, sopra una scala verticale di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Pisa, diretto dal professore A. Battelli.

rame ottimamente graduata in millimetri, messa accanto all'apparecchio. Lo stesso cannocchiale permetteva quindi di leggere esattamente la posizione del menisco di mercurio dentro la canna guaduata.

La pressione barometrica era data da un Fortin.

Nella tabella che segue sono riportati i valori del prodotto $p\,v$ alle pressioni corrispondenti (con p indicando la pressione e con v il volume del gas racchiuso).

TABELLA I.

Temperatura 16°.8 C.

Pressione in millimetri	pv
760	1.0000
1200	0.9796
1650	0.9648
2100	0.9533
2800	0.9335

La seconda tabella mostra la variazione della densità del CH_3Cl in funzione della pressione (presa come unità quella del gas stesso a 760 mm. di pressione e a 16°.8 C.).

TABELLA II.

Pressione in millimetri	Densità
760	1.000
1200	1.679
1650	2.250
2100	2.898
2800	3.946

Riguardo all'approssimazione con cui si è ottenuto il valore del prodotto pv, osserviamo che i volumi dei singoli tratti della canna M furono determinati con un errore relativo minore di $^1/_{1500}$. Essendo poi l'errore relativo nella misura di p molto inferiore a quello di v, si può dire che i valori del prodotto pv sono affetti da un errore che non supera 6 unità del 4° ordine decimale.

Fisica. — *Sulla misura assoluta dell'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Sebbene l'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti sia un fenomeno di cui una completa teoria dell'elettrolisi dovrebbe render conto in ogni caso, e sebbene perciò sia anzitutto necessaria la conoscenza della sua intensità, cioè della quantità di calore prodottasi o scomparsa (indipendentemente dall'effetto Joule) quando l'unità d'elettricità passa da un metallo ad un elettrolito o viceversa, ben poche determinazioni dirette ed in misura assoluta si hanno di questa quantità.

Le determinazioni di Bouty e quelle di Gill dànno valori relativi e, se si considerano le importanti cause d'errore, si può anche dubitare che sia rigorosa la proporzionalità fra essi ed i valori assoluti. Le determinazioni basate sull'uso della formula di Hehlmotz $V = T\, dV/dT$ sono indirette e dovrebbero esser confermate, da un confronto con misure dirette, perchè la formula cesserebbe d'essere applicabile quando la condizione di riversibilità, che essa suppone, per una qualsiasi causa non si verificasse.

Avendo in alcune Note precedenti supposto e poi creduto di dimostrare, con un ragionamento teorico, che la differenza di potenziale V fra metallo ed eletttolito soddisfa alla relazione $V = (C - c)/e$ che vale certamente per

le coppie voltaiche complete, volli determinare c calore locale o effetto Peltier, per lo zinco a contatto d'una soluzione di ioduro la quale presenta all'incirca la stessa differenza di potenziale V come lo zinco a contatto della soluzione di solfato, mentre il calore di formazione C è, pei due sali, molto diverso.

Il metodo che ho seguìto in queste determinazioni, è quello solito, usato da Jahn: cioè ho fatto passare una stessa corrente per uno stesso tempo, dal metallo alla soluzione e viceversa, ed ho misurato in ciascun caso, e colle debite correzioni, le quantità di calore prodotte presso uno stesso elettrodo. Facendo la differenza di queste quantità di calore, l'effetto Joule, che è lo stesso nei due casi, viene eliminato, e l'effetto Peltier, che ha cambiato segno, rimane raddoppiato.

Speciali precauzioni sono necessarie, come ha indicato Jahn, per evitare che le differenze di densità prodotte dalle differenze di temperatura e da quelle (causate dall'elettrolisi) di concentrazione, producano per convezione un aumento o diminuzione erronee delle quantità di calore che si misurano.

Non ho potuto usare l'apparecchio di Jahn, anzitutto perchè, quando ho eseguito le esperienze non avevo e non potevo facilmente costruire lo speciale calorimetro di Bunsen occorrente; inoltre perchè questo richiede molto tempo per ogni esperienza, e specialmente per la preparazione dell'apparecchio, e per di più, quindi, moltissimo tempo avrebbe richiesto lo studio dell'apparecchio. Fu dunque necessario e mi parve anche utile di far uso di un apparecchio più facile a costruire in breve tempo ed altresì di uso più facile e più spedito, e che da quello di Jahn differisce solo perchè le misure calorimetriche sono tte col metodo detto delle mescolanze, ossia per riscaldamento della soluzione, invece che col metodo di Bunsen.

Questo apparecchio era composto di due bicchierini adiacenti, di vetro sottile, che contenevano ciascuno: 1°) uno stesso peso noto della soluzione; 2°) un elettrodo di zinco, uguale ed ugualmente disposto in entrambi; 3°) un agitatore; 4°) il bulbo di un termometro diviso in decimi di grado. La comunicazione elettrica fra questi due bicchierini funzionanti da calorimetri era ottenuta mediante un vaso rettangolare di vetro, basso, aperto superiormente, nel cui fondo erano stati fatti due fori, meno larghi dei bicchierini e cogli orli interni distanti circa 1 cm., nei quali fori erano stati masticiati due larghi e corti tubi di vetro, sporgenti all'esterno, cioè inferiormente, ed ivi chiusi da fondi di carta pergamena. Ottenevo facilmente una perfetta tenuta di questi fondi, spalmandone di grasso, prima di adattarli, la superficie interna dell'orlo, dimodochè, dopo adattati sulle superfici cilindriche dei tubi suddetti, le pieghe, che si erano necessariamente formate, rimanevano ripiene di grasso che veniva compresso ed immobilizzato dalla legatura, a molte spire, di spago.

Questo vaso conteneva una conveniente quantità di soluzione (circa 1 cm. sul fondo) e veniva collocato sopra i due bicchierini in modo che nella so-

luzione di ciascuno di questi pescasse o affiorasse il fondo di carta pergamena di uno dei tubi suddetti. Nell'interno di ciascuno di questi si trovava inoltre un agitatore ed il bulbo di un termometro le cui indicazioni potevano esser utili per il calcolo delle quantità di calore ricevute o perdute dai bicchierini sottostanti.

Per bene agitare la soluzione, condizione essenziale per queste determinazioni calorimetriche, usai prima i soliti agitatori ad anello, in numero di quattro, uno per ciascun calorimetro e per ciascuno dei tubi in essi pescanti; ma era difficile di ben regolare l'andamento di questi minuscoli agitatori, ed avveniva spesso che qualcuno di essi, andando ad urtare contro il termometro o contro le pareti, si fermasse o funzionasse male ed impedisse anche il regolare andamento degli altri.

Ricorsi allora ad una disposizione che ho proposto alcuni anni fà per agitare un liquido contenuto in recipienti ermeticamente chiusi, come p. es. nei termocalorimetri e nei dilatometri. Fissai cioè, normalmente, sulle pareti interne dei suddetti bicchierini e tubi, mediante ceralacca, alcune palette di mica, inclinate di 45° sulla verticale; inoltre, negli orli degli elettrodi cilindrici o circolari di lamina di zinco praticai colle forbici alcuni tagli parziali, longitudinali o radiali, e colle pinzette ripiegai di 45° uno dei labbri di ciascun taglio, sempre dalla stessa parte, in modo che formasse una paletta inclinata.

Inoltre, tutto l'apparecchio veniva fissato sopra uno dei soliti sostegni a tavolino, formati da un disco orizzontale portato da un'asta verticale che può ruotare (ed anche esser sollevata e fissata a varie altezze) entro un tubo portato da tre piedi. Attorno al disco avevo fissato inoltre una striscia di cartone formante un largo orlo verticale; e fissando ed avvolgendo su questo una funicella, tirando uno dei capi ed allentando l'altro a modo di redini, potevo far girare il disco e l'apparecchio in un senso o nell'altro.

Se, quando l'apparecchio è completamente immobile, lo si incomincia a far girare, le palette inclinate urtano sul liquido tuttora immobile, ed in parte lo spingono in giro e verticalmente; se si ferma l'apparecchio dopo che ha fatto, mettiamo, un giro, il liquido ancora in moto va ad urtare contro le palette immobili e viene di nuovo parzialmente deviato; se quindi si fa ruotare l'apparecchio in senso inverso, le palette urtano contro il liquido avente un senso di rotazione inversa, e ancora in parte lo deviano. Si può dunque rimescolare il liquido, sia facendo ruotare l'apparecchio in sensi opposti, sia facendolo ruotare sempre nello stesso senso (ciò che richiederebbe una fune continua) con fermate ad intervalli regolari [1].

[1] Credo che questo modo di agitare un liquido possa riuscire utile in alcuni casi, in sostituzione dell'agitatore ad anello, p. es. nella determinazione del calore specifico dei solidi col metodo delle mescolanze, perchè spesso avviene che il solido caldo, gettato nel calorimetro, imbarazza o anche impedisce del tutto il moto dell'anello.

Ho calcolato nel modo solito le quantità di calore guadagnate da ciascun calorimetro durante il passaggio della corrente, cioè ho moltiplicato l'equivalente in acqua del calorimetro, non tenendo conto del tubo che vi pescava, per l'aumento di temperatura che esso ha subìto dall' istante della chiusura del circuito sino a due minuti dopo l'apertura; con ripetute prove mi sono assicurato che questi due minuti erano sufficienti perchè il calore generato dalla corrente si ripartisse uniformemente in tutto il calorimetro.

A queste quantità di calore bisogna aggiungere quelle che ciascun calorimetro ha ceduto all'ambiente ed al tubo che vi pescava, o bisogna dedurle se il calorimetro le ha ricevute.

Ho operato perciò nel modo solito, cioè osservavo l'andamento dei 4 termometri per 10 minuti prima della chiusura del circuito, poi di 5 in 5 minuti durante il passaggio della corrente e poi per altri 10 o 20 minuti dopo l' interruzione della corrente.

Con questi dati sarebbe teoricamente possibile un calcolo molto esatto delle quantità di calore ricevute o perdute da ciascun calorimetro; nel fatto, siccome l'andamento dei termometri prima e dopo del passaggio della corrente non era molto regolare (forse per una causa a cui accennerò in seguito), e non potevo basarvi un calcolo rigoroso, mi contentai di supporre che, nella prima metà della durata della corrente aumentata di due minuti, per effetto dell'ambiente e del vaso di comunicazione persistesse la variazione di temperatura per minuto osservata prima della chiusura del circuito, e nella metà successiva si producesse la variazione media osservata a partire dai due minuti dopo l' interruzione della corrente.

Se con C_1, C_2 s' indicano le quantità di calore, corrette, prodotte dalla corrente in ciascun calorimetro, e con J_1 ed J_2 i rispettivi calori Joule e con $P_1 - P$ i calori Peltier, si avrà:

$$C_1 = J_1 + P \quad , \quad C_2 = J_2 - P .$$

Anche nei soliti bagni a doppia parete, nei quali gli anelli spesso scorrono imperfettamente, raschiando le pareti e producendo uno stridore sgradevole, si potrebbero agli anelli sostituire striscie d'ottone ad elica, continue o, meglio, profondamente dentate, saldate sopra una o entrambe le pareti dell'intercapedine e su quella del recipiente interno, e produrre l'agitazione molto più regolarmente nel modo indicato. Affinchè una striscia piana, non troppo larga, possa essere adattata e saldata sopra una superficie cilindrica, normalmente ad essa ed a 45° coll'asse, è necessario che questa striscia sia tagliata da una lamina piana con un raggio doppio di quello della superficie stessa. (Difatti, se in un punto della superficie cilindrica passano due eliche a $\pm 45°$ colla generatrice, e sia x il loro raggio di curvatura, e si fanno inoltre due sezioni normali, una secondo la generatrice di raggio infinito, l'altra ad angolo retto e di raggio r, sarà, pel teorema d'Eulero, $1/x + 1/x = 1/r$).

È però chiaro che il suddetto modo d'agitare un liquido non potrà essere usato se l'apparecchio è connesso rigidamente con apparecchi o con oggetti immobili.

Ripetendo l'esperienza colla corrente invertita, supponendo che la sua intensità col reostato o col calcolo sia ridotta la stessa, e che sia la stessa pure la sua durata, se indichiamo con C'_1, C_2 le quantità di calore ora ottenute (avvertendo che ogni indice indica i valori d'uno stesso calorimetro) ed J'_1, J'_2 i corrispondenti calori Joule, si avrà

$$C'_1 = J'_1 - P \quad , \quad C'_2 = J'_2 + P ,$$

quindi

$$P = (C_1 - C'_1)/2 = (C'_2 - C_2)/2 .$$

Se i due calorimetri fossero in tutto identici, cosicchè il calore Joule fosse lo stesso in entrambi, basterebbe far passare la corrente in un solo senso, poichè si avrebbe:

$$P = (C_1 - C_2)/2 .$$

In questo ragionamento s'è supposto che nei due elettrodi il calore Peltier o locale abbia bensì segno diverso, ma lo stesso valore assoluto. Per assicurarsi che ciò sia esatto, gioverebbe usare un apparecchio più semplice, composto d'un solo calorimetro con due elettrodi molto vicini. Per effetto del passaggio d'una corrente, si avrà $C = J + P_1 - P_2$: e, dedotto J dalla resistenza e dalla intensità della corrente, si potrà ricavare $P_1 - P_2$.

Ho eseguito, ricercando le condizioni migliori, cercando di evitare le cause d'errore, molte determinazioni. Ho usato prima recipienti di lamina sottile d'ottone, ricoperti da uno spesso strato di vernice, perchè era facile di costruirli della forma e delle dimensioni volute: ma la vernice presto si screpolava o era intaccata, e fra l'ottone ed il liquido si producevano azioni chimiche con evidente deposito (o isolamento) di rame e con irregolarissima produzione di calore; ho usato anche calorimetri di lamina di zinco e poi finalmente di vetro, contenenti 100 oppure 50 cm.^{3} di soluzione.

Ho eseguito anzitutto, come prova del metodo, molte determinazioni con una soluzione di solfato di zinco puro contenente 143,5 di sale cristallizzato con 7 molecole d'acqua e 178,5 gr. d'acqua (ossia 25 % di sale anidro), la cui densità, misurata col densimetro, risultò, a 21°,5, uguale ad 1,296.

Ciascuno dei due bicchierini di vetro sottile (da cui era stato tagliato l'orlo) pesava 16 gr.; ciascun elettrodo di lamina di zinco amalgamato pesava 8 gr.; il volume della soluzione era di 49 cm.^{3}: quindi il peso 65 gr., e l'equivalente in acqua complessivo era circa 50 gr.

Nella seguente tabella trovasi in cima la temperatura iniziale dell'ambiente e l'indicazione degli elettrodi a cui le temperature sottostanti si riferiscono; nella 1^a colonna trovasi l'ora dell'osservazione dei termometri, nelle successive le temperature indicate dai termometri, a partire dalla temperatura iniziale suddetta, nell'ordine in cui si trovavano nell'apparecchio,

cioè la temperatura 1° in un calorimetro, 2° nel tubo che vi pesca, 3° nell'altro tubo, 4° nell'altro calorimetro; nell'ultima colonna trovansi le intensità della corrente in Ampère dall'istante della chiusura a quello dell'apertura del circuito.

TEMPERATURA AMBIENTE 22°,70.

	Catodo		Anodo		Ampères
h m	°				
XI 12	— 0,04	0,0	0,0	— 0,10	—
20	0,00	0,0	0,0	+ 0,07	0,139
25	+ 0,11	0,40	0,40	0,15	0,139
30	0,30	0,65	0,70	0,38	0,138
35	0,47	0,95	0,92	0,60	0,136
37	0,52	0,87	0,90	0,63	—
39	0,55	0,80	0,82	0,63	—
41	0,57	0,74	0,80	0,64	—
47	0,59	0,67	0,70	0,64	—
	Anodo		Catodo		
50	0,61	0,63	0,67	0,63	0,141
55	0,78	0,90	0,98	0,70	0,140
XII 0	0,99	1,20	1,20	0,85	0,140
5	1,20	1,40	1,44	1,00	0,140
7	1,22	1,40	1,42	1,02	—
9	1,22	1,30	1,33	1,03	—
11	1,22	1,25	1.30	1,05	—
15	1,19	1.14	1,20	1.06	—
20	1,15	1,02	1,07	1,02	—

I riscaldamenti direttamente osservati nei calorimetri catodico ed anodico sono stati rispettivamente di 0°,52 e 0°,70 nella 1ª determinazione, e di 0°,61 e 0°,39 nella 2ª: dimodochè le differenze dei riscaldamenti sono 0°,18 e 0°,22. L'andamento delle temperature dopo interrotta la corrente, non è stato molto regolare, dimodochè la correzione risulta diversa secondo che si fa in base alle variazioni prodottesi in due oppure in quattro ecc. minuti. A seconda del modo come si fa la correzione, la differenza dei riscaldamenti risultò di 0°,33; 0°,286; 0°,25; 0°,255; nella 1ª determinazione; e di 0°,23 0°,255; 0°,35; 0°,23 nella seconda. Ho preso come valore più probabile il valor medio 0,26: quindi la differenza della quantità di calore prodotta nei due calorimetri, ossia il doppio del calore Peltier, è di 13 calorie; e poichè la corrente d'intensità media 0,14 ha durato 900 secondi, si ha che la quantità di calore prodotta nel passaggio di 1 Coulomb dallo zinco alla soluzione, ed assorbita nel passaggio inverso, risulta di 52 milligrammi-calorie.

Altre determinazioni eseguite in condizioni svariate, comprendendo anche quelle meno ben riuscite, hanno dato i seguenti valori: 46,1; 60; 55,4; 41,3; 48,5; 58,4; 40,0; 35,5; 51,0; 46,0; la cui media è di 48,9 milligrammi calorie, valore poco diverso da quello trovato da Jahn.

Con una soluzione di ioduro di zinco, contenente 52 grammi di sale in 202,5 gr. d'acqua, avente la densità di 1,20 a 20°, ho ottenuto i seguenti valori: 37; 46,5; 46; 38; 39,4; 45,5; 45,2; 41: cioè, in media, 42 milligrammi calorie per Coulomb.

La differenza fra questo valore e quello trovato per la soluzione è molto piccola; non appare dunque che vi sia una relazione generale fra il calore Peltier e quello di formazione del sale, nè fra questo e la differenza di potenziale fra metallo e soluzione.

Come appare dai numeri sopra riferiti, i singoli valori del calore Peltier, tanto per una quanto per l'altra soluzione, non sono molto concordi, nonostante le molte prove fatte e le molte cure usate. Questo disaccordo potrebbe forse esser dovuto a ciò: che lo zinco elettrolitico deposto e gli elettrodi di zinco del commercio formavano una debole coppia voltaica la cui azione è difficile valutare ed era diversa nelle varie determinazioni. Prevedendo la possibile esistenza d'una tale causa d'errore, ho cercato rimediarvi amalgamando fortemente lo zinco, supponendo che lo zinco deposto per elettrolisi si sciogliesse nel mercurio o si amalgamasse: lo che invece non avveniva. Converrebbe quindi usare elettrodi di zinco puro.

Un'altra causa d'errore si ha negli scambî di calore fra i calorimetri ed i vasi di comunicazione, di cui non fu possibile di tenere un conto esatto. È forse possibile di evitare o almeno diminuire gli errori che ne risultano, aumentando la profondità della soluzione nel calorimetro anodico, ove si produce maggiore quantità di calore, diminuendola in quello catodico e regolando anche la quantità di liquido contenuto nel vaso di comunicazione in modo che gli aumenti di temperatura nei tre recipienti siano gli stessi, e quindi gli scambi di calore siano nulli o molto piccoli. È però chiaro che non si dovrebbe invertire la corrente, perchè il calorimetro con poco liquido, divenuto anodico, si riscalderebbe molto di più, quello con molto liquido si riscalderebbe molto di meno del vaso di comunicazione. Per ricavare il calore Peltier, si dovrebbe dunque aver cura che le resistenze dei due calorimetri, nonostante la diversa quantità di soluzione, fossero le stesse, e fossero quindi uguali i calori Joule, dimodochè fosse possibile far uso della suddetta formula $P = (C_1 - C_2)/2$ ottenibile senza invertir la corrente

Climatologia. — *La distribuzione stagionale e annuale della nebulosità in Italia.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Diversi studiosi, parlando della distribuzione della nebulosità in Europa, hanno quasi incidentalmente accennato al comportamento del fenomeno in Italia. E così Teisserenc de Bort [1] prese in esame le osservazioni raccolte in 21 città italiane dal 1870 al 1882; Elfert [2] esaminò i dati ottenuti in alcune città dell'Italia settentrionale e centrale dal 1864 al 1885. Si deve a Friedemann [3] uno studio più completo e più dettagliato sulla distribuzione della nebulosità in Italia, e difatti egli prese in esame le osservazioni rilevate in 140 città; però mentre per alcune città l'A. esaminò le osservazioni raccolte nel periodo 1879-1906, per altre considerò il periodo 1892-1896, e per altre le osservazioni estese fino al 1907. I valori così ottenuti hanno permesso di indicare, in un modo più completo di quello che non sia stato fatto fin'oggi, la distribuzione della nebulosità per mesi e per anno; ma siamo lontani dal considerare esaurito l'argomento, inquantochè i periodi presi in esame sono diversi e, come giustamente notò l'A., non si poterono ridurre ad una medesima epoca. E tanto più che gli eminenti studiosi Cantoni [4], De Marchi [5] e Roster [6] occupatisi in modo particolare del clima dell'Italia, si limitarono a dare cenni sommarii. Qualche anno prima che venisse alla luce lo studio del Friedemann, la Sezione climatologica del R. Ufficio centrale di meteorologia in Roma aveva iniziato un esame delle numerose osservazioni nefoscopiche raccolte in Italia e in una Memoria, che presto sarà pubblicata negli Annali di meteorologia, sarà dato ampio e minuto conto del materiale di osservazioni finora raccolto; ed è sembrato più adatto, per uno studio generale della nebulosità in Italia, sottoporre ad esame un periodo di anni ugualmente esteso per le diverse località, e precisamente il periodo 1891-1910.

[1] Teisserenc de Bort., *Distribution de la nebulositê à la surface du globe.* Annales du Bureau central méteorologique de France, vol. IV, 1884.

[2] Elfert P., *Die Bewölkung in Mitteleuropa mit Einschluss der Karpotenländer.* Petermanns Mitteilungen, 36 Band., 136-145, 1890.

[3] Friedemann I., *Bewölkung und Sonnenschein des Mittelmeergebietes.* Archiv. der deutschen Seewarte, XXXV: Jarhgang, 1913.

[4] Cantoni P., *Il clima d'Italia,* estratto dal giornale: L'Italia agricola, Milano, 1881.

[5] De Marchi L., *Il clima d'Italia. La terra* di G. Marinelli, vol. IV.

[6] Roster G., *Climatologia dell'Italia.* Torino. 1909.

In riguardo alla distribuzione della nebulosità per stagioni, il Friedemann non se ne occupa, e nei varii trattati di climatologia si trovano notizie limitate. De Marchi nota come la nebulosità settentrionale varii in inverno da 50 a 60 %, nell'estate da 30 a 40 %, e nell'Italia meridionale da 20 a 30 %. Parlando delle particolarità climatiche delle singole regioni, nota come in Lombardia, mentre al piano la stagione più serena è l'estate e la più nuvolosa l'inverno, nella regione dei laghi è invece sereno anche l'inverno e nuvoloso l'autunno. Roster dice che la stagione più nuvolosa è l'inverno, e la maggiore serenità si verifica nell'estate. Egli aggiunge che a questa regola generale fa eccezione però la regione subalpina, dove la primavera è più nuvolosa dell'inverno. Nella regione alpina e nella valle del Po si notano, durante l'anno, due massimi e due minimi: i due massimi nelle stagioni medie, primavera e autunno; i due minimi nell'estate e nell'inverno, col minimo dei minimi in estate. Il Roster nota ancora come la distribuzione stagionale della nebulosità si comporti in modo diverso nei luoghi continentali e nei luoghi marittimi; così, mentre a Udine la nebulosità risulta presso a poco distribuita nella medesima misura nelle quattro stagioni, a Palermo grande è la differenza fra l'estate e l'inverno, e piccola fra le stagioni medie.

Con la presente Nota ci proponiamo di rendere più particolareggiata la distribuzione stagionale di un sì interessante elemento climatico; e a tale intento diamo conto dei valori spettanti ai quattro aggruppamenti stagionali

$$\left(J = \frac{D+G+F}{3}, P = \frac{M+A+M}{3}, E = \frac{G+L+A}{3}, A = \frac{S+O+N}{3}\right)$$

utilizzando i valori mensili dati nel su accennato studio (in corso di stampa) per 132 città. L'unita tabella contiene tali elementi per le diverse città disposte per latitudine decrescente.

Distribuzione della media annua della nebulosità.

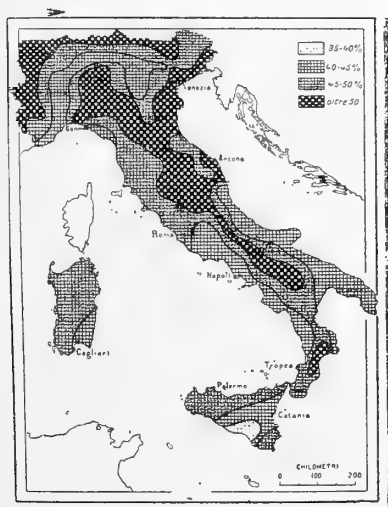



Fig. 1.

Distribuzione dell'amplitudine annua.

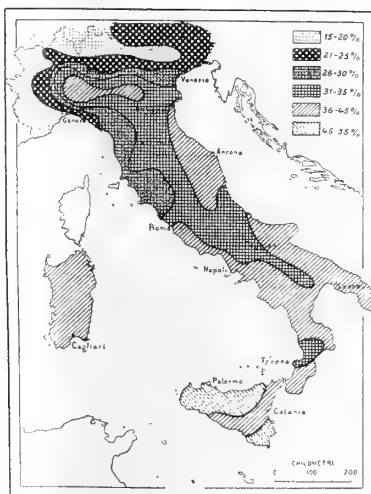



Fig. 2.

Nebulosità a seconda delle stagioni meteorologiche

CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
Auronzo	40	53	49	44	Piacenza	57	49	33	54	Scandicci	54	50	30	45	Benevento	66	58	31	51
Stelvio	41	57	59	50	Moncalieri	43	51	42	54	Pisa	54	52	31	47	Caserta	48	47	22	39
Sondrio	36	47	38	45	Asti	45	44	35	50	Vallombrosa	56	58	39	52	Montevergine	68	56	32	53
Belluno	53	67	62	59	Alessandria	52	41	25	50	Urbino	62	56	34	57	Avellino	60	52	26	43
Domodossola	41	54	47	51	Ferrara	61	55	38	55	Ancona	73	61	42	63	Napoli	50	47	22	39
Udine	53	61	48	51	Parma	60	55	38	57	Livorno	55	54	35	49	Portici	52	47	23	42
Conegliano	45	52	40	43	Novi Ligure	52	44	33	53	Castelnuovo G.	51	53	37	46	Torre del Greco	47	40	15	34
Varallo	38	54	47	51	Correggio	54	50	33	48	Arcevia	60	52	32	55	Ischia	53	47	23	40
Como	42	49	39	49	Bra	48	51	41	55	Iesi	64	51	34	54	Sassari	62	57	31	53
Valdobbia	42	62	61	53	Reggio Emilia	60	53	38	55	Arezzo	55	54	33	49	Potenza	69	62	36	55
Oderzo	50	55	42	50	Modena	60	56	39	56	Siena	53	50	27	44	Caggiano	62	52	28	45
Bassano	42	48	37	43	Fossano	47	55	46	56	Massa Marittima	52	52	31	46	Castellaneta	51	47	22	42
Bergamo	52	58	45	57	Bologna	55	49	32	50	Macerata	58	50	32	51	Deserto M. L.	56	53	27	45
Picco S. Bern.	39	51	44	46	Genova	52	57	44	52	Fermo	68	62	38	58	Pomarico	52	48	26	42
Treviso	56	58	44	52	Ravenna	58	44	24	48	Camerino	67	60	34	58	Lecce	57	48	21	45
Salò	45	51	38	48	Cuneo	39	50	42	52	Perugia	59	58	38	52	Montemurro	59	53	29	46
Biella	37	47	39	46	Savona	42	46	33	42	Pienza	64	65	45	57	Gallipoli	54	44	19	41
Vicenza	50	50	37	48	Chiavari	48	49	33	45	Ascoli P.	53	49	25	45	Cosenza	58	42	20	41
Brescia	51	51	37	51	Bargone	40	40	26	38	Teramo	56	50	31	51	Tiriolo	67	66	43	54
Novara	51	48	32	47	Sestola	51	55	44	55	Viterbo	53	54	34	51	Cagliari	54	47	17	44
Spinea	54	56	38	50	Forlì	62	55	38	57	Chieti	52	46	30	46	Pizzo	56	45	31	38
Milano	62	57	46	61	Cesena	57	47	30	52	Aquila	58	55	33	50	Tropea	58	52	31	46
Desenzano	46	45	31	44	Spezia	45	47	28	42	Avezzano	47	45	24	41	Oppido M.	61	53	31	49
Verona	52	48	34	48	Alassio	39	42	27	37	Tivoli	52	54	28	45	Messina	62	50	25	47
Venezia	63	60	48	59	Pistoia	56	57	37	52	Roma	56	54	28	48	Reggio Calabria	61	48	20	45
Padova	55	54	39	51	Pesaro	62	51	30	54	Agnone	57	50	33	50	Palermo	64	51	21	47
Vigevano	54	48	34	52	Pescia	54	57	34	50	Velletri	50	48	19	40	Trapani	70	57	22	54
Pavia	62	54	40	60	Porto Maurizio	42	44	32	42	Ceccano	56	56	29	49	Riposto	53	46	19	46
Mantova	52	39	25	45	Prato	57	57	36	50	M. Cassino	51	53	30	44	Catania	53	46	20	46
Mirandola	58	47	30	48	Lucca	55	56	34	51	Foggia	64	52	31	50	Caltanissetta	58	37	10	37
Cremona	62	55	41	58	Sant'Agata	56	47	27	51	Roccamonfina	47	48	23	37	Girgenti	60	49	21	47
Torino	48	51	43	54	Camaldoli	69	67	45	63	Elena	53	49	21	42	Mineo	46	37	14	35
Rovigo	66	57	45	58	Firenze	56	54	32	48	Bari	60	48	25	46	Siracusa	61	53	25	53

Tenuto conto del valore raggiunto nelle diverse stagioni, notiamo come la stagione con maggiore nebulosità cada in inverno per le località della val Padana, del versante Adriatico, del medio e basso versante tirrenico e del versante Jonico. Nelle località dell'alto versante tirrenico e in quelle prossime alle Alpi invece la stagione con maggiore nebulosità è la primavera. Tale diverso comportamento rispetto alle regioni vicine, appare più distinto sul Veneto a causa dei molti luoghi di osservazioni disseminati nelle varie situazioni orografiche. Nelle località appenniniche poste in speciali condizioni orografiche — quali Vallombrosa, Viterbo, Montecassino, Agnone, Pienza, Tivoli — la maggiore nebulosità succede in primavera; cosicchè, tale spostamento dell'epoca del massimo di nebulosità dall'inverno alla primavera

può interpretarsi con una maggiore facilità che offrono i rilievi alla condensazione del vapore d'acqua. Le località alpine quali Stelvio, Auronzo, Valdobbia, Domodossola, hanno il massimo di nebulosità in estate, epoca in cui vengono a intensificarsi le correnti ascendenti sulla molto riscaldata val Padana. Passando a considerare la stagione con minore nebulosità, notiamo che essa suole essere l'inverno per le regioni alpine o per quelle poste sotto la diretta influenza di tali sistemi orografici, e l'estate per il rimanente. Le stagioni intermedie, primavera e autunno, mostrano un andamento non ovunque uniforme.

Se consideriamo la successione delle diverse stagioni a seconda della maggiore nebulosità, notiamo come per le località dell'Italia superiore prossime alla catena degli Appennini, per quelle situate al centro della val Padana e per quelle prospicienti al versante del medio Adriatico, le stagioni si succedono in quest'ordine: inverno, autunno, primavera, estate.

Per le località settentrionali e centrali sottoposte alle influenze orografiche si ha la seguente successione: primavera, inverno, autunno, estate; oppure: primavera, autunno, inverno, estate. Per le regioni meridionali, situate lungo la dorsale appenninica o costiere, abbiamo invece la successione: inverno, primavera, autunno, estate. A tale distribuzione generale fanno eccezione alcune località, invero limitate, ove due stagioni vicine hanno il medesimo valore. Adunque in linea generale abbiamo un andamento stagionale che ricorda all'ingrosso quello indicato dalle osservazioni pluviometriche, ma se ne discosta un po' per le località settentrionali e specialmente per quelle della valle Padana. Ricordiamo che quivi le pioggie presentano due massimi annuali in primavera e in autunno, mentre nel caso della nebulosità l'autunno si presenta con maggiore nebulosità di quanto si riscontra in primavera e si discosta poco di quanto si nota in inverno.

Completiamo le notizie fin'ora esposte con l'esame della distribuzione annuale, i di cui valori, qui appresso riportati, sono stati ottenuti effettuando la media delle cifre relative alle stagioni. E facciamo anche seguire i valori dell'amplitudine ossia della differenza tra il valore del mese più nuvoloso e quello del mese più sereno.

Nebulositá annua e amplitudine annua

CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine
Auronzo	47	23	Pavia	54	36	Cesena	47	37	Perugia	52	31	Potenza	56	42
Stelvio	52	23	Mantova	40	37	Spezia	40	38	Pienza	58	30	Caggiano	47	42
Sondrio	42	14	Mirandola	46	37	Alassio	36	20	Ascoli	48	38	Castellaneta	40	36
Belluno	60	22	Cremona	54	32	Pistoia	51	27	Teramo	47	35	Deserto M. L.	45	38
Domodossola	48	17	Torino	49	21	Pesaro	49	43	Viterbo	48	30	Pomarico	42	31
Udine	53	21	Rovigo	57	32	Pescia	49	30	Chieti	43	32	Lecce	42	44
Conegliano	45	19	Piacenza	48	38	P. Maurizio	40	20	Aquila	49	33	Montemurro	47	38
Varallo	48	22	Moncalieri	49	20	Prato	50	33	Avezzano	39	33	Gallipoli	39	44
Como	45	20	Asti	43	24	Lucca	49	30	Tivoli	45	33	Cosenza	40	46
Valdobbia	55	27	Alessandria	42	42	Sant'Agata	45	42	Roma	47	36	Tiriolo	58	33
Oderzo	49	22	Ferrara	52	35	Camaldoli	61	35	Agnone	47	33	Cagliari	41	45
Bassano	42	16	Parma	52	33	Firenze	48	35	Velletri	39	37	Pizzo	40	40
Bergamo	53	24	Novi Ligure	46	38	Scandicci	45	37	Ceccano	48	36	Tropea	47	33
Picco S. Bern.	45	14	Correggio	46	30	Pisa	46	31	M. Cassino	45	34	Oppido M.	48	37
Treviso	52	23	Bra	49	23	Vallombrosa	51	27	Foggia	49	43	Messina	46	43
Salò	45	24	Reggio Emilia	52	34	Urbino	52	38	Roccamonfina	39	34	Reggio Calabria	43	49
Biella	42	15	Modena	53	33	Ancona	60	39	Elena	41	40	Palermo	46	50
Vicenza	46	21	Fossano	51	19	Livorno	48	30	Bari	45	44	Trapani	51	55
Brescia	48	24	Bologna	46	35	Castelnuovo G	47	25	Benevento	51	42	Riposto	41	40
Novara	44	34	Genova	51	19	Arcevia	50	39	Caserta	39	34	Catania	41	42
Spinea	50	25	Ravenna	43	44	Iesi	51	38	Montevergine	50	44	Caltanisetta	36	56
Milano	57	28	Cuneo	46	20	Arezzo	47	30	Avellino	45	43	Girgenti	44	53
Desenzano	42	27	Savona	41	17	Siena	44	35	Napoli	40	36	Mineo	43	37
Verona	45	31	Chiavari	44	23	Massa Marittima	46	32	Portici	41	37	Siracusa	48	46
Venezia	57	26	Bargone	36	23	Macerata	48	38	Torre Greco	34	38			
Padova	50	27	Sestola	51	18	Fermo	56	41	Ischia	41	35			
Vigevano	47	36	Forlì	53	39	Camerino	55	46	Sassari	51	39			

La figura 1ª indica la distribuzione geografica della nebulosità annua e risulta che la minima nebulosità risiede all'estremo del versante meridionale della Sicilia, e che valori più elevati, ma sempre nella categoria dei minimi, si riscontrano nelle località del versante orientale della Sicilia, della Sardegna e della penisola Salentina, mentre spostandosi verso nord si hanno valori via via crescenti che raggiungono cifre elevate lungo la dorsale appenninica, le Alpi e nella maggior parte della val Padana. Spostandosi dal centro della valle Padana verso le Alpi, si individualizzano zone di minore nebulosità, che scompaiono di mano in mano che ci avviciniamo alle alte cime; siffatte zone hanno valori poco diversi da quelli che si incontrano nelle città costiere delle località peninsulari. L'andamento di tali zone segue l'orografia della regione, cosicchè le troviamo più estese nella parte della val Padana che costituisce il passaggio dal Veneto all' Emilia.

L'alto e medio versante Adriatico hanno nebulosità superiore a quella che si nota nelle corrispondenti località del versante tirrenico; e specie la Li-

guria risalta per la minima nebulosità della riviera occidentale e di quella orientale, nebulosità che è quasi identica a quella che si riscontra nelle località marittime meridionali. Nel rimanente versante Adriatico e in quello Tirrenico predomina piuttosto uniformità, che perdura per tutto l'estremo peninsulare. La regione appenninica si mantiene costantemente con nebulosità superiore a quella delle corrispondenti località costiere. E infine in Sicilia al versante tirrenico deve attribuirsi nebulosità alquanto superiore a quella dei rimanenti versanti e specialmente del versante meridionale.

Seguendo la distribuzione dei valori relativi all'amplitudine (fig. 2ª), si ha come sulle regioni peninsulari e insulari, sul basso versante Adriatico e sul centro della val Padana, risiedano i più elevati valori. Dal centro della val Padana verso le regioni alpine si succedono zone con minore amplitudine, fino ai rilievi più elevati che divengono sede dei più piccoli valori. Nelle località peninsulari la regione appenninica si distingue per un'elevata amplitudine che raggiunge cifre poco diverse da quelle che si incontrano nella regione della valle Padana prossima alla centrale. I versanti Adriatico e Tirrenico presentano caratteri diversi, specie nelle alte e medie regioni; difatti, per il primo si hanno valori elevati sulle coste che divengono minori a misura che ci si avvicina alla catena degli Appennini, mentre sulle coste tirreniche si riscontrano minimi valori che divengono più elevati con l'avvicinarsi alla catena appenninica. È da rilevare la minima amplitudine della Liguria, e specialmente quella della riviera occidentale, che è quasi identica alla nebulosità dei luoghi alpini più elevati. Le rimanenti regioni dei due versanti hanno valori quasi identici fra di loro e piuttosto elevati.

Sul versante Jonico l'amplitudine si mantiene elevata; e tale rimane sul versante orientale siculo, mentre aumenta in Sardegna e sul versante tirrenico-siculo ove si riscontrano i valori più ragguardevoli.

Tenuto conto della quantità che la nebulosità raggiunge nell'anno e dell'amplitudine, sembra adunque che per l'Italia si possa procedere alla seguente distinzione in zone:

zona settentrionale	regione centrale regione prealpina regione alpina	zona tirrenica	regione superiore regione centrale regione inferiore
zona appenninica		zona jonica	
zona adriatica	regione superiore regione centrale regione inferiore	zona sicula	regione orientale regione occidentale

E riassumendo i caratteri delle singole zone, possiamo dire come nella zona settentrionale, la regione centrale ha elevata nebulosità e elevata amplitudine; la regione prealpina, minore nebulosità e minore amplitudine; la regione alpina elevata nebulosità e amplitudine inferiore a quella notata

nella regione precedente. Nella zona appenninica la nebulosità nell'anno è superiore a 50 %, e l'amplitudine oscilla da 31 % a 35 %. Nella zona adriatica la nebulosità raggiunge nelle regioni superiori e centrali valori superiori a 50 % mentre nelle regioni inferiori i valori variano da 40 a 45 %. L'amplitudine è elevata (da 46 a 55 %) nelle regioni centrali e inferiori, e da 26 a 35 % nelle alte regioni. Nella zona tirrenica le alte regioni rappresentate dalla Liguria, hanno minima nebulosità e minima amplitudine: le regioni centrali si differiscono dalle corrispondenti adriatiche per una minore nebulosità e minore escursione; e le regioni inferiori, pur avendo nebulosità quasi uguale a quella delle corrispondenti località adriatiche, hanno più intensa amplitudine annua. La zona jonica ha minima nebulosità ed elevata amplitudine; e tali particolarità si estendono per tutto il versante orientale siculo, mentre il versante siculo settentrionale possiede nebulosità più elevata e amplitudine annua più intensa; quivi notiamo i valori più ragguardevoli.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa* [1]. IV Nota preventiva del dott. F. Plate, presentata dal socio R. Pirotta.

In tre Note precedenti [2] ho brevemente esposto i risultati ottenuti circa l'azione di nitrati solubili — appartenenti respettivamente al I°, II°, III° e IV° gruppo del sistema periodico degli elementi — sul periodo germinativo dell'*Avena sativa*.

In quest'ultima Nota vengo ad esporre i risultati ottenuti con i nitrati Cr e U del VI° gruppo, con il nitrato di Mn del VII° gruppo, e quelli di Fe, Co, Ni dell'VIII° gruppo. In ultimo poi riepilogherò i risultati complessivi ottenuti per questa prima serie di ricerche.

Nitrato di cromo. — Il Cr, benchè presenti nel suo comportamento chimico molta analogia con il Mn, è stato oggetto di pochissime ricerche, fatta eccezione del bel lavoro del Koenig, il quale trovò che gli ioni del cromo agiscono nell'ordine $Cr^{\cdot\cdot} < Cr^{\cdot\cdot\cdot} < Cr\,O_4''$, in cui vediamo come all'anione competa la funzione più nociva [3]. Dalle mie ricerche risulta che il comportamento e l'azione specifica del Cr allo stato di ione trivalente si avvicinano moltissimo a quelli del manganese. Vi è inoltre da notare che il cromo anche si accumula allo stato ossido nella radice in maggior quantità; ma nel

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[2] Vedi questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., II° fascic., pag. 598; 12° fascic., pag. 728, (1913); e vol. XXIII, 1° sem., fasc. 3°, (1914).

[3] Per mancanza di spazio. la media dei risultati ottenuti per il Cr e Mn è riportata nelle tabelle riassuntive finali della presente Nota.

germoglio ho potuto anche constatare la sua presenza, il che corrisponderebbe anche ai risultati ottenuti dal Koenig, che lo ha trovato in quantità minore nel germoglio che non nella radice, ma sempre presente. Quando comunicherò i risultati delle mie ricerche quantitative, allora tornerò a parlare più diffusamente sopra questo interessante catione.

Nitrato di uranile. — Esito mortale per tutte le piantine.

Nitrato di manganese. — Il nitrato manganoso ha dato risultati analoghi ma migliori di quelli ottenuti per il cromo.

Solo le due prime soluzioni riescono mortali, mentre dalla $^N/_{200}$ ricomincia ad avere un graduale sviluppo che diventa normale alle concentrazioni $^N/_{1600}$ e $^N/_{3200}$, ove quindi anche il rapporto correlativo fra germoglio e radice ha valore positivo. Siccome però in studii come questi è necessario di tenere conto di ogni circostanza, mi piace far rilevare, che, prima di tutto, i due cationi esaminati hanno nei loro rispettivi nitrati una valenza diversa ($Cr^{\cdot\cdot\cdot}$ e $Mn^{\cdot\cdot}$), cioè sono rispettivamente trivalente e bivalente; che essi hanno un peso atomico quasi uguale, e ricordano nel loro curioso comportamento i cationi $Rb^{\cdot}$ e $Sr^{\cdot\cdot}$, di cui esposi già i risultati nelle mie precedenti Note.

Nitrati di ferro, cobalto e nickel. — Per il nitrato di ferro adoperai quello in cui il $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$ funziona da catione trivalente: i risultati ottenuti furono negativi per tutte le concentrazioni adoperate.

Qui è anche da tenere presente che le soluzioni dei sali ferrici reagiscono acide, a cansa della loro idrolisi, la quale poi è tanto maggiore quanto maggiore è la diluizione delle soluzioni. Onde, come già feci rilevare a causa dell'idrolisi, non ci troviamo in presenza solo del sale, ma anche d'un acido e d'una base.

Per i nitrati di cobalto e nickel ho avuto sempre risultati completamente negativi.

Riepilogo.

In questa prima serie delle mie ricerche intorno, all'azione di nitrati sul periodo germinativo dell'*Avena sativa*, come ho già detto, ho seguito l'ordine del sistema periodico degli elementi. Però le mie ricerche si sono limitate ad un numero ristretto di nitrati, e precisamente a quelli più caratteristici di ogni gruppo. E prenderò separatemente in considerazione: 1° il peso; 2° lo sviluppo del germoglio; 3° lo sviluppo della radice; 4° lo sviluppo correlativo.

1° *Il peso.* — Il peso della pianta fresca varia moltissimo a seconda delle soluzioni di nitrato adoperate, ed a seconda delle concentrazioni di questo. Anzi posso dire che si verifica come regola press'a poco costante che coll'aumentare della diluizione cresce in proporzione anche il peso si da provocare una vera curva ascendente e di percorso abbastanza regolare: ben inteso che questo vale solo per quelle soluzioni che non sono di effetto

mortale per la pianta. Nel seguente quadro sintetico sono esposti i risultati ottenuti per il peso

	N/50	N/100	N/200	N/400	N/800	N/1600	N/3200	Totale	Controllo 140 dist.
I° gruppo									
KNO_3 gr.	—0.6440	—0.0358	0.1940	0.1580	0.1810	0.2234	0.2928	0.7744	0.2784
$RbNO_3$ »	0.0146	6.0254	0.1386	0.1562	0.1516	0.1734	0.1786	0.8384	0.2894
$CrNO_3$ »	—0.0672	—0.0454	—0.0216	0.0315	0.0672	0.1084	0.1192	0.1921	0.2898
$NaNO_3$ »	—0.0568	—0.0324	0.0200	0.1234	0.1976	0.9230	0.2714	0.7282	0.2780
$LiNO_3$ »	—0.0496	—0.0184	0.0280	0.0450	0.1376	0.1358	0.1290	0.3822	0.3004
$(NH_4)NO_3$ »	—0.0734	—0.0522	—0.0324	0.0222	0.0372	0.0482	0.0596	0.0092	0.2834
$Cu(NO_3)_2$ »	—0.0260	—0.0216	—0.0168	—0.0094	—0.0086	—0.0052	—0.0040	—	—
$AgNO_3$ »	—0.0170	—0.0124	—0.0078	—0.0060	—0.0024	—0.0022	—0.0018	—	—
I° gruppo									
$Ba(NO_3)_2$ »	—0.2160	—0.0142	—0.0112	—0.0032	0.0216	0.0366	0.0532	0.1114	0.2764
$Cu(NO_3)_2$ »	—0.0034	0.0874	0.0906	0.1186	0.1504	0.1782	0.1828	0.8080	0.2542
$Sr(NO_3)_2$ »	—0.0136	—0.0150	0.0329	0.0418	0.1206	0.1252	0.1346	0.4694	0.2644
$Mg(NO_3)_2$ »	—0.0314	—0.0246	—0.0108	0.0072	0.0106	0.0210	0.0290	0.0678	0.3008
$Zn(NO_3)_2$ »	—0.0228	—0.0190	0.0276	0.0402	0.0464	0.0500	0.0564	0.2206	0.2516
$Cd(NO_3)_2$ »	—0.0564	—0.0574	—0.0508	0.0566	0.0682	0.0308	—0.0148	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—0.0754	—0.0692	- 0.0402	0.0492	0.0440	0.0368	—0.0318	—	—
III° gruppo									
$Al(NO_3)_3$ »	—0.0074	—0.0066	—0.0018	0.0184	0.0322	0.0418	0.0492	0.1258	0.2452
IV° gruppo									
$Sn(NO_3)_2$ gr.	—0.0182	—0.0142	—0.0044	—0.0028	0.0114	0.0522	0.0862	0.1102	0.2284
$Ce(NO_3)$ »	—0.0362	—0.0342	—0.0304	—0.0264	—0.0192	- 0.0134	—0.0092	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—0.0254	—0.0216	—0.0084	0.0072	0.0218	0.0532	0.0746	0.1014	0.2556
$Th(NO_3)_2$ »	—0.0492	—0.0454	-0.0382	0.0360	—0.0304	—0.0226	—0.0206	—	—
VI° gruppo									
$Cr(NO_3)_3$ »	—0.0112	—0.0062	-0.0022	0.0082	0.0322	0.0848	0.1894	0.3150	0.2784
$UO_2(NO_3)_2$ »	—0.0268	—0.0234	0.0212	—0.0194	—0.0164	—0 0138	—0.0120	—	—
VII° gruppo									
$Mn(NO_3)_2$ »	—0.0062	—0.0014	0.0174	0.0244	0.0648	0.1744	0.2156	0.4890	0.2182
VIII° gruppo									
$Fe(NO_3)_3$ »	—0.0244	—0.0214	—0.0196	—0.0164	—0.0148	—0.0124	—0.0118	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—0.0254	—0.0226	—0.0208	—0.0194	—0.0182	—0.0152	—0.0134	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—0.0258	—0.0234	—0.0218	—0.0204	—0.0188	—0.0166	—0.0144	—	—

Partendo dal concetto che anche risultati negativi possono concorrere a meglio spiegare un'ipotesi scientifica, così ho creduto opportuno aggiungere anche i risultati per quei cationi che si sono dimostrati di effetto mortale. Vediamo appunto anche che le perdite di peso subite dalle piantine diminuiscono a mano a mano che dalle soluzioni più concentrate possiamo a quelle più diluite, e questa graduale diminuzione lascia prevedere come

si debba poter arrivare ad un limite, in cui il catione benchè in minima quantità, può essere benissimo sopportato dall'organismo vivente.

2° *Lo sviluppo del germoglio.* — In generale posso dire che la soluzione $^N/_{50}$ riesce di esito mortale per tutti i nitrati adoperati fatta eccezione per il nitrato di rubidio. Anche qui lo sviluppo del germoglio migliora a mano a mano che dalle soluzioni più concentrate si passa a quelle meno concentrate. Ecco il quadro sintetico dei risultati ottenuti per il germoglio in cui sono riportate le medie degli accescimenti per ogni soluzione

	$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	—	6.4	8.9	11.7	12.4	11.8	11.5
$RbNO_3$ »	5.7	5.9	5.8	6.2	6.7	6.5	8.5	13.6
$CrNO_3$ »	—	—	—	2.1	3.6	3.9	5.3	12.7
$NaNO_3$ »	—	—	5.8	7.3	10.9	12.6	11.9	12.2
$LiNO_3$ »	1.7	3.2	4.9	6.7	6.6	8.2	9.9	14.1
$(NH_4)NO_3$ »	—	—	—	3.5	7.3	8.9	7.8	12.6
$Cu(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	6.1	10 8	15.7	15.7
$Ca(NO_3)_2$ »	—	11.7	14.7	15.5	17.9	15.4	17.3	16.6
$Gr(NO_3)_2$ »	—	6.3	8.2	8.0	7.4	9.8	10.2	16 4
$Mg(NO_3)_2$ »	—	—	—	1.3	3.6	6.5	9.4	16.8
$Zn(NO_2)_2$ »	—	—	—	5.7	7.1	8.5	10.9	16.2
$Cd(NO_3)_2$ »	—	—	1.9	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ »	—	—	—	2.1	2.6	3.5	4.6	16.1
IV° gruppo								
$Gn(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	4.1	5.6	5.4	14.3
$Ce(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—	—	—	0.9	1.4	3.2	5.3	11.3
$Th(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ »	—	—	—	1.0	2.5	8.6	11.8	18.3
$UO_2(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ »	—	—	1.7	2.5	5.4	11.3	14.7	17.3
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—

Come si vede dalla tabella i metalli alcalini sono quelli che esercitano l'azione migliore nelle piantine a cui seguono poi quelli alcalino terrosi: tutti gli altri cationi si distanziano moltissimo da quelli ora menzionati.

3° *Lo sviluppo della radice.* — Nel quadro che segue sono esposti i risultati medii complessivi ottenuti per l'accrescimento della radice:

	N/50	N/100	N/200	N/400	N/800	N/1600	N/3200	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	—	8.3	12.1	18.2	12.9	8.5	18.2
$RbNO_3$ »	6.0	6.8	7.2	6.7	8.4	6.9	9.4	17.5
$CrNO_3$ »	—	—	—	3.0	0.7	0.4	1.5	16.4
$NaNO_3$ »	—	—	4.5	3.0	7.2	19.3	19.8	15.7
$LiNO_3$ »	—	—	—	5.2	4.7	6.3	6.4	17.1
$(NH_4)NO_3$ »	—	—	—	1.8	2.9	5.5	5.2	14.8
$Cu(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_2)_2$ »	—	—	—	—	5.1	7.2	9.1	17.5
$Ca(NO_3)_2$ »	—	4.2	12.5	15.9	18.3	19.9	20.1	18.7
$Sr(NO_3)_2$ »	—	7.5	8.7	14.2	20.3	20.1	21.8	20.6
$Mg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	1.4	1.9	3.2	19.3
$Zn(NO_3)_2$ »	—	—	1.3	1.7	3.5	4.0	11.2	19.6
$Cd(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ »	—	—	—	2.3	2.9	3.7	4.8	11.3
IV° gruppo								
$Sn(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	2.8	3.7	5.7	16.6
$Ce(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—	—	—	0.5	1.2	3.1	4.7	17.3
$Th(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	4.3	9.8	10.3	13.5
$UO_2(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	14.1
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ »	—	—	3.2	4.7	7.8	9.4	11.6	14.9
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—

Anche qui sono i cationi alcalini che danno i risultati migliori, a cui seguono quelli alcalino terrosi: gli altri si distanziano da essi.

4° *Sviluppo correlativo.* — Come già ebbi a dire nella mia prima Nota, nello studio delle azioni dei diversi elettroliti non basta di controllare

peso, dimensioni etc. ma bisogna soprattutto considerare i rapporti che passano fra i diversi organi, vale a dire studiare i rapporti correlativi in cui questi organi si trovano. Siccome poi nel caso da me preso in esame le piantine di avena durante il periodo germinativo, ed in soluzione acquosa hanno lo sviluppo migliore, e quindi normale, quando la radice è più lunga del germoglio, così viene a stabilirsi un rapporto fra accrescimento della radice e accrescimento del germoglio: nel caso normale il rapporto è positivo, in quello anormale è negativo. Nella tabella seguente sono riuniti i risultati dei rapporti ottennti:

	N/50	N/100	N/200	N/400	N/800	N/1600	N/3200	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	0.9	1.9	3.2	6.5	0.5	— 3.3	6.7
$RbNO_3$ »	0.3	—	1.4	0.5	1.7	0.4	0.9	3.9
$CsNO_3$ »	—	—	—	—	— 2.9	— 3.5	— 3.8	3.7
$NaNO_3$ »	—	—	— 1.3	— 7.4	— 3.7	6.7	7.9	3.5
$LiNO_3$ »	—	—	—	—	— 1.5	— 1.9	— 3.5	3.0
$(NH_4)NO_3$ »	—	—	—	— 1.7	— 4.4	— 3.4	— 2.6	2.2
$CuNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	1.1	— 3.6	— 6.6	
$Ca(NO_3)_2$ »	—	— 7.5	— 2.2	0.4	0.4	4.5	2.8	2.1
$Sr(NO_3)_2$ »	—	1.2	0.5	6.2	12.9	10.3	11.6	4.2
$Mg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 2.2	— 4.6	— 6.2	2.5
$Zn(NO_3)_2$ »	—	—	— 0.6	— 4.0	— 3.6	— 4.5	0.3	2.4
$Cd(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ »	—	—	—	0.2	0.3	0.2	0.2	4.8
IV° gruppo								
$Sn(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 1.3	— 1.9	3.0	2.3
$Ce(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 0.2	— 0.1	— 0.6	4.9
$Th(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	— 1.8	— 1.2	1.5	4.8
$UO_2(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ »	—	—	— 1.5	—	— 2.4	1.9	3.1	2.4
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—

Tenendo dunque conto dello sviluppo correlativo. i cationi possono venire classificati come segue:

$$\underset{85.45}{Rb} > \underset{87.63}{Sr} > \underset{39.10}{K} > \underset{40\ 07}{Ca} > \underset{23.00}{Na} > \underset{6.94}{Li} > \underset{24.32}{Mg} > [\underset{54.93}{Mn} > \underset{52.0}{Cr}] > \underset{65.37}{Zn} > \underset{27.1}{Al}$$

Questi 11 cationi sono dunque quelli che meglio vengono sopportati dalle piantine nel periodo germinativo da me studiato: ben inteso però che anche qui si hanno delle proprietà biologiche specifiche proprie per ognuno di essi. Intanto è da osservare che il peso atomico di questi elementi varia fra un massimo di 87.63 (Sr) ed un minimo di 6.94 (Li), quindi si mantiene piuttosto basso. Dippiù è da notare il parallelismo curioso che passa fra lo Sr ed il Rb da una parte ed il Mn e Cr dall'altra; questo parallelismo si rivela non solo nelle proprietà biologiche ma anche nel peso atomico, che sono pressochè uguali.

Ho constatato per tanto questo fatti; però per la loro ulteriore conforma ho naturalmente bisogno di molti altri dati sperimenrali, che verrò esponendo in seguito.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* Nota I di Bruno Brunacci [1], presentata dal Socio L. Luciani.

Dalle ricerche di L. Fredericq [2] relative all'influenza dell'ambiente esterno sulla composizione salina del sangue di alcuni animali acquatici, risultò già il differente comportamento di alcuni invertebrati marini rispetto a quello di alcuni vertebrati, nel senso, cioè, che, mentre l'*ambiente interno* [Cl. Bernard [3]] dei primi varia col variare di quello *esterno*, nei secondi invece « le milieu intérieur, constitué par le sang, s'isole plus ou moins du milieu extérieur dans le quel vit l'animal ».

È tuttavia noto che solo con l'estesa e sistematica applicazione dei metodi d'analisi fisico-chimica (concentrazione molecolare e conducibilità elettrica) ai liquidi di *animali marini* appartenenti alle varie classi d'invertebrati e vertebrati, il Bottazzi [4] potè per il primo stabilire come la

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto fisiologico di Siena.

(2) L. Fredericq, Bull. Ac. roy. de Belgique, IV, 1882; Arch. d. zool. expér. et générale, III, 1885.

(3) Cl. Bernard, *Leçons sur les phénomènes de la vie*, 1878; *Introd. à l'étude de la méd. expérim.*, 1865.

(4) F. Bottazzi, Arch. ital. d. biol., **28**, 1897; Arch. di fisiol., III, 1906, e V, 1908; Ergebn. d. Physiol., VII, 1908.

indipendenza relativa dell'ambiente interno da quello esterno s'inizî coi *Teleostei.*

In base alle ricerche del Bottazzi ed a quelle di successivi ricercatori [Quinton (1), Fredericq (2), Rodier (3), Dekhuizen (4), Dakin (5) ecc.] l'Höber (6), propose di distinguere gli animali, a seconda dei loro poteri di regolazione osmotica (analogamente a quanto si era fatto per la regolazione termica), in *animali pecilosmotici* ed *animali omeosmotici.* Ai primi apparterrebbero tutti quelli che uniformano la concentrazione molecolare dei loro liquidi interni a quella dell'acqua del mare nel quale vivono (invertebrati e vertebrati, fino ai teleostei esclusi); mentre farebbero parte dei secondi tutti gli animali che possiedono una propria e caratteristica concentrazione interna, indipendente da quella esterna (dai Teleostei, inclusi, ai Mammiferi).

Relativamente agli *animali d'acqua dolce,* essi si comportano diversamente da quelli marini.

Qui, infatti, anche gli *Invertebrati* possiedono una pressione osmotica superiore a quella dell'ambiente esterno [cfr. Bottazzi (7), Höber (8), E. M., P. Widmark (9), Backman (10)]. Ciò vale anche pei *Vertebrati* (Anfibî, Teleostei, Rettili) [cfr. Bottazzi e Ducceschi (11)].

Dalle esperienze di varî ricercatori è poi resultato che alcuni invertebrati di acqua dolce possono adattarsi a vivere anche in acqua salata, e che ciò avviene con perdita di peso [perdita di acqua, P. Bert (12)]. [Cfr. F. S. Beudant (13), H. Eisig (14), P. Bert (15)].

Così pure è noto che in alcuni *pesci ossei* (es. Anguilla), la di cui pressione osmotica del sangue ascende circa alla metà di quella del mare ambiente, la concentrazione sanguigna diminuisce considerevolmente allorchè

(1) Höber, Pysikalische Chemie d. Zelle u. d. Gewebe, 3. Aufl., 1911.

(2) Fredericq L., Bull. Ac. roy. de Belgique 1898, 1901, 1902, 1911; Arch. de Biol. XX, 1904; Arch. int. de Physiol. XI, 1911.

(3) Dakin, Bioch. Journ., III, 1908.

(4) Dekhuizen, Arch. néerland., *10,* 1905.

(5) Rodier, Trav. d. la stat. zool. d'Arcachon, 1899.

(6) Quinton, Compt. rend. Soc. biol., *51,* 1899; *57,* 1904. Compt. rend. Ac. d. sc., *131,* 1900.

(7) Bottazzi, Arch. di fisiol., III, 1906.

(8) Höber, loc. cit.

(9) E. M. P. Widmark, Zeitschr. f. allg. Physiol., X, 1910.

(10) Backman, Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch., *149,* 1913.

(11) Bottazzi e Ducceschi, Archiv. ital. d. biol., XXVI, 1896.

(12) P. Bert, Compt. rend. Soc. biol., III, 1873; Compt. rend. Ac. d. sc., *97,* 1883; Compt. rend. Soc. biol., *37,* 1885.

(13) F. S. Beudant, Ann. d. chemie et d. physique, II, 1816.

(14) H. Eisig, Fauna u. Flora d. golfes von Neapel, XVI, 1887.

(15) P. Bert., loc. cit.

passano nell'acqua dolce [Quinton (1)]; ed inversamente che, ponendo un'anguilla, il cui sangue congeli a — 0°,57, dall'acqua dolce, in acqua del mare (del nord, $\Delta = 1°,9$) il sangue stesso aumenta nella sua concentrazione fino a congelare a $\Delta = 0°,745$, cioè raggiunge il valore medio trovato per il sangue dei Teleostei marini, senza tuttavia pervenire alla concentrazione del mare [Dakin (2)].

Circa gli *Anfibî*, esistono numerose ricerche antiche e recenti, eseguite sia su la pelle della rana staccata dall'organismo [Matteucci e Cima (3), Reid (4), Bayliss (5)], sia sull'animale vivente [Cl. Bernard (6), Emery (7), P. Bert (8), Spina (9), Semper (10), Ružička (11), Traube-Mengarini (12) Durig (13), Overton (14)], le quali dimostrano la permeabilità della loro pelle nelle due direzioni e la possibilità che questi animali hanno di perdere, per evaporazione, fino al 25-30 % del proprio peso, per aumentarlo poi di nuovo immergendoli in acqua od in soluzioni saline.

I resultati ottenuti non sono tuttavia molto concordi, nè per ciò che concerne la pelle staccata dal corpo, nè per ciò che si riferisce alla cute dell'animale vivente. Infatti, mentre, per il primo caso, Matteucci e Cima osservano un passaggio maggiore delle sostanze disciolte dalla faccia interna della pelle verso quella esterna, e Reid nota una corrente maggiore di liquido dall'esterno all'interno, Bayliss invece, pur constatando un passaggio di liquido e di sostanze disciolte in entrambe le direzioni, non osserva una maggiore velocità di diffusione a favore dell'una piuttosto che dell'altra parte.

Anche relativamente alla permeabilità della pelle dell'animale vivente, i resultati sono alquanto diversi, poichè, mentre da varî ricercatori (Spina, Ružička, Durig ecc.) è ammessa la permeabilità per l'acqua e per i sali nelle due direzioni, pur notando una caratteristica differenza tra la pelle dell'animale morto e quella del vivo; da altri (Overton) è invece asserita la permeabilità nelle due direzioni soltanto per l'acqua e le sostanze solubili

(1) Quinton, Compt. rend. Soc. biol. *57*, 1904.
(2) Dakin, loc. cit.
(3) Matteucci e Cima, Ann. d. chemie et d. physique, XIII, 1845.
(4) Reid, Journ. of Physiology, 1890.
(5) Bayliss, Bioch. Zeitschr., XI, 1908.
(6) Cl. Bernard, loc. cit.
(7) Emery, Ann. d. sc. natur., XII, 1869.
(8) P. Bert, Compt. rend. Ac. d. sc., *73*, 1871; Compt. rend. Soc. biol. III, 1873; Compt. rend. Ac. d. sc., *97*, 1883.
(9) Spina, *Ueber Resorption u. Secretion*, Leipzig, 1882.
(10) Semper, *Die natürlichen Existenzbeding. d. Thiere*, Leipzig, 1880 (Brockhaus)
(11) Ružička, Wiener med. Blätter, Jahrg., *18*, 1898.
(12) Traube-Mengarini, Rend. Acc. Lincei, *5*, 1896.
(13) Durig, Pflüger's Arch., *85*, 1901.
(14) Overton, Verhandl. d. physik. med. Gesell. zu Würzburg, 1904.

nei lipoidi, e, in confronto a questa, la quasi impermeabilità per le sostanze insolubili nei lipoidi.

Tutte le ricerche relative alla permeabilità della pelle degli Anfibî eseguite sull'animale vivente, sono state fatte desumendole dalla variazione in peso del loro corpo immerso in acqua e nelle più svariate soluzioni di cristalloidi elettroliti e non elettroliti, sia dopo aver fatto subire all'animale vivo una perdita in peso del 25-30 %, per evaporazione, sia nell'animale normale. Nell'un caso come nell'altro, le ricerche sono state fatte a cloaca aperta ed a cloaca chiusa, e tanto a circolazione sanguigna funzionante ed a sistema nervoso centrale integro, quanto a circolazione sanguigna abolita (asportazione del cuore) ed a sistema nervoso distrutto (Spina).

I primi a determinare la concentrazione molecolare del sangue degli Anfibî desumendola dall'abbassamento del punto di congelazione del loro siero, furono Bottazzi e Ducceschi (1896) (1) i quali ottennero i valori seguenti:

Rana escul. (siero) $\Delta = 0°,563$,
Bufo viridis (") $\Delta = 0°,761$ (?).

Questi numeri sembrarono troppo elevati ad Hamburger (2); ed il Bottazzi stesso, in successive ricerche (3), pur ritenendo esatti i valori precedentemente trovati per la rana, credette che quelli relativi al *Bufo viridis* fossero effettivamente errati. In queste ricerche successive egli ottenne:

per la *Rana escul.* (siero) $\Delta = 0°,435$
$x_{30°} = 119 \times 10^{-4}$
" " " (urina) $\Delta = 0°,170$
$x_{30°} = 45 \times 10^{-4}$ (?)
per il *Bufo vulgaris* (siero) $\Delta = 0°,445$
$x_{30°} = 121 \times 10^{-4}$
" " " (urina) $\Delta = 0°,155$
$x_{30°} = 29 \times 10^{-4}$.

Nell'esposizione delle nostre esperienze vedremo che il supposto errore del Bottazzi corrisponde invece a quanto effettivamente si verifica in determinate circostanze di vita di questa classe di animali (ibernazione), e che l'opinione di Hamburger non era quindi esatta.

Dalla conoscenza di questi dati e da quella delle ricerche precedentemente ricordate (dalle quali già risultava la possibilità negli Anfibî di aumentare o diminuire il proprio peso per assunzione o perdita d'acqua), nonchè

(1) Bottazzi e Ducceschi, loc. cit.
(2) Hamburger, Osmotischer Druck ecc., I, 460, 1902.
(3) Bottazzi, Arch. di Fisiol., III, 1906.

dalle mie ricerche [1] sul riflesso tonico diffuso, ottenuto appunto nella rana escul. sottraendo acqua dal sistema nervoso centrale, sia per evaporazione (soggiorno dell'animale a sistema nervoso centrale scoperto, sotto una campana di vetro con acido solforico bollito), sia per iniezione sottocutanea di soluzioni saline ipertoniche, fui indotto ad eseguire le presenti ricerche dal punto di vista della regolazione osmotica di questi animali. Mi sembrò infatti non privo d'interesse uno studio sistematico sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno, variando la concentrazione di questo e determinando coi metodi fisico-chimici quella dei loro liquidi interni; mentre nello stesso tempo cercavo di indagare il meccanismo di questa regolazione.

Le esperienze precedenti fatte col metodo della pesata dell'animale non mi sembravano d'altro canto adatte per un più preciso studio del fenomeno che mi proponevo di indagare.

Un riassunto dei principali resultati ottenuti da me nella primavera-estate del 1911 fu già comunicato il 6 ottobre 1911 a Torino in occasione della 1ª Riunione della Soc. ital. di biochimica [2], e successivamente in Roma alla 5ª Riunione della Soc. ital. per il progresso delle scienze il 16 ottobre 1911 [3]. Da quell'epoca sono state eseguite ricerche nello stesso senso da Backman e Sundberg [4] le quali sostanzialmente ripetevano quelle di Durig e di Overton fatte per pesata, e confermavano in parte le mie.

Riferirò ora in successive Note i particolareggiati resultati delle mie esperienze.

Esse sono state eseguite nella *Rana esculenta* in *periodo estivo* ed in *periodo d'ibernazione*, prendendo in esame:

1°) i limiti dell'adattamento;

2°) i fenomeni che si osservano negli animali immersi in acqua distillata ed in soluzioni saline ipertoniche;

3°) la concentrazione molecolare e la conduttività elettrica dei loro liquidi interni, nonchè il contenuto degli stessi in sostanze organiche, inorganiche ed in N totale

4°) il tempo entro il quale la regolazione osmotica avviene;

5°) l'importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria;

(1) Brunacci B., Zeitschr. f. Allg. Physiol., IX, 1908.

(2) Brunacci B., Atti della Soc. ital. d. biochimica, 1ª Riunione, Torino, 6-8 ottobre 1911. Ed. Stucchi e Ceretti, Milano, pp. 170-172.

(3) Idem, Atti Soc. ital. p. il progresso d. scienze, 5ª Riunione, Roma, 12-18 ottobre 1911, pp. 880-883; Acc. fisiocritici, Siena, 1912; Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch., *150*, 1912; *153*, 1913; Arch. ital. de biol., *58*, 1912.

(4) Backman e Sundberg, Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch. *148*, 1912; *151*, 1913.

6°) i fenomeni che si osservano negli animali immersi in soluzioni saline isotoniche ed ipotoniche;

7°) l'influenza della temperatura;

8°) l'influenza della pressione barometrica.

A) Rana esculenta (estiva).

1°) *Ricerca del limite massimo di adattamento.*

Il primo quesito che mi proposi di risolvere, fu quello relativo al *limite massimo* di adattamento compatibile con la vita.

Allestii perciò sette soluzioni di Ringer [1] contenenti progressivamente grammi 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 ‰ di NaCl ciascuna, e gli altri sali (KCl, $CaCl_2$, $NaHCO_3$) in proporzione; e ne misi tre litri in ciascuno dei sette recipienti, nel quale posi cinque rane il più possibilmente eguali per peso e grandezza, preventivamente asciugate con un panno.

Tutte queste rane, portate da poco in Laboratorio, erano state tenute per alcuni giorni in acqua di condotta cambiata tre volte al giorno, allo scopo di eliminare dal loro canale digerente ogni residuo di alimento. Gli animali in esperimento furono tenuti sempre in una stanza sotterranea annessa all'Istituto, la quale non subiva oscillazioni notevoli di temperatura nelle varie ore della giornata, e nei varî mesi dell'anno; ed era completamente allo scuro.

Esperienza I

(3 giorni di permanenza. Temperatura ambiente, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	14	15	NaCl ‰
20-V-1911 ore 8,30 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
» » 11,30 . . .	»	»	»	»	»	»	1 +	
» » 13 . . .	»	»	»	»	»	1 +		
» » 16 . . .	»	»	»	»	»	1 +	1 +	
» » 17 . . .	»	»	»	»	»	2 +	2 +	
» » 18,30 . . .	»	»	»	»	1 +	1 +	1 +	
21-VI-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	1 +	4 +	—	—	
» » 11,20 . . .	»	»	»	1 +	—	—	—	
» » 16 . . .	»	»	»	1 +	—	—	—	
» » 17,30 . . .	»	»	»	1 +	—	—	—	
» » 19 . . .	»	»	1 +	»	—	—	—	
22-VI-1911 » 8 . . .	»	»	»	1 +	—	—	—	
» » 11 . . .	»	»	1 +	—	—	—	—	
23-VI-1911 » 8,30 . . .	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

[1] Si è usata la soluzione di Ringer, anzichè soluzioni semplici di Na Cl, per ovviare alle conseguenze dannose di queste ultime [cfr. J. Loeb, Pflüger's Arch. *80*, 1900, *88*, 1902; Micheels, Arch. intern. de Physiol. *4*, 1906-907.

Esperienza II

(4 giorni di permanenza; si tralascia la soluzione 15 ‰. Temperatura, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	14	NaCl ‰
23-VI-1911 ore 11 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
» » 17,30 . . .	»	»	»	»	»	2 +	
24-VI-1911 » 8 . . .	»	»	»	»	»	3 +	
» » 9,30 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
» » 10,30 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
» » 16,30 . . .	»	»	»	»	»	—	
» » 18 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
25-VI-1912 » 11 . . .	»	»	»	1 +	»	—	
26-VI-1911 » 11 . . .	»	»	»	2 +	2 +	—	
27-VI-1911 » 11 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

Esperienza III

(5 giorni di permanenza; si tralascia la soluzione 14 ‰. Temperatura, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	NaCl ‰
28-VI-1911 Ore 9 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
29-VI-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	2 +	5 +	
30-VI-1911 » 9 . . .	»	»	»	3 +	—	
1-VII-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	—	—	
2-VII-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	—	—	
3-VII-1911 » 9 . . .	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

Da queste esperienze risultò dunque che la soluzione Ringer contenente l' 11 ‰ di Na Cl era sempre troppo concentrata sebbene in essa talora le rane potessero resistere in vita parecchio tempo (Esp. II). Si ritenne perciò come *limite massimo la soluzione Ringer contenente il* 10 ‰ di Na Cl, mentre la soluzione 11 ‰ poteva considerarsi *ultra-massima*. Come *limite minimo* si scelse, naturalmente, l'acqua distillata.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri.* Nota II [1] del dott. G. Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

Nel prosieguo delle mie osservazioni sull'influenza della nutrizione con tiroide di Mammiferi nelle larve di Anuri, ho voluto vedere il comportamento della tiroide degli animali sperimentati.

È noto, per alcuni lavori pubblicati sull'argomento, che la tiroide tenderebbe a reagire sotto l'influenza del regime: le ricerche in proposito sono, però, tutt'ora controverse. Chalmers Watson asserisce che una nutrizione costituita esclusivamente con carne produce nei ratti ipertrofia della tiroide [2]: Le osservazioni di Watson hanno però incontrato obiezioni (Thompson, Forsyth) [3]; nè, ricordando ciò che si riscontra nei mammiferi, si può ritenere accertata l'influenza dell'inanizione (Thompson, Missiroli).

In quanto poi all'azione della tiroide, parrebbe, dalle ricerche di Lanz (1895, citato da Vincent), che iniezioni sottocutanee di estratto di tiroide tenderebbero a produrre atrofia della glandula.

La maggior parte delle mie osservazioni si riferisce a larve nutrite con tiroide, appartenenti all'esperimento VII (Cotronei, 1913, pag. 31).

La tiroide, pari, risulta costituita da piccole vescicole, contenenti colloide: ma la tiroide è assai meno sviluppata e le vescicole assai inferiori al massimo sviluppo raggiunto dalle vescicole di esemplari nutriti diversamente e esaminati nella stessa fase biologica, subito dopo l'emissione di un arto anteriore. Tenendo conto di tutti i fattori, osserviamo che le larve nutrite con tuorlo d'uovo di gallina, carne di bue, o sviluppate in condizioni naturali, hanno raggiunto dimensioni assai più cospicue; mentre è noto che le larve nutrite con tiroide, presentano un accrescimento assai più esiguo; siccome in larve allevate con migliore regime di nutrizione, ma in fase meno inoltrata d'accrescimento, si riscontra un sempre meno cospicuo sviluppo della tiroide, mi sembra logico, prima di ogni altra considerazione, porre in relazione il

[1] Vedi questi Rendiconti, pag. 453.

[2] Watson, C., *On the influence of a meat diet on the tyroid glands.* Yournal of Pysiol. 1904, pag. 31, 1906 pag. 34.

[3] Con ulteriori ricerche, Missiroli (Arch. di Fisiol., vol. X, 1912) ha riconosciuto che la nutrizione con sostanze albuminoidi fa riscontrare nei cani iperfunzione della tiroide, mentre coi grassi e con idrati di carbonio non si notano modificazioni osservabili all'esame istologico.

deficiente sviluppo della tiroide in larve nutrite con tiroide di mammiferi, con il deficiente accrescimento raggiunto.

Ulteriori osservazioni, eseguite con rigorose indagini di controllo, ci diranno fino a qual punto il regime possa negli Anfibî influire sul comportamento della tiroide. Per le poche e controverse cognizioni in proposito, l'argomento merita di essere studiato; e giustamente S. Vincent (¹) dichiara (pag. 334) « the whole subject of physiological changes in the thyroid under varying conditions is urgently in need of systematic investigation ».

Osservato che l'intensa influenza di una nutrizione con tiroide di Mammiferi si manifesta come causa disarmonica oltre che acceleratrice, è interessante, ricordare alcune esperienze di Wintrebert (²). Questo ricercatore, in 2 esperienze successive, ha tolto dall'acqua dei girini di *Rana temporaria* e li ha messi al fondo di un grande cristallizzatore chiuso, su uno strato vegetale appena umido. All'inizio degli esperimenti, l'autore dichiara di averli rimessi nell'acqua, per qualche minuto, 2 o 3 volte al giorno, ma presto s'accorse dell'inutilità di questa manovra.

Nel 1° esperimento, nel quale anche i controlli erano stati tenuti per un giorno fuori dell'acqua, i girini sperimentati emettono gli arti, o un solo arto anteriore, un giorno prima dei controlli.

Gli stessi risultati si ottengono quando i controlli non sono stati tenuti fuori dell'acqua.

L'interesse di questi esperimenti viene oscurato dal fatto che si tratta di una differenza di tempo troppo breve con i controlli: inoltre gli esemplari che servivano agli esperimenti erano notevolmente grandi (43 mm.).

La metamorfosi era già pronta ad effettuarsi; ma l'aver messo i girini fuori dell'acqua, è servito a lasciar esplodere più rapidamente i fenomeni.

Wintrebert (³) descrive di avere anche notato delle modificazioni cronologiche nelle correlazioni dei fenomeni, in seguito al cambiamento d'ambiente; ed afferma che la fuoruscita degli arti anteriori non rappresenta, nelle larve in inanizione, l'inizio della metamorfosi; il 1° fenomeno è la precoce regressione del tubo digerente. Il trasporto nell'aria, mettendo fuori uso le branchie e la coda stimolerebbe la loro regressione ma non la loro trasformazione: la coda, diviene atrofica ma conserva la sua forma; la regressione anormale delle branchie e della coda stimola forse il definitivo sviluppo degli arti (membres).

(¹) Vincent S., *Internal secretion and the ductless glands.* London 1912.

(²) Wintrebert P., *Sur le déterminisme de la métamorphose chez les Batraciens Anoures.* VI. *La mise des larves hors de l'eau.* Comp. Rend, Soc. Biol. vol. 63, an. 1901, pag. 257).

(³) Wintrebert P., VII. *La marche anormale des phénomènes en inanition.* Compt. rend. Soc Biol. 1, vol. 63, an. 1907, pag. 43.

I risultati di Wintrebert meriterebbero di essere estesi per accertare fin a qual punto si potrebbero ottenere identità di risultati con cause diverse. Si presenta interessante anche uno studio di comparazione dei risultati nelle neotenie (Anuri) con i nostri risultati sperimentali.

L'azione della tiroide come causa acceleratrice tende a prodursi più agevolmente quando le larve sono più avanzate nell'accrescimento: è opportuno di ricordare, a questo proposito, che Davemport ([1]) ha dimostrato che, mentre l'uovo di Rana contiene circa il 50 % di acqua, in seguito, nei primi 15 giorni, l'acqua aumenta notevolmente; poi, dopo un periodo nel quale culmina, la percentuale d'acqua tende rapidamente a diminuire. Pur tralasciando, per ora, di ricordare tutti quelli che si sono occupati dell'importantissimo argomento, ricorderò che *Schaper* ([2]), estendendo le ricerche di Davemport, riscontrò che le larve di Rana, al 6° giorno hanno, il 66,67 % di acqua; fin all'8° giorno l'aumento è piccolo. All'8° giorno, la percentuale dell'acqua aumenta dal 68,29 al 73,58 %: dal 10° all'11° c'è un aumento dal 76,19 all'84,95 %; dall'11° al 14° aumenta fino a 91,56 %.

Infine al 40°, c'è il 95,02 %. A tal epoca l'autore trova che sono evidenti le gemme degli arti posteriori.

Dal 40° giorno la percentuale dell'acqua comincia a diminuire. Al 54° giorno, quando il corpo è molto sviluppato, la larva presenta una quantità d'acqua che va al 92,65 %; le estremità posteriori vanno progredendo nello sviluppo.

In seguito, col progredire della fase di metamorfosi, la percentuale dell'acqua va sempre più riducendosi, fino a diventare il 76,40 %.

L'importanza di queste ricerche sta anche in questo: il comportamento dell'acqua, così diverso, in un tempo relativamente breve, è un palese indizio dell'attività metabolica che si modifica rapidamente nelle succesive fasi che si susseguono nell'accrescimento larvale: una nutrizione con tiroide viene a modificare il regolare andamento dei fenomeni, e i suoi effetti sono differenti a seconda della fase in cui vengono iniziati gli esperimenti.

Che una nutrizione con tiroide modifichi profondamente il chimismo dell'organismo, risulta oramai da una numerosa serie di ricerche sui mammiferi: una continuata somministrazione con tiroide pone l'organismo in istato patologico per la disintegrazione dell'albumina e per le aumentate ossidazioni; e si sa che con l'aumentata assunzione d'ossigeno non va di pari passo l'eliminazione dell'anidride carbonica: ed è assai importante

([1]) Davemport, *The rôle of water in growth* Proc. Boston Soc. Nat-Hist., XXVIII, 1897.

([2]) Schaper A., *Beiträge zur Analyse des tierischen Wachsthums*. Arch. f. Entw. Mech., Bd. 14, pag. 307.

di ricordare che Leichtenstern [1]. (1894) osservò per il primo (casi di mixoedema) che con la somministrazione di tiroide si otteneva una notevole diminuzione di peso, determinata dapprima da una aumentata eliminazione d'acqua, in seguito anche da una aumentata eliminazione di sostanze azotate. Una maggiore eliminazione d'acqua si potrebbe anche dedurre dal considerare le condizioni del ricambio organico in relazione a un' intensa nutrizione con tiroide.

Soltanto dal comparare lo studio dell'azione chimica di una nutrizione con tiroide (tenuto conto degli studî finora fatti in proposito, in campi così differenti di studii) con lo studio inteso nel senso più lato della metamorfosi, può risultare una spiegazione delle peculiari modificazione che la tiroide induce negli *Anfibii Anuri.* Così l'arresto dell'accrescimento, che si riscontra negli Anfibii e che parrebbe contrario alle proprietà della tiroide, si spiega facilmente allorchè pensiamo che la nutrizione con tiroide produce negli Anfibii Anuri effetti che sono concomitanti a quelli che si riscontrano naturalmente nella fase di metamorfosi: l'organismo prima ancora di aver raggiunto il massimo dell'accrescimento larvale, verrebbe messo nelle condizioni biologiche della metamorfosi, e cessa allora di conseguenza ogni accrescimento larvale.

Ricordando il comportamento dell'acqua, io ho voluto riferirmi a una condizione biologica caratteristica della fase di metamorfosi: ma so bene che non è possibile di limitare o riferirsi unicamente a un solo possibile effetto. Il comportamento dell'acqua è un indizio, però, molto importante e palese del metabolismo di una determinata fase biologica: nello studio degli effetti della tiroide non è possibile tuttavia di prescindere da tutte le altre condizioni che si vengono a stabilire, ed è da ritenere che i fenomeni delle ossidazioni possano anche essi influire in modo cospicuo. Le antiche ricerche di *Bataillon* [2] potrebbero essere, così, considerate sotto una nuova luce.

Riassumendo.

Con questo nuovo contributo ho riassunto innanzi tutto i lavori che riguardano l' argomento che c' interessa, apparsi negli ultimi mesi, ed ho ricordato come fin dal mio primo lavoro ho insistito nel considerare l'azione disarmonica d' un' intensa nutrizione con tiroide di mammiferi, azione i cui effetti variano a seconda del grado d'accrescimento: la disarmonia è in relazione con la troppo rapida accelerazione, e ho ricordato gli effetti tossici di una intensa nutrizione con tiroide, già descritti nel mio primo lavoro, e la

[1] Leichtenstern, *Ueber Myxoedem und Entfettungskuren mit Schilddrusenfütterung* Deut. med. Woch, n. 50, an. 1894.

[2] Bataillon E., *Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibies anoures.* Ann. Univ. Lyon, tome 2, pag. 123, an. 1891.

tendenza, delle larve in metamorfosi, a non ultimare la fase iniziata. Con nuove osservazioni ho riscontrato che la disarmonia organica non solo si manifesta nelle larve nelle quali s'inizia la fuoruscita degli arti, ma si manifesta in fasi ancora precedenti; ho notato che la tiroide della larve nutrite con tiroide di mammiferi, e che hanno iniziato la fase di metamorfosi, si presenta poco voluminosa e con piccole vescicole, contenenti colloide: il debole sviluppo della tiroide innanzi ogni altra considerazione, è da mettersi in relazione con la debole massa raggiunta dagli animali nelle condizioni sperimentate. Ho poi ricordato alcune condizioni biologiche dell'accrescimento larvale e della metamorfosi degli Anfibî Anuri, e ho cercato di prospettare un rapido confronto con l'influenza chimico-biologica esercitata dalla tiroide: non è illogico il cercare di rintracciare da concomitanza di effetti la peculiare azione esercitata dalla somministrazione di tiroide di Mammiferi alle larve di Anfibii Anuri, che presentano un caratteristico ciclo biologico.

Chimica. — *Sopra una nuova modificazione del metodo di Kjeldahl.* Nota di L. Marino e F. Gonnelli, presentata dal Socio R. Nasini.

In prosecuzione di una ricerca fatta da uno di noi (1) su alcuni composti del protossido di vanadio, ci eravamo da qualche tempo proposti di vedere se le proprietà catalizzatrici degli ossidi di vanadio, ampiamente confermate ed estese da Rutter (2), potevano con vantaggio essere utilizzate nel processo Kjeldahl.

Avevamo già quasi ultimato il nostro studio, quando nel Pharmazeutische Zentralhalle, 1911, pag. 1121, apparve una breve notizia del dott. Oefele (New York, 328, E. 58) nella quale è detto che egli, usando come catalizzatore il pentossido di Vanadio, aveva ottenuto ottimi risultati.

Il dott. Oefele non diede però, a conferma di questa sua affermazione, alcuna tabella di valori, confrontabili con quelli da noi ottenuti; e siccome nelle condizioni in cui egli consiglia di operare, il trovato è sempre inferiore al valore teorico, così ci è sembrato allora conveniente ritardare la nostra pubblicazione, in attesa di qualche altra sua Nota più particolareggiata sull'argomento.

Essendo omai trascorsi due anni, crediamo di poter riferire sulle nostre esperienze le quali proverebbero che l'impiego di un tale ossido può essere praticamente consigliabile solo quando si opera nel modo da noi in seguito descritto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa.
(2) Zeitschr. f. anorg. Chemie, *32*, 55.

Data la poca precisione delle indicazioni fornite dal dott. Oefele, riportiamo integralmente i periodi della brevissima Nota che ci riguardano.

« Da nun Vanadium das höchste bisher bekannte Vermögen zur Sauer-
« stoffübertragung besitzt, so lag es nahe der zersetzenden Schwefelsäure an
« Stelle eines anderen metallischen Sauerstoffüberträgers eine kleine Spur
« Vanadiumpentoxyd beizugeben. Unter Umständen trat nun am Anfang
« ein leichtes Aufschäumen ein, so dass die anfängliche Erhitzung vorsichtig
« gesteigert werden musste.

« Danach trat aber die Klärung und aufhaltung der Lösung und Zer-
« setzung der organischen Stoffe so rasch und glatt ein, und die Aufsau-
« gung des Ammoniak bei der folgenden Destillation vollzog sich so rasch
« und glatt, dass ich für jedes Kjeldahl-Verfahren nur den Zusatz der nötigen
« Schwefelsäure und 1 Dezigramm Vanadiumpentoxyd zur betreffenden orga-
« nischen Substanz empfehlen möchte ».

Come si vede, da questa breve notizia non risulta affatto in quali condizioni è conveniente di operare.

Senza enumerare le varie modificazioni apportate al processo Kjeldahl, perchè troppo note, ricordiamo soltanto che Rivière e Bailache [1] accennano di avere sperimentato con gli acidi vanadico e molibdico; e dicono di aver abbandonato il metodo, per la lunghezza del tempo necessario a completare l'ossidazione. A questa stessa conclusione si giunge con molte delle nostre esperienze: e certamente il dott. Oefele dev'essere stato tratto in inganno dalla presenza di qualche composto azotato presente in uno dei reattivi adoperati. Descriveremo perciò con qualche particolare il metodo da noi seguito.

Per poter controllare l'esattezza dei resultati, abbiamo sempre per alcune sostanze eseguito la determinazione dell'azoto col metodo di Dumas, prendendo come valore teorico di riferimento la media di tre o quattro determinazioni; per altre ci siamo riferiti alla media ottenuta seguendo il metodo di Gunning. La disaggregazione si faceva nei soliti palloncini per metodo Kjeldahl, aggiungendo alla sostanza pesata la quantità di catalizzatore e poi 20 cc. di acido solforico concentrato. Come ossido catalizzatore adoperavamo il pentossido di Vanadio ottenuto per lenta calcinazione del metavanadato ammonico sino a completa eliminazione dell'ammoniaca. Si teneva conto del tempo a partire dal momento in cui cominciava lo sviluppo dei vapori di acido solforico, e la reazione si considerava finita quando il liquido aveva assunto una colorazione verde-smeraldo. La soluzione solforica, dopo raffreddamento, veniva versata in 100 cc. di acqua distillata contenuta nel pallone della distillazione, lavando poi ripetutamente con acqua il recipiente.

(1) Bullet. Soc. chim. de Paris, *15*, 806 (1896).

La distillazione può comodamente eseguirsi senza inconvenienti, adattando al pallone contenente il liquido da distillare un tappo a tre fori: nell'uno passa un imbuto a rubinetto per l'introduzione della soda necessaria; nell'altro giunge il tubo adduttore di un generatore di vapore che serve a facilitare l'ebollizione del liquido alcalino; nel terzo entra una delle solite bolle Stutzer congiunta al refrigerante, all'estremità del quale trovansi i tubi di assorbimento con acido solforico titolato.

Il secondo pallone addizionale, spesso impiegato per evitare gli spruzzi della soda, diviene superfluo, perchè il liquido bolle assai regolarmente, dato che rimane limpido o con traccie minime di precipitato.

Per giungere a dei risultati sicuri ci è sembrato opportuno di determinare innanzi tutto quale è la

Influenza del catalizzatore sulla distillazione dell'ammoniaca.

È noto che uno dei maggiori inconvenienti che presenta l'impiego dell'ossido di mercurio come catalizzatore, si è quello di formare delle combinazioni mercurio-ammoniacali le quali, secondo Viollet [1] non sarebbero completamente decomponibili con la soda neppure dopo aggiunta di solfuro di sodio.

Maquenne e Roux notarono che, nell'uso del solfuro di sodio, non solo si producono dei composti solforati volatili, fra i quali l'idrogeno solforato, che disturbano la titolazione, ma si precipita anche incompletamente il solfuro di mercurio, a causa della solubilità di quest'ultimo nei solfuri alcalini. Questo porterebbe a riformare nuovamente composti ammoniacali simili a quelli che ci si propone di distruggere. Bisognava perciò assicurarsi che, una volta avvenuta la completa trasformazione, tutto l'azoto poteva eliminarsi sotto forma di ammoniaca, qualunque si fosse la quantità del catalizzatore.

Adoprammo a questo scopo del solfato ammonico puro e dell'urea della Casa Merck ma di recente ricristallizzati. Si procedeva come d'ordinario, a fine di trovarsi sempre nelle stesse condizioni.

Nelle varie esperienze si variò la quantità di catalizzatore da gr. 1 a gr. 1.5, protraendo l'ebollizione da 3 a 4 ore. Si ebbero sempre valori assai vicini al teorico, come risulta da questi due esempi riportati.

gr. 1,3008 di solfato ammonico, dopo disgregazione e distillazione, consumarono di $H_2SO_4 N/_1$ cc. 19.8 da cui si ha la corrispondente quantità di azoto = 0.2773. Cioè: trovato N % = 21.31; calcolato per $(NH_4)_2 SO_4$ = 21.20.

gr. 0.5084 di Urea convenientemente seccata, trattati nello stesso modo, consumarono di $H_2SO_4 N/_1$ cc. 16,9 = gr. 0.237 di azoto, da cui si ha: trovato N % 46.61; calcol. per $CO(NH_2)_2$ 46.62.

(1) Bull. de la Soc. chim. de Paris, 1889, II, pag. 62.

Provando questi dati che il catalizzatore, qualunque si fosse la quantità presente, non ritiene affatto traccie di ammoniaca, cercammo di stabilire se in presenza di esso

Tutto l'azoto è trasformato in ammoniaca.

Impiegammo a questo scopo della limatura di corno e della lana nelle quali il contenuto in azoto era stato determinato col metodo di Dumas. Impiegando 1 gr. di pentossido di Vanadio e 25 cc. di acido solforico concentrato, si ebbero i valori riportati nella seguente

TABELLA 1ª.

Sostanze analizzate	N % Metodo Dumas	Metodo di Kjeldahl modificato			
		Sostanza pesata in gr.	H_2SO_4 N/10 neutralizzato in cm^3	Durata ebollizione con H_2SO_4 conc. in ore	N % trovato
Lana	14.36	0.7570	73.5	1.10′	13.59
Corno	14.95	0.5852	58.0	1.10′	13.87

Come si vede da questi dati e da numerosissime altre determinazioni eseguite, la decomposizione in tali condizioni non è completa neppure se la ebollizione venga prolungata per 4 o 5 ore. Abbiamo allora tentato di completare la distruzione delle sostanze stesse mediante una lenta corrente di ossigeno; ed ecco i risultati ottenuti:

TABELLA 2ª.

Sostanze analizzate	N % Metodo Dumas	Metodo Kjeldahl modificato			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/10 neutralizzato in cm^3	Durata ebolliz. con H_2SO_4 conc. in corrente di ossigeno in ore	N % trovato
Lana	14.36	0.5022	44.2	0.45′	12.32
		0.5000	46.5	0.45′	13.02
		0.5113	49.6	0.30′	13.58
		0.4391	40.4	0.30′	13 88
		0.5162	41.3	0.30′	11.20
		0.4021	37.8	0.30′	13.16
		0.5133	46.2	0 40′	12.6
Corno	14.95	0.4997	49.0	0.35′	13.72
		0.4935	48.9	0.20′	13.87
		0.4862	47.5	0.40′	13.67
		0.4805	47.1	0.30′	13.72
		0.6055	60.5	2.00′	13.98

Si vede chiaramente da questi dati che in presenza di un eccesso di ossigeno non solo non si accelera notevolmente la reazione, ma rimane anzi sempre una differenza in meno di circa l' 1 %, anche prolungando per parecchie ore il riscaldamento. Questa costanza nei risultati mostrerebbe che si originano dei prodotti organici di decomposizione che nelle condizioni indicate non si trasformano in ammoniaca. Tale nostro risultato contraddice a quanto afferma il dott. Oefele, per cui differendo le nostre esperienze soltanto nella quantità di Vanadio, abbiamo esperimentato anche con piccole quantità di catalizzatore, circa 1 decigrammo, conforme alle indicazioni della Nota su riportata. Servendoci di acido solforico ($d = 1.84$) della casa Erba si ebbero i valori riportati nella seguente

TABELLA 3ª.

SOSTANZE ANALIZZATE	N % METODO DUMAS	METODO KJELDAHL MODIFICATO			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/10 neutralizzato in cm³	Durata ebollizione con H_2SO_4 conc. in ore	N % trovato
Corno	14.95	0.6016	60.5	2.00′	14.07
		0.8303	79.8	—	13.45
		0.2043	20.2	—	13.84
		0.2962	29.7	—	14.03
Sangue (secco)	13.83	1.7712	165.0	—	13.04
		0.7961	73.05	—	12.84
		0.6036	55.2	—	12.80

Permane evidentemente ancora il medesimo errore analitico, oscillante intorno all' 1 %, senza poter notare alcuna diminuzione quando si aumenti la concentrazione dell'acido solforico. Riportiamo a conferma della nostra affermazione nella tabella IV alcuni dati ottenuti con acido solforico concentrato purissimo della Casa Merck e con circa gr. 0,1 di V_2O_5; e nella tabella V i risultati di un'altra serie di esperienze eseguite con acido solforico fumante (7 % di SO_3). L'ebollizione si prolungava in ambedue i casi fino ad avere una soluzione verde-smeraldo, avendo cura però di eseguire in parallelo una nuova esperienza con egual quantità di sostanza e di acido solforico, allo scopo di assicurarci che i risultati non variavano quando la ebollizione continuava per un tempo doppio di quello riportato nella tabella.

TABELLA 4ª.

SOSTANZE ANALIZZATE	N % METODO DUMAS	METODO KJELDAHL MODIFICATO			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/₁₀ neutralizzato in cm³	Durata ebollizione in ore	N % trovato
Corno	14 95	0.3636	36.3	5.25′	13.97
		0.3766	36.8	4.20′	13.68
		0.3674	36 3	5.20′	13.84
Sangue (secco) .	13.83	0.3506	31.6	7.00′	12.61

TABELLA 5ª.

SOSTANZE ANALIZZATE	N % METODO DUMAS	METODO KJELDAHL MODIFICATO			
		Sostanza pesata in gr.	Acido $N/_{10}$ neutralizzato in cm³	Durata ebolliz. con ac. solforico conc. (7 % SO_3) in ore	N % trovato
Corno	14.95	0.4178	41.6	—	13.93
		0.4828	48.0	—	13.91
		0.4066	40.5	1.50′	13 94
		0.5090	51.4	1.40′	14.13
		0.3786	36.9	1.50′	13.64
Sangue (secco) .	13.83	0.4084	37.4	—	12.82
		0.6219	58.1	—	13.07
		0.7086	67.0	4.45′	13.23
		0.4912	44.7	4.35′	12.74
		0.3634	33 8	2.50′	13.02
» (altro campione) .	14.36	0.8869	85.9	4.00′	13.55
		0.3415	33.3	2.00′	13 65
		0.8549	87.0	—	13.62
Emulsina . . .	13.24	0.6110	54.0	2.15′	12.37
		0.2765	23.4	1.30′	11.84
Concime azotato	2.73 (col metodo ordinario)	2.0658	38.5	3.30′	2.60

Da queste e da numerose altre analisi eseguite e non riportate si può dunque concludere che il metodo, così come fu proposto da Oefele, non dà

risultati esatti, perchè indipendentemente dalla concentrazione dell'acido solforico, i composti che probabilmente si formano non vengono in tali condizioni trasformati in ammoniaca.

Per avere quindi dei risultati esatti abbiamo trovato assai conveniente aggiungere il pentossido di Vanadio all' acido solforico concentrato in presenza di solfato potassico. Allora non solo si accelera la trasformazione, ma i valori ottenuti si avvicinano ancor più a quelli ricavati applicando il semplice metodo Gunning e complelando poi l' ossidazione con permanganato in soluzione acquosa. Com' è noto per certe sostanze di difficile disaggregazione i valori che si hanno col metodo Gunning sono alquanto più bassi, cosicchè per avvicinarsi al valore teorico è necessaria l' aggiunta del permanganato. La presenza del pentossido di Vanadio renderebbe inutile quest' ultima operazione e, data la piccola quantità di precipitato, resterebbe facilitata l' eliminazione dell' ammoniaca. Valori esattissimi si hanno infatti come si può vedere dalla seguente tabella, quando si operi nel modo seguente: Circa 1 grammo di sostanza si scalda con 20-55 cc. di acido solforico concentrato, in presenza di 7 gr. di solfato potassico e gr. 0,2 di pentossido di Vanadio sino a che il colore della soluzione sia divenuto verde-smeraldo. Si aggiunge allora di nuovo circa gr. 0,2 di V_2O_5 e si continua a scaldare ancora per circa mezz'ora. Sulla soluzione, dopo raffreddamento, si opera nel modo solito servendosi del solito semplice dispositivo dianzi descritto. Ottenemmo così i risultati della seguente

TABELLA 6ª.

Sostanze analizzate	Metodo Gunning (con aggiunta di $KMnO_4$, soluzione acquosa)		Metodo Gunning da noi modificato ($K_2SO_4 + V_2O_5$)			
	N % trovato	Durata ebolliz. in ore	Sostanza pesata in gr.	Durata ebollizione in ore	H_2SO_4 N/10 consumato in cm^3	N % trovato
Sangue (secco)	14.18	4.45′	0.7542	4.0′	76.2	14.15
			0.7359	4.0′	75.2	14.30
Lana	15.05	4.30′	0.7058	3.40′	75.3	14.93
			0.9175	3.40′	98.1	14.96
Corno	15.77	5.50′	0.7536	5.0′	84.6	15.71
Emulsina. . .	13.24	5.0′	0.8803	4.0′	82.6	13.30
» . . .	13.24	5.0′	1.0117	4.0′	94.9	13.17

Riassumendo da quanto è stato detto risulta che:

1°) Il metodo, così come fu proposto da Oefele conduce a risultati inesatti nell' N %, differendo i valori trovati dal teorico di circa l' 1%.

2°) Seguendo la modificazione da noi proposta si hanno risultati esatti quando si fa bollire la sostanza organica (circa 1 gr.) con 20 cc. di acido solforico concentrato in presenza di circa 7 gr. di solfato potassico e gr. 0,2 di $V_2 O_5$ fino ad ottenere una soluzione verde smeraldo. Essa può vantaggiosamente impiegarsi in tutti quei casi in cui la modificazione di Gunning non è sufficiente per trasformare tutto l'azoto in ammoniaca.

Chimica. — *Sui borati*: sistema $BaO\text{-}B^2O^3\text{-}H^2O$ a 30°. Nota I di U. SBORGI, presentata dal Socio R. NASINI [1].

In continuazione delle ricerche sulla composizione dei borati coi metodi descritti in Note precedenti [2], riferisco qui i risultati ottenuti nello studio del sistema BaO , B^2O^3 , H^2O a 30°.

I borati di bario preparati per via umida, che sono stati descritti fin qui, sono i seguenti:

	Molecole BaO-B²O³-H²O	BaO %	B²O³ %	H²O %	
I	1-1-2	59.125	26.988	13.887	Atterberg [3]
II	1-1-4	51.914	23.694	24.392	»
III	1-1-5	48.930	22.332	28.738	Ditte [4]
IV	1-1-10	38.007	17.347	44.646	Laurent [5]
V	1-1-*x*	—	—	—	Berzelius
VI	2-3-3	53.740	36.792	9.468	Atterberg
VII	2-3-7	47.725	32.667	19.608	»
VIII	3-5-6	50.11	38.12	11.77	H. Rose [6]
IX	1-2-2	46.617	42.553	10.830	Gmelin
X	1-2-5	39.998	36.510	23.492	Berzelius Thénard
XI	1-2-*x*	—	—	—	Tünnermann
XII	1-4-12	23.61	43.106	33.284	Ditte [7]

Precipitati delle formule 1-3-6 , 3-4-21 , 3-8-41 ottenuti il primo da Atterberg, gli altri due da Laurent [8], furono riguardati come miscugli di varî borati.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Pisa.
[2] Rend. Acc. Lincei, vol. XXI, pag. 855 e vol. XXII, pagg. 90, 636, 715, 798.
[3] Oefvers. af K. Vetensk. Akad. Fölh 1874.
[4] Ann. Chim. Phys. [5] 30, (1833) 253; e Compt. rend., 96 (1883) 706.
[5] Compt. chim., 1850, 33; Ann. 76, 263; J. B. 1850, 256.
[6] Pogg. 87, 1; J. B. 1852, 314.
[7] Ann. Chim. Phys. [5] 30, (1833) 253; e Compt. rend., 96 (1883), 706.
[8] Confr. per questi e gli altri composti citati: Gmelin-Kraut's-Handbuch der anorg. Chemie (Sieb. Aufl.) Band, II, Abt. 2, 96 e seg.

Per lo studio del sistema ritenni opportuna, per le ragioni che dirò dopo, la preparazione di alcuni borati di bario; e per questa preparazione seguii le diverse vie che sto per descrivere, sempre facendo reagire barite ed acido borico.

Preparazione I. — 170 gr. di barite si sciolgievano in circa 500 cm.³ di acqua calda e si lasciava depositare il carbonato formatosi. Questa soluzione si filtrava direttamente in una soluzione quasi bollente di 62 gr. di acido borico in circa 200 cm.³ di acqua esente da CO^2, tenendo questa soluzione su fiamma. La barite gocciava attraverso il vapor d'acqua allo scopo di evitare la carbonatazione. A mano a mano che la barite gocciava, si formava un precipitato fioccoso, che dapprima si discioglieva agitando, e poi cessava di sciogliersi: in seguito si trasformava in cristallino. Si aggiungeva barite finchè una porzione del liquido, saggiata a parte, non desse reazione leggormente alcalina alla fenolftaleina dopo aggiunta di mannite: quindi si lasciava in riposo per 30 ore a freddo. Dopo 30 ore il precipitato era divenuto polverulento; ed il liquido sovrastante, saggiato come sopra, dava reazione acida. Si filtrava questo precipitato: si lavava rapidamente con acqua (il che si poteva fare con assai facilità); poi si raccoglieva in carta da filtro tra piastre porose e si lasciava seccare. L'analisi [1] dava i seguenti risultati: 47,751 BaO %; 34,897 B^2O^3 %; 17,352 H^2O %. Il composto conteneva una piccola quantità di carbonato, come si poteva riconoscere da un po' di effervescenza prodotta dall'acido. È stata notata più volte la facilità colla quale si trova del carbonato nei borati di bario. Sono stati anche descritti composti del tipo $3(BaO \,.\, B^2O^3 \,.\, H^2O)\,1\,CO^2$, $4(BaO, B^2O^3, CO^2, 7H^2O)$ [2].

Preparazione II. — Si procedeva in tutto come è stato detto sopra: ma a mano a mano che col riposo il liquido sovrastante al precipitato si faceva acido, si aggiungeva barite fino a reazione alcalina.

La scomparsa della barite era assai rapida nei primi giorni; poi si faceva più lenta; in ultimo lentissima. Frattanto il precipitato diveniva nettamente cristallino. Si raccoglieva, si lavava e si asciugava come sopra. La analisi dava 51,84 % BaO, 21,69 % B^2O^3, 26,47 % H^2O.

Preparazione III. — Si partiva dalla solita soluzione calda di barite che si faceva gocciare nel solito modo (filtrandola) in una soluzione di acido borico come quella della preparazione I, tenuta a caldo. Si aggiungeva barite finchè il precipitato fioccoso formantesi cessava di sciogliersi per agitazione. Allora si faceva freddare il liquido tenendo chiuso il recipiente con

(1) L'analisi veniva eseguita qui ed in tutti i seguenti casi coi soliti metodi volumetrici (titolazione della barite con un acido (metilorange): ebollizione in refrigerante a ricadere, per cacciare la CO^2 eventualmente presente: titolazione dell'acido borico con soda esente da carbonati con aggiunta di mannite ed in presenza di fenoftaleina). Tutti i resultati analitici riportati sono la media di varie determinazioni concordanti.

(2) A. Rose, Pogg. 87, 1; J. B. 1852, 314.

tubo a calce sodata, e si otteneva un po' di precipitato di apparenza cristallina. Ora in un altro pallone si filtrava la barite residua facendo passare attraverso il pallone una corrente di idrogeno per impedire la carbonatazione. E poi nella barite filtrata e mantenuta a temperatura ambiente (circa 20°) si faceva arrivare la soluzione fredda di acido borico e di barite prima ottenuta, filtrandola dai cristalli che da essa si erano depositati.

Si continuava frattanto sempre a far passare idrogeno che serviva anche ad agitare tutta la massa. Si formava così un precipitato dapprima fioccoso, poi cristallino, che si deponeva rapidamente lasciando il liquido sovrastante ben limpido. Ad un certo punto questa rapidità di deposizione diminuiva; e, saggiando il liquido nel solito modo si trovava ora reazione acida, ma, aggiungendo un poco di barite fino a reazione alcalina, il liquido tornava a farsi limpido ed il precipitato a deporsi con rapidità. Dopo un riposo di 24 ore si decantava, si lavava con acqua, si raccoglieva e si seccava come nei precedenti casi. L'analisi dava i seguenti resultati: BaO 50,715 %; B^2O^3 22,480 %, H^2O 26,805 %.

Preparazione IV. — Volli applicare al bario il metodo che Van' t' Hoff e Meyerhoffer impiegarono per la preparazione del metaborato di calcio [1], ponendo a reagire l'acido borico con idrato di bario formantesi per doppia decomposizione tra un idrato alcalino ed un sale di bario. La presenza del sale alcalino nel caso del calcio favorisce grandemente la formazione del metaborato che si ottiene rapidamente e ben cristallino, e si volle vedere se questo non si ottenesse anche per il bario. 122 Gr. di $BaCl^2 . 2H^2O$ si scioglievano in 400 cm.³ di acqua a caldo: 56 grammi di KOH si sciolsero pure in 400 cm.³ di acqua, e pure in 400 cm.³ di acqua (esente da CO^2) si sciolsero 62 gr. di acido borico. Poi si posero 40 cm.³ della soluzione di $BaCl^2$ nella soluzione di potassa caustica: si ebbe un precipitato di carbonato di bario. Si filtrò alla pompa, ed al filtrato si aggiunse la soluzione restante di $BaCl^2$. Della miscela, così ottenuta se ne versò nella soluzione di acido borico calda tanta quanta bastò a produrre precipitato permanente, che si separò per filtrazione. Il liquido filtrato si aggiunse ora a piccole porzioni al miscuglio residuo di barite e cloruro potassico, operando a temperatura ambiente. Ad ogni aggiunta di liquido si formava un precipitato fioccoso: ma questo si scioglieva subito per agitazione; finiva anche per sciogliersi tutta la barite che era cristallizzata in fondo al pallone. A mano a mano però il ridisciogliersi si faceva più difficile, ed in seguito compariva un precipitato cristallino. La reazione del miscuglio si manteneva intanto alcalina (mannite e fenoftaleina). L'aggiunta fu proseguita fino a perfetta neutralizzazione: si aggiunse poi qualche goccia di barite. Il precipitato si

[1] Ann., 351 (1907), pag. 109. Cfr. Nota sui borati di calcio., Rend. Acc. Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9, pag. 715.

deponeva rapidamente: il liquido sovrastante era ben limpido. Dopo 24 ore di riposo si decantava (il liquido aveva reazione alcalina come sopra), si filtrava, si lavava con acqua esente da anidride carbonica fino a reazione di cloruri, il che si poteva fare facilmente e rapidamente. Il composto, ben cristallino, raccolto e analizzato, era così costituito: 52,73 °/₀ BaO; 23,70 °/₀ B^2O^3; 23,57 °/₀ H^2O.

Preparazione V. — Una certa quantità di $Ba(OH)_2 . 8H^2O$ si pose a scaldare in un bagno a 80° con aggiunta di una piccolissima quantità di acqua. La soluzione di barite così ottenuta si filtrò poi per filtro caldo in una soluzione di acido borico satura a 50°. Si ottenne un precipitato cristallino: il liquido presentava reazione acida alla fenoftaleina, senza aggiunta di mannite. Si continuò ad aggiungere barite fino ad ottenere una certa quantità di precipitato, ma senza che il liquido divenisse alcalino alla fenolftaleina (senza mannite). Dopo una notte di riposo, si filtrò alla pompa comprimendo anche con carta da filtro. Ma non si lavò per evitare decomposizione, poi si seccò tra carta. L'analisi dette: 31,535 °/₀ BaO, 42,124 °/₀ B^2O^3; 26,341 °/₀ H^2O.

Preparazione VI. — Si tenne la stessa via della preparazione precedente: ma, dopo ottenuto il precipitato cristallino, si aggiunse barite fino a reazione alcalina incipiente alla fenoftaleina senza aggiunta di mannite, ma acida dopo aggiunta di mannite. Il precipitato da cristallino divenne polverulento. Si raccolse e si asciugò nel solito modo. Poi si analizzò: BaO °/₀ 38,217; B^2O^3 °/₀ 42,131; H^2O °/₀ 19,352. Il composto conteneva carbonato.

Se si confrontano i risultati analitici delle 6 preparazioni, colle composizioni teoriche riportate nella tabella I, si vede che le preparazioni II, III e IV fornirono, più o meno puro, un composto unico, il metaborato tetraidrato 1-1-4. Dalla preparazione I si è ottenuto invece un composto che contiene 2 molecole di BaO per 3 di B^2O^3 con 6 molecole di acqua di cristallizzazione. Composizione teorica: 49,03 °/₀ BaO; 33,569 °/₀ B^2O^3; 17,401 °/₀ H^2O. La preparazione V ha invece dato un composto della formula 1 3-7 (triborato eptaidrato). Composizione teorica: 31,36 °/₀ BaO; 42,94 °/₀ B^2O^3; 25,70 °/₀ H^2O. Dalla preparazione VI, finalmente, si è ottenuto un precipitato in cui il rapporto tra BaO e B^2O^3 non corrisponde a quello di un composto ben definito e semplice: è un rapporto intermedio tra quello che si ha nel composto 1-3 e quello che si ha nel composto 2-3. Dove si hanno differenze tra le composizioni trovate e le calcolate, credo che esse in gran parte provengano dai modi di lavaggio, dalla influenza della anidride carbonica dell'aria, ma più di tutto dalla grande facilità con cui da un composto si passa all'altro col variare dei rapporti dei componenti, come è dimostrato dai resultati delle preparazioni descritte. Ma questi resultati mi sembra esprimano una regolarità nella formazione di questi composti. Aggiungendo barite ad acido borico in quantità tale che la soluzione rimanga

fortemente acida, io ho ottenuto il triborato. Ditte, in condizioni simili, ottenne un tetraborato. Presumibilmente la formazione dell'uno o dell'altro composto è condizionata dalla maggiore o minore quantità di barite aggiunta. Continuando ad aggiungere barite, dal composto 1-3 si passa ad un precipitato di composizione intermedia tra l'1-3 ed il 2-3: per ulteriore aggiunta di barite, si giunge al 2-3 polverulento che si forma subito e che si può separare.

Anche Atterberg ottenne questo composto intermediariamente nella preparazione del metaborato. Seguitando ancora ad aggiungere barite, si passa al composto 3-3, ossia nella formola più semplice al composto 1-1. Ma la terza molecola di BaO pare si addizioni più lentamente al precipitato di 2-3 preformato come risulterebbe dal lento comparire dell'acidità nella soluzione ossia dalla lenta scomparsa della barite: fatto, questo, constatato nella preparazione II. Quando tutto il precipitato si è trasformato in metaborato, e la reazione è alcalina, il composto diviene cristallino. Che se poi la preparazione si fa in liquido alcalino, cioè se si goccia la soluzione acida nella barite come nelle preparazioni III e IV, la formazione del metaborato è più rapida, e si passa subito al composto cristallino. E credo che questo possa ricevere una spiegazione assai semplice:

In liquido acido si forma dapprima un composto ricco in acido borico che precipita; e questo reagisce poi soltanto lentamente colla barite che si aggiunge. In liquido alcalino l'acido borico viene legato in qualche composto labile ad alto contenuto in barite, che rimane in soluzione: quando si arriva ai rapporti rispondenti o adatti alla formazione del metaborato, questo precipita cristallino.

Di questi composti, il metaborato 1-1 ed il composto 2-3 erano stati descritti anche precedentemente: un precipitato di composizione assai vicina al triborato era stato creduto da Atterberg un miscuglio di altri borati. Atterberg aveva ottenuto precipitati di composizione assai vicina a 1-3-6: il composto da me ottenuto nella preparazione V risponde alla formula 1-3-7.

Vedremo quali di questi precipitati debbano ritenersi come miscugli e quali come composti, alla temperatura di 30°, dopochè in una prossima Nota avrò riferito sullo studio del sistema dal punto di vista della teoria delle fasi.

Mineralogia. — *Epidoto e Granato della miniera di Brosso (Piemonte)* (1). Nota di E. GRILL, presentata dal Corrisp. FEDERICO MILLOSEVICH.

Ai minerali provenienti dalla miniera di Brosso, alcuni dei quali sono stati da tempo illustrati [Pirite (Strüver) (2); Baritina, Arsenopirite, Galena (Colomba) (3)], oltre la bournonite già descritta in una mia precedente Nota (4), aggiungo ora l'epidoto e il granato, non ancora descritti, per quanto sapppia, da alcuno.

EPIDOTO (var. *pistacite*).

Nei vani di una massa epidotica cristallina macchiata qua e là di ematite micacea si osservano dei piccoli cristalli di epidoto assai lucenti e di un bel colore verde pistacchio. Essi sono poco liberi stando aderenti alla massa secondo la loro maggior dimensione. Questa è avvenuta, come di solito, parallelamente all'asse [*y*] e nei cristalli più grandi, opachi, oscilla tra 2-4 mm., ma negli altri, meglio cristallizzati, è assai minore.

I cristalli terminati nettamente anche ad una estremità sola sono rari, se si prescinde da quelli piccolissimi, le cui facce terminali, quasi microscopiche, non permettono più di fare delle misure goniometriche attendibili. Anche le facce della zona [010] nella maggior parte dei cristalli non si prestano molto meglio, benchè più estese, essendo esse poco piane e talvolta rigate parallelamente all'asse di allungamento per una ripetuta associazione di piccoli cristalli uniti o parallelamente o in geminazione.

In quasi tutti i cristalli osservai la comune legge di geminazione secondo (100).

Le ricerche cristallografiche dalla imperfezione di molti cristalli vengono quindi assai limitate; del resto la cristallografia dell'epidoto italiano e specialmente di quello piemontese è stata già ottimamente studiata da valenti mineralisti come: Boeris, Brugnatelli, Colomba, La Valle, Millosevich, Pelloux, Zambonini e sopratutto da quest'ultimo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico di Firenze.

(2) Strüver G., *Studi sulla mineralogia italiana. Pirite del Piemonte*, ecc. Torino, 1869.

(3) Colomba L., *Baritina di Traversella e di Brosso*. Rend. R. Acc. Lincei, XV, 419, 1906; ibid., XVIII, 510, 1909; Colomba L., *Osservazioni cristallografiche su alcuni minerali di Brosso e Traversella*, ibid., XV, 636, 1906.

(4) Grill E., *Bournonite della miniera di Brosso*. Rend. R. Acc. Lincei, XXIII serie 5a, fasc. 2°, 1914.

Relativamente agli epidoti di varie altre località piemontesi, quello di Brosso è poco ricco di forme. Vi osservai le 12 seguenti:

M}001{ , T}100{.
}504{ , e}101{ , }$\bar{3}$07{ , }$\bar{1}$02{ , }$\bar{5}$06{ , }$\bar{1}\bar{6}$.0.17 , r}$\bar{1}$01{.
z}110{.
n}$\bar{1}$11{ , q}$\bar{2}$21{.

Riporto qui alcuni dei migliori valori angolari osservati posti a confronto con quelli calcolati dalle costanti di Kokscharow.

Angolo		N	Media	Estremi	Calcolato
(001)	(504)	2	38°25′	38°30 - 38°20	38°39′
"	(101)	4	34 33	34 35 - 34 30	34 42
"	($\bar{3}$07)	1	28 8	—	29 14
"	($\bar{1}$02)	2	34 30	34 38 - 34 32	34 21
"	($\bar{1}\bar{6}$.0.17)	1	61 18	—	60 58
"	($\bar{1}$01)	7	63 42	63 50 - 63 30	63 42
"	(110)	3	75 30	75 55 - 75 15	75 45
"	($\bar{1}$11)	2	75 10	75 18 - 75 2	75 12
"	($\bar{2}$21)	2	89 38	89 44 - 89 34	89 42
(100)	(001)	7	64 24	64 40 - 63 40	64 36
"	(110)	3	54 48	54 50 - 54 45	55 0
"	(11$\bar{1}$)	2	69 5	69 7 - 69 3	69 4
($\bar{1}$10)	($\bar{2}$21)	3	14 35	14 40 - 14 29	14 33
($\bar{1}$11)	($\bar{2}$21)	2	14 28	14 44 - 14 18	14 30
($\bar{1}$01)	($\bar{1}$11)	1	54 40	—	54 46

Alla misura dell'emiortodomo positivo }$\bar{1}\bar{6}$.0.17} (Bücking), osservato una sola volta con una faccia abbastanza estesa, avrei potuto sostituire il simbolo }$\bar{1}\bar{9}$.0.20{ (Flinck) meglio corrispondente per valore teorico (61°24′), ma considerate le forti oscillazioni di parecchi degli angoli, ho preferito il simbolo più semplice.

Analogamente ai cristalli di vari altri giacimenti, quelli di Brosso sono costantemente appiattiti secondo (100) restando la faccia (001) sempre poco sviluppata. Le tre forme terminanti sull'asse [y] compaiono sempre assieme, con z e n quasi di uguale sviluppo e q assai più piccola, troncante gli spigoli delle due prime paralleli a (001) : (110).

Onde stabilire la proporzione dei due silicati $x(H_2Ca_4Al_6Si_6O_{26})+y(H_2Ca_4Fe_6Si_6O_{26})$ nella miscela isomorfa dell'epidoto ne fu fatta l'analisi con i seguenti risultati:

SiO_2		38,02
Al_2O_3		19,00
Fe_2O_3	Fe_2O_3 15,02 FeO 1,06	16,20
CaO		24,49
MgO.		0,37
H_2O.		2,31
		100,39

da cui [1] y è uguale a 37 circa.

L'epidoto di Brosso rientra quindi, per la sua composizione chimica, nella serie degli epidoti più ricchi in silicato di ferro. È noto che i due termini estremi entro cui sono compresi i veri epidoti, sono quelli con un minimo di 8 % [2] di silicato di ferro fino ad un massimo di 40 % [3].

Riguardo ad altri epidoti piemontesi dei quali è stata fatta l'analisi, quello di Brosso corrisponde per la sua percentuale di silicato di ferro a due campioni di Traversella, analizzati da Scheerer [4] e Rammelsberger [5], e s'avvicina assai all'epidoto di Biella, analizzato da Zambonini [6], mentre supera altri due epidoti, uno ancora di Traversella, analizzato pure da Rammelsberger [7], e l'altro di Rocca Rossa, analizzato da Zambonini [8].

Un altro epidoto piemontese assai meno ferrifero dei precedenti, con solo l'11-12 % di silicato di ferro e che quindi già si accosta alla serie della clinozoisite, venne trovato, com'è noto, in Val d'Aosta a S. Barthélemy da Pelloux, e fu analizzato da F. Millosevich [9].

Di molti altri epidoti piemontesi e italiani omai ben conosciuti dal lato cristallografico e taluni anche da quello ottico, non esistono le analisi

[1] Weinschenk E., *Ueber Epidot und Zoisit.*, Zeitsch. f. Kryst., XXVI, 165, 1896.

[2] Schlemmer C., *Dunkelgrüner Epidot von Zöptau in Mähren.* Tscher. Min. Mitth., 258, 1872.

[3] Ludwig E., *Ueber die chemische Formel des Epidots.* Tscher. Min. Mitth., 187, 1872.

[4] Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

[5] Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

[6] Zambonini F., *Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella*, Zeitsch. f. Kryst. u. Min., XL, 1905.

[7] Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

[8] Zambonini F., *Krystallographisches ueber den Epidot*, ibid., s. 50, XXXIV, 1902.

[9] Millosevich F., *Sopra gli Epidoti poco ferriferi* (*clinozoisite-epidoto*) *di S. Barthélemy in Val d'Aosta.* Atti soc. Ligust. Sc. Nat., ecc., XIX, 1908.

chimiche, le quali avrebbero avuto una considerevole importanza per farci conoscere la relazione che passa fra le proprietà fisiche delle varie miscele epidotiche e il loro contenuto in ferro, come già fece Weinschenk [1] per gli epidoti di alcune altre località.

I cristalli da me esaminati, male si prestano, a causa della loro piccolezza, alla determinazione esatta dei varî caratteri ottici (indici di rifrazione, birifrazione, angoli degli assi ottici, ecc.) e quindi ho dovuto accontentarmi di misurare l'indice di rifrazione per confronto con quello dell'ioduro di metilene in cui avevo sciolto dello zolfo per renderne più elevato l'indice.

Trovai alla luce del sodio $\beta' = 1,7586$. Questo valore abbastanza elevato riconferma la sua dipendenza dal contenuto in ferro come nelle varie miscele epidotiche.

A motivo della già ricordata piccolezza dei cristalli non mi fu possibile misurare, in modo sicuro, col compensatore di Babinet, il valore della birifrazione, e quindi mi limito a riportare il valore medio $\lambda - \alpha = 0,020$, trovato da Ramsay [2], nell'epidoto di Brosso, pur osservando che esso non deve corrispondere a quello dei miei cristalli in cui, data la percentuale in ferro, la birifrazione deve essere indubbiamente maggiore.

La densità col metodo della sospensione fu trovata alquanto maggiore di 3,447 (massima densità dell'ioduro di metilene acquistata da Merk).

Granato (var. *grossularia*).

Alla varietà grossularia appartengono alcuni bei cristalli di granato d'un color giallognolo volgente al rosso vinato, impiantati sopra una fitta massa di granato e pirite, con tracce di ematite micacea e di calcite spatica.

I cristalli maggiori hanno una dimensione massima di 1 cm. circa, e sono i meglio finiti; gli altri, assai più piccoli, sono tutti imperfetti. Fra i grossi ve ne sono di quelli limitati soltanto dal solito icositetraedro $n\{211\}$, il quale, com'è noto, allo stato isolato, è la forma caratteristica dei cristalli di talune località (Laachersee, Andreasberg, Striegau). È interessante poi notare che anche il colore dei cristalli con la sola forma $n\{211\}$, provenienti dalle suddette località, coincide con quello dei cristalli di Brosso.

Nei campioni di Brosso si vedono pure dei granati con la combinazione $n\{211\}$ $d\{110\}$, con quest'ultima forma sempre poco sviluppata. Le facce di entrambe le forme sono lucenti; quelle di $n\{211\}$ sono, come di solito, marcatamente rigate parallelamente alla loro intersezione con $d\{110\}$ e poco piane per avere la loro superficie spezzettata. Le facce di $d\{110\}$, di cui appaiono solo alcune, sono invece nettamente speculari.

[1] Weinschenk, loc. cit.

[2] Ramsay W., *Ueber die isomorphe Schichtung und die Stärke der Doppelbrechung in Epidot.* Zeitsch. f. Kryst. u. Min. XXV, 505, 1896.

Biologia. — *La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo.* Nota I del dott. Carlo Basile [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Lo studio della biologia dei protozoi patogeni ad ospite intermedio dimostra che in natura è possibile il loro ciclo evolutivo nei loro ospiti trasmissori soltanto quando esistono determinate condizioni meteorologiche (temperatura, umidità).

Questo studio di ordine biologico è di notevole importanza per la epidemiologia delle malattie che questi stessi protozoi determinano.

La possibilità della trasmissione di una protozoosi da un soggetto infetto ad uno sano per mezzo di un insetto trasmissore non è soltanto subordinata alla diffusione di questo insetto nella località che si considera, ma anche alle condizioni meteorologiche che vi si riscontrano, le quali possono facilitare o vietare il ciclo di sviluppo dei protozoi nel loro ospite intermedio.

Sin dal 1911, io [2], con ricerche sperimentali dimostrai che la temperatura di 22° ctgr. è molto favorevole allo sviluppo delle leishmania nelle pulci (*ctenocephalus serraticeps*) e dimostrai ancora che, in natura, le pulci infette riescono alla loro volta infettanti dal dicembre al marzo, non escludendo che possano riuscire infettanti anche negli altri mesi dell'anno, qualora esistano in questi le opportune condizioni meteorologiche.

Questo dato scientifico dimostra che sono di nessun valore le critiche di coloro, i quali tentano di combattere la importanza delle pulci nella trasmissione della leishmaniosi interna nelle regioni del Mediterraneo colla considerazione che la leishmaniosi presenta una ricorrenza inverno-primaverile, mentre le pulci sono più numerose nei mesi estivi.

Nel bacino del Mediterraneo e precisamente in Tunisi, Cortesi e Levy [3] segnalarono la esistenza di una ricorrenza primaverile della leishmaniosi nei bambini; successivamente il Gabbi [4] accertò che anche in Messina il maggior numero di casi si inizia nei mesi di aprile e di maggio. Il Crithien nei 21 casi descritti (1909-1910) nell'isola di Malta riferì che soltanto in due lo inizio è stato notato nei mesi estivi; gli altri casi si sono iniziati nei mesi che vanno dall'ottobre all'aprile. Lo Jemma [5] a Palermo, da uno studio sull'inizio dell'infezione in 110 casi concluse che lo inizio della malattia

(1) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) R. Accad. Lincei, gennaio, febbraio, marzo, aprile, giugno 1911.

(3) Archives de l'Institut Pasteur de Tunis. 1910.

(4) *Malaria e malattie dei paesi caldi.* 1911.

(5) *Pediatria.* 1914.

cade quasi sempre nei mesi invernali, quantunque un gran numero di casi sieno stati osservati nei mesi estivi (giugno, luglio).

Uno studio molto più completo a questo riguardo è stato pubblicato dal Lignos, il quale in tutti i casi occorsi nell'isola di Hydra, negli anni dal 1910 al 1913, ha accertato che i primi casi si osservano colà al principio dell'inverno, che essi raggiungono il massimo nel mese di febbraio e che poi mano mano si fanno più rari per disparire completamente in estate.

Tali ricerche riferite allo inizio dell'infezione sono state abbastanza facili ad eseguirsi nella forma infantile, giacchè i parenti degli infermi ricordano con una esattezza accettabile, almeno nel maggior numero dei casi, il presentarsi dei primi fenomeni della infezione. Nella leishmaniosi infantile la diagnosi è possibile quando la infezione è del tutto evoluta nella sua sintomatologia clinica, quindi dopo alcuni mesi dal suo inizio; la diagnosi clinica sinora procede contemporaneamente alla diagnosi microscopica e culturale del succo splenico aspirato per puntura dalla milza ipertrofica.

Su questo fatto ho voluto insistere perchè, volendo studiare, nelle stesse regioni mediterranee, l'epoca di inizio della leishmaniosi nel cane, noi, in questo animale, non possiamo accertarla direttamente. Dobbiamo accontentarci invece di rilevarla diagnosticando la malattia quando essa è del tutto clinicamente sviluppata, oppure eseguendo delle ricerche microscopiche e culturali degli organi emopoietici dei cani viventi nei focolai endemici di leishmaniosi infantile; tali ricerche, come succede nella forma infantile, anche nella forma canina sono positive dopo alcuni mesi dall'inizio dell'infezione, secondo l'età e la recettività del soggetto colpito.

Infatti nei miei esperimenti di trasmissione della leishmaniosi, per via naturale, a cuccioli sani, io osservai reperto positivo delle leishmania nei loro organi emopoietici dopo circa 2 mesi che su essi cuccioli avevo posto numerose pulci infette.

Anche nelle infezioni sperimentali dei cani, si osserva risultato positivo delle leishmania nei loro organi emopoietici dopo più mesi dalla inoculazione.

Queste considerazioni hanno condotto me a vagliare, con sereno spirito scientifico, le ricerche che l'Alvares, il Cardamatis, il Sergent, il Senevet, il Lignos hanno eseguito sulla frequenza della leishmaniosi nei cani adulti viventi in quelle stesse località ove questi autori osservarono la leishmaniosi nei bambini. La diagnosi è stata fatta coll'esame microscopico degli organi emopoietici. Dal complesso delle ricerche di questi autori risulta che il maggior numero di cani infetti, persino il 40 %, si riscontra nei mesi estivi; tenendo adunque presente che lo esame microscopico degli organi emopoietici dell'uomo e degli animali naturalmente infetti, dà risultato positivo dopo alcuni mesi dall'inizio dell'infezione secondo l'età e la recettività del soggetto colpito, dobbiamo ritenere che, anche nel maggior numero dei cani la

leishmaniosi si inizia nei mesi inverno-primaverili. Anche in modo identico a come avviene nei bambini, esistono talora dei cani nei quali potrebbe apparire che la infezione si sia iniziata negli altri mesi dell'anno.

Nello studio della meteorologia della leishmaniosi interna del Mediterraneo sono veramente interessanti le ricerche del Lignos, delle quali, in seguito a mia richiesta, io ebbi conoscenza diretta da parte dell'autore prima ancora che fossero pubblicate. Anche dalla scuola del prof. Jemma mi furono inviati i dati di inizio della leishmaniosi nei 110 casi osservati a Palermo dal 1909 al 1913; dal prof. Deginitis, direttore della stazione meteorologica di Atene, mi furono inviati i dati meteorologici della stazione di Nauplie che è vicinissima all'isola di Hydra; ed infine dal prof. Palazzo, direttore dell'Ufficio centrale meteorologico di Roma, mi furono favoriti i dati meteorologici osservati nelle stazioni di Palermo e di Messina; di queste cortesie io sentitamente ringrazio i suddetti professori.

Con questi dati meteorologici io potei compilare le seguenti tabelle, nelle quali con varî segni sono indicati, per ogni stazione, i dati massimi di temperatura osservati nelle varie decadi mensili:

Col segno ⊟ sono indicate le temperature massime inferiori a 18° ctgr.

Col segno ■ sono indicate le temperature massime comprese fra 18° e 22° ctgr.

Col segno ▨ sono indicate le temperature massime comprese fra 18° e 30° ctgr.

Col segno ⊡ sono indicate le temperature massime superiori a 30° ctgr.

Le temperature massime comprese fra 18° e 30° ctgr. sono quelle in cui le leishmania possono evolversi nelle pulci; quando le temperature massime non raggiungono i 18° ctgr. o sorpassano i 30° ctgr., le pulci, per quanto appare sin'oggi, non si dimostrano infettanti.

Lo studio del focolaio endemico di Hydra è particolarmente interessante, perchè quest'isola conta circa 6000 abitanti ed in essa si osservano in media, per ogni anno, dieci bambini infetti di leishmaniosi; nessun caso quindi può sfuggire alla diligente ricerca del medico; questo fatto di certo non può ripetersi nelle grandi città come Palermo, dove, quantunque la indagine clinica sia più estesa che altrove, pur tuttavia molti casi di leishmaniosi possono sfuggire alla ricerca degli studiosi; per la statistica di Palermo è anche da notare che, la massima parte dei casi ivi osservati, sono dati da bambini provenienti dai varî paesi e città più o meno lontani da Palermo, e dove quindi la malattia si iniziò in condizioni meteorologiche probabilmente differenti da quelle di Palermo.

La tabella n. 1 che riguarda le condizioni metereologiche della stazione di Nauplie, nel di cui dipartimento si trova l'isola di Hydra dimostra

che in quest'isola dal novembre all'aprile si riscontrano costantemente delle temperature massime comprese fra 18° e 22° ctgr., e che negli stessi mesi si iniziano il maggior numero di casi di leishmaniosi nei bambini; onde, anche tenendo conto di un periodo di incubazione dell'infezione, precedente al primo manifestarsi di sintomi, risulta accertato che le condizioni meteorologiche di 18° 22° ctgr. rappresentano, per quanto risulta fin'oggi, le condizioni più favorevoli allo sviluppo delle leishmania nel loro ospite trasmissore e conseguentemente alla capacità infettante di questo; tale fatto coincide perfettamente con quanto era risultato nelle mie precedenti ricerche sperimentali e per ciò appunto io, in queste tabelle, ho voluto indicare a parte tali temperature massime, comprese fra 18° e 22° ctgr. La infezione in Hydra può anche trasmettersi in quei mesi nei quali possono talvolta notarsi delle temperature massime che non sorpassano i 30° ctgr.; dalla stessa tabella sembra anche che, in quest'isola 4 casi siano occorsi in mesi nei quali sono state osservate delle temperature massime superiori ai 30° ctgr.; per quest'ultimo fatto bisogna però notare che questi 4 casi sono occorsi rispettivamente nei mesi di maggio 1913 e di giugno 1911, 1912, 1913, onde per essi si può ammettere che il *virus* sia stato inoculato nei bambini nei mesi immediatamente precedenti, nei quali sono state osservate delle temperature comprese fra 18° e 30° ctgr.

Queste deduzioni tratte per l'isola di Hydra trovano piena conferma nelle seguenti tabelle redatte sui dati meteorologici di Palermo e di Messina.

La tabella N. 2 dimostra che nella provincia di Palermo lo inizio della leishmaniosi è possibile nei mesi estivi, perchè anche in questi mesi si osservano talora delle temperature massime che non sorpassano i 30° ctgr., ma che il maggior numero di casi, come scrive lo Jemma, ricorre nei mesi invernali (dicembre, gennaio e febbraio) o al principio della primavera (marzo), quando appunto si riscontrano delle temperature comprese fra 18° 22° ctgr.; per le stesse ragioni, come è dimostrato nella tabella N. 3, si spiega la ricorrenza primaverile osservata dal Gabbi in Messina.

Anche la umidità ha certamente un'influenza sulla capacità infettante della pulce nella leishmaniosi interna del Mediterraneo; è molto difficile poter stabilire il grado più favorevole di umidità in rapporto alla temperatura; a me sembra poter dedurre dai dati meteorologici, che le condizioni più favorevoli di umidità variano nella media giornaliera fra 65 e 75.

	Casi osservati dal 1910 al 1913				
	1910	1911	1912	1913	
	— 18	18°-22°	18°-30°	+ 30°	
Ottobre . .	0	0	5	0	= 5
Novembre.	0	2	0	0	= 2
Dicembre.	0	3	0	0	= 3
Gennaio. .	0	3	0	0	= 3
Febbraio .	3	7	0	0	= 10
Marzo. . .	0	5	0	0	= 5
Aprile. . .	0	1	1	0	= 2
Maggio . .	0	0	3	1	= 4
Giugno . .	0	0	0	3	= 3
Luglio. . .	0	0	0	0	= 0
Agosto . .	0	0	0	0	= 0
Settembre.	0	0	0	0	= 0
	3	21	9	4	= 37

Tabella N. 1

Tabella N. 2

Tabella N. 3

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

SANZO L., *Stadî larvali di Bathophilus nigerrimus* Gigl. Presentata dal Socio GRASSI

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio E. MARCHIAFAVA legge la seguente Commemorazione del Socio straniero prof. EDWIN KLEBS:

Con Edwin Klebs è scomparso in Germania un altro dei veterani della Patologia, nostro Socio Corrispondente; Edwin Klebs salito in fama in tempi omai lontani, poco noto ai giovani, non dimenticato da noi vecchi cultori della Patologia consapevoli della sua vita di lavoro per il progresso di questa scienza.

Nato in Könisberg i. P. nel 1834, compì i primi cinque semestri di medicina nella università della sua città natale avendo fra i suoi maestri Burdach e Helmhotz.

Nel 1855, a Würzburg, sotto l'influenza dell'insegnamento di Virchow si decise di dedicarsi alla Patologia.

Quando nel 1856 Virchow andò a Berlino, Klebs lo seguì e vi conseguì il dottorato con la dissertazione, *De mutationibus quae in intestino inveniuntur tubercolosis*, quasi designandosi così lo studio, che doveva maggiormente attrarlo e che doveva pur essergli fonte più di dolori che di compiacenze.

Nel 1858 passò l'esame di stato, e in quell'anno appariva la prima edizione della Patologia cellulare del suo grande Maestro.

Ritornò nella sua patria, fu assistente nell'Istituto fisiologico di Wittich e nel 1859 pubblicò negli archivi di Virchow il suo primo lavoro: *Sopra i psorospermi nell'interno delle cellule animali.*

Nel 1860, nell'occasione di un Congresso a Könisberg, incontratosi con Virchow, fu da questo invitato di andare nel suo Istituto a Berlino. Klebs vi andò e vi rimase fino al 1866 in continuo lavoro, avendo per compagni in quell'epoca gloriosa nella storia della medicina, Recklinghausen, Kühne, Cohnheim, Liebreich, Leyden, i quali tutti emersero poi nei varî rami della scienza medica.

Nel 1866 fu chiamato a Berna come straordinario di Patologia, promosso ordinario nell'anno seguente. In questo tempo Klebs cominciò a vol-

gere la sua attività allo studio della malattia d'infezione con un entusiasmo, che nessuno, almeno in Germania, vi aveva messo fino allora e additò ai Patologi la importanza della Batteriologia per conseguire le vere cognizioni sulla etiologia e sulla genesi di molti processi morbosi, la cui morfologia era quasi esclusivamente studiata.

Nel 1868, poco dopo le ricerche di Villemin in Francia, s'iniziarono i suoi lavori sperimentali sulla tubercolosi, e nel 1869 cominciò la pubblicazione del suo trattato di anatomia patologica ricco di osservazioni e di vedute originali.

Nell'epoca della grande guerra prestò l'opera sua nell'ospedale dei tifosi dell'armata di Bourbaki costretta a rifugiarsi in Isvizzera e nel lazzaretto della stazione di Karlsruhe con Socin e con Hoffmann. Egli colse l'occasione dei numerosi casi d'infezione delle ferite per dimostrare con ricerche anatomiche e sperimentali che la infezione era provocata dalla presenza di un microrganismo sotto forma di cocchi, che egli provvisoriamente chiamò *microsporon septicum*. La prova che questi microrganismi non fossero un fatto accidentale era data da Klebs con la filtrazione dei liquidi settici: il filtrato provocava negli animali una febbre violenta, che durava tre o quattro giorni; il liquido contenente batteri uccideva gli animali con febbre continua e con estese suppurrazioni.

Le osservazioni e le ricerche fatte da Klebs, durante la guerra franco-prussiana, furono da lui pubblicate nel 1872.

In quest'anno fu chiamato nella università di Würzburg, onde, dopo tre semestri, fu chiamato a Praga, ove rimase fino al 1882. Quivi fondò con Naunyn e Schmiedeberg l'archivio di Patologia sperimentale, nel quale pubblicò la maggior parte dei suoi lavori; fu il fondatore della società dei medici tedeschi in Boemia e del giornale settimanale medico di Praga.

Nel 1874 fu pubblicato da Klebs il primo lavoro sistematico sulle malattie del Pancreas. Seguirono le nuove ricerche sulla Etiologia della tubercolosi, specialmente sulla tubercolosi alimentare, gli studî sul cretinismo, sul gozzo, sul carbonchio, sulla Endocardite, della quale distinse due forme la settica e la reumatica.

Nel discorso tenuto a Monaco nel 1877 al congresso dei naturalisti, Klebs espose chiaramente, con i nuovi problemi, le sue vedute intorno la etiologia delle malattie infettive, e, a riconoscere il rapporto fra queste e i singoli microrganismi, pose gli stessi postulati che più lucidamente dovevano essere esposti da Roberto Koch nel 1883. Questo discorso, che era la visione di ciò che doveva presto avverarsi, fu giudicato soverchiamente ardito anche da Virchow.

Nel 1878 dimostrò la trasmissibilità della sifilide dell'uomo alle scimmie, prima negata, ora ammessa dopo le recenti esperienze, che hanno seguita la scoperta dello *spirochaeta pallida*.

Vide il bacillo della infezione tifosa e il bacillo della difterite, in seguito meglio studiati da Eberth, da Gaffky e da Löffler.

Lavorò molto per ottenere culture pure dei singoli microrganismi con mezzi non adatti allo scopo, ora di solo interesse storico, prima che R. Koch scoprisse il celebre metodo dei terreni nutritivi solidi e trasparenti, per i quali si resero possibili in breve tempo quei progressi della batteriologia patologica fecondi di tanto bene per la medicina.

Nel 1882, due volte deluso nelle speranze di andare nella università di Vienna, sordo alle preghiere dei colleghi e degli amici, seguendo l'impulso del suo spirito esacerbato, accettò di andare nell'università di Zurigo al posto occupato dal suo antico assistente E. Ziegler chiamato a Würzburg.

Quivi ebbe assistenti Ernst, che ha fatto di lui una affettuosa commemorazione, Hanau, Lubarsch, Moll, Spengler, Bonome, Reinke; che tutti si fecero noti per i loro lavori scientifici e nell'insegnamento.

Fra i lavori fatti negli anni del suo soggiorno a Zurigo sono da ricordare quelli sul gigantismo con alterazioni dell'Ipofisi e della sella-turcica sopra le genesi dei tumori, sopra la trombosi, sopra la tubercolosi.

Nel 1884 andò a Genova ove infieriva il colera, e con Ceci studiò le forme di degenerazione del bacillo colerico, la patologia del Rene colerico, la genesi dell'algidismo e anche la cura del colera.

In Zurigo scrisse il suo grande trattato di Patologia generale o della dottrina delle cause e della natura dei processi morbosi, del quale uscirono soltanto i due primi volumi sulla Etiologia patologica generale e sulla Morfologia patologica generale. Deve dolerci che non sia uscito il terzo volume che doveva trattare delle Fisiologia patologica generale.

Nel 1886 divenne decano della facoltà medica di Zurigo, e in quell'anno ricevè con gioia il titolo di Socio corrispondente della nostra Accademia, anche perchè gli ricordava Roma, che egli amava e ove aveva soggiornato lungamente nel 1879 per istudiare con Tommasi-Crudeli la malaria della campagna romana, e ove aveva ricevuto accoglienze, delle quali serbava memoria riconoscente.

Quando nel 1890 fu riconosciuto che la tubercolina salutata, dopo la prima comunicazione dello scopritore, redentrice della umanità sofferente di tubercolosi, era infida e spesso dannosa, Klebs, dopo averne studiato la composizione, volle preparare una tubercolina innocua, la tubercolocidina, la quale, secondo Klebs, sarebbe la parte attiva immunizzante della tubercolina, spogliata dei principî tossici.

Dedicato a questo ed altri lavori sulla tubercolosi, mal tollerava il peso dei doveri accademici, e non trovando condiscendenza nei colleghi e negli studenti, dovè allontanarsi da Zurigo. Così, a 60 anni, senza mezzi di fortuna, senza un assegno che pur meritava per i servizî da lui resi all'insegnamento e alla scienza, cominciò la sua vita errante.

Dapprima andò a Carslruhe, poi a Strasburgo, e nel 1895 negli Stati Uniti di America, ove prima fu direttore di un sanatorio per tubercolosi in Asheville, nella Carolina del Nord, poi fu chiamato a Chicago professore di Patologia nel « Rush medical School » e direttore del laboratorio del « Post-graduate medical School ». Nella città di Chicago pubblicò nei giornali medici americani parecchi lavori sul tema favorito della tubercolosi; fece conferenze; fondò una società medica e conquistò una posizione onorevole. Se non che nel 1900 non potè resistere al desiderio di ritornare ove aveva per tanto tempo vissuto e, traversato di nuovo l'Atlantico, andò prima a Berna poi nella città di Hannover, ove in un privato laboratorio, senza mezzi, affievolito dagli anni e amareggiato dai disinganni si affaticò invano nella ricerca di un rimedio specifico contro la tubercolosi.

Nel 1905 si recò a Berlino ove egli, che era stato il direttore di grandi istituti, circondato da valorosi assistenti, dovè ridursi a continuare le sue ricerche in una camera dell'Istituto patologico di quella città.

Nel 1907, nella ricorrenza del 50.^{mo} anno del dottorato, l'università di Berlino gli conferì un diploma di onore.

Nel 1910 da Berlino andò a Losanna; quivi scrisse l'ultimo suo lavoro sulla tubercolosi. Dopo tre anni di soggiorno in questa città con il figlio, volle rivedere la sua Berna, ove mezzo secolo prima aveva cominciato la sua, per non breve tempo, brillante carriera e aveva trovato la compagna buona e fedele della sua vita, e ove si spense placidamente.

Questa la vita di E. Klebs, d'ingegno ardente, di largo sapere, di vedute originali, di gagliarda iniziativa; il quale con la geniale intuizione precorse i progressi della medicina, dei quali egli doveva essere testimonio e ai quali in parte contribuì.

Pieno di entusiasmo per i suoi alti ideali, non conobbe mai la pratica della vita, onde le difficoltà materiali, i dolori, le delusioni che lo tormentarono nella lunga esistenza. Il suo carattere irrequieto, insofferente, facile agli impeti del cruccio gli toglieva spesso la calma del ricercatore e gli procurò inimicizie e fu la causa della sorte non lieta della ultima parte della sua vita. Chi per altro lo conosceva da vicino, doveva persuadersi che sotto quest'apparenza di rudezza e talora di scortesia si celava un animo retto, buono, pronto al soccorso di ogni sventura e all'ammirazione di ogni nobile azione, di ogni progresso, frutto dell'ingegno e del lavoro.

Nella storia della medicina egli lascia un'orma, che non si cancellerà.

Oltre le sue ricerche nella Morfologia patologica che portarono alla conoscenza di fatti, che omai fanno parte del patrimonio della scienza, e i suoi trattati, che saranno sempre consultati con utilità, chi potrà disconoscere l'alto merito che si ebbe Klebs nella dottrina della tubercolosi con i suoi primi lavori?

Quando quasi tutti i patologi, in Germania, anche dopo le ricerche sperimentali di Villemin in Francia, negavano la natura infettiva e la contagiosità della tubercolosi, alla quale i profani continuavano a credere, quando nel 1870 un clinico illustre, F. Niemayer, insegnava come un grande progresso che la tisi polmonare era provocata da qualsiasi processo flogistico in soggetti predisposti e non sapeva persuadersi come vi fossero ancora medici fedeli alla dottrina tubercolare della tisi polmonare, quando da ricercatori eminenti per talento e per posizione, non si ammetteva un *virus* specifico tubercolare, affermandosi che la tubercolosi poteva essere prodotta negli animali anche da corpi estranei; fu Klebs che dal 1868, con le sue ricerche sperimentali e con il suo acuto ragionamento, sostenne con tale fermezza in Germania la trasmissibilità e la contagiosità della tubercolosi per un *virus* specifico da indurre un grande patologo a ripetere con maggiori cautele, le investigazioni sperimentali e a convincersi che la tubercolosi si riproduce negli animali soltanto per la inoculazione di prodotti tubercolari.

Ciò è omai storia antica e però poco conosciuta, ma di quale importanza in quei tempi d'incertezze e di esitazioni con danno gravissimo della medicina pratica e della igiene!

Come nella dottrina della tubercolosi, così in quella della dottrina in genere delle malattie infettive, egli è benemerito, come ho ricordato nel cenno biografico. Klebs comprese che la Patologia cellulare, la meravigliosa, abbagliante conquista, come egli la chiamava, di tutta la Patologia, doveva congiungersi alla ricerca della etiologia dei morbi infettivi, i quali per i fatti clinici, anatomici ed epidemiologici s'intuivano già come provocati da esseri viventi, da quelli *animalia quaedam minuta* di Varrone, *quae non possunt oculi consequi... atque difficiles efficiunt morbos.*

Nella Storia della Medicina di Pushmann, Klebs è ricordato fra i precursori dell'epoca gloriosa della batteriologia patologica dopo il grande Pasteur, dopo Lister, dopo Ferdinando Cohn. E perchè questo giudizio non possa sembrare troppo benevolo, io ricorderò le parole che di Klebs scriveva nel 1882 Giulio Cohnheim, nelle sue Lezioni di Patologia generale, un anno prima della scoperta del bacillo tubercolare di R. Koch, dopo i lavori di questo sul carbonchio e sulle infezioni delle ferite. Cohnheim adunque, ricordata l'importanza delle esperienze di Klebs con le filtrazioni dei liquidi contenenti batteri, dei suoi tentativi di cultura per distinguere i varî microorganismi, e di tutti i suoi lavori sulle malattie infettive, concludeva « che anche coloro che non sono convinti di tutti i risultati delle ricerche di Klebs, non possono negargli il grande e duraturo merito di avere in ogni tempo tenuto atta la bandiera della teoria parassitaria delle malattie d'infezione con instancabile operosità, non scossa nè dalla indifferenza nè dagli ingiusti attacchi, e di averla portata più di qualsiasi altro alla vittoria ».

Queste parole scritte dal geniale patologo di Lipsia 34 anni or sono, quando Klebs era nel fiore della maturità, si possono, io credo, ripetere oggi dopo la sua morte.

Klebs non ottenne dalle sue ricerche quei successi cui aspirava, e spesso errò. Ma le vie delle conquiste scientifiche, come tutte le vie delle conquiste umane, furono spesso percorse, prima della vittoria, da ingegni intuitivi, volenterosi, ardenti, che non raggiunsero la mèta agognata e le cui prime orme spesso guidarono i vincitori.

E. Klebs non fu tra questi, ma uno dei maggiori fra i primi. Onore alla sua memoria!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Taramelli, Loria Gino, Wagner, Orth; e dei signori Agamennone ed Eredia. Fa inoltre particolare menzione di un volume contenente una raccolta di *Scritti geografici* del Socio senatore Dalla Vedova, pubblicati in onore di quest'ultimo, in occasione del suo 80° genetliaco.

E presenta ancora le seguenti pubblicazioni della Università di Yale: Campbell, *I moti stellari*; Bateson, *Problemi genetici*; Verworn, *Irritabilità*.

Il Socio Maggi fa omaggio del suo volume recentemente apparso: *Geometria del movimento*, e ne discorre.

Il Socio Volterra offre una traduzione in tedesco delle lezioni di fisica-matematica, da lui dettate nel 1909 alla Clark-University.

Il Presidente Blaserna presenta un volume pubblicato dal principe von Bülow, avente per titolo: *Deutsche Politik* di cui l'autore ha fatto dono all'Accademia. Il Presidente rileva la importanza politica di questo scritto il quale fa parte di una pubblicazione in tre volumi, destinata a celebrare il 25° anniversario del regno dell'imperatore Guglielmo II; e aggiunge che del dono bellissimo si è fatto premura di ringraziare l'Autore a nome dell'Accademia.

CONCORSI A PREMI

Il Presidente Blaserna, comunica che il prof. Negro ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale, del 1913, per la *Fisiologia normale e patologica*.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Blaserna annuncia che alla seduta assistono il Socio straniero Sir Archibald Geikie e il prof. Pionchon dell' Università di Digione.

E. M.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Millosevich (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Taramelli, Loria G., Wagner, Orth*; e dei signori: *Agamennone, Eredia*; e un volume pubblicato in onore del Socio *Dalla Vedova* ecc. . . . . Pag. 549
Maggi. Fa omaggio di un suo volume e ne discorre . . . . " "
Volterra. Offre una sua pubblicazione . . . . " "
Blaserna (Presidente). Presenta un volume del principe *von Bülow* e rileva la importanza di tale pubblicazione . . . . " "

CONCORSI A PREMI

Blaserna (Presidente). Comunica che il prof. *Negro* ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale del 1913 per la *Fisiologia normale e patologica* . . . . " "

COMUNICAZIONI VARIE

Blaserna (Presidente). Annuncia che alla seduta assistono il Socio straniero sir *Archibald Geikie* e il prof. *Pionchon* . . . . " "

RENDICONTI — Aprile 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Somigliana. Sulla teoria delle distorsioni elastiche . . . Pag. 463
Volterra. Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali (*). . . . » 473
Angeli. Sopra gli azossifenoli (*) . . . » »
Almansi. Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento (*) » »
Tedone. Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche . . . » »
Gateaux. Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé (pres. dal Socio *Volterra*) . . . » 481
Sannia. Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche (pres. dal Socio *E. D'Ovidio*) . . . » 486
Bodareu. La compressibilità del cloruro di metile (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . » 491
Guglielmo. Sulla misura assoluta dell'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . » 493
Eredia. La distribuzione stagionale e annuale della nebulosità in Italia (pres. dal Socio *Millosevich*) . . . » 500
Plate. Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . » 506
Brunacci. Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria (pres. dal Socio *Luciani*) . . . » 512
Cotronei. Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri (pres. dal Socio *Grassi*) . . . » 519
Marino e *Gonnelli.* Sopra una nuova modificazione del metodo di Kjeldahl (pres. dal Socio *Nasini*) . . . » 523
Sborgi. Sui borati: sistema Ba O-B^2 O^3-H^2 O a 30° (pres. *Id.*) . . . . » 530
Grill. Epidoto e Granato della miniera di Brosso (Piemonte) (pres. dal Corrisp. *Millosevich*) » 535
Basile. La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo (pres. dal Socio *Grassi*) » 539

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Sanzo. Studî larvali di Bathophilus nigerrimus Gigl. (pres. dal Socio *Grassi*) . . » 544

PERSONALE ACCADEMICO

Marchiafava. Commemorazione del Socio straniero prof. *Edwin Klebs* . . . » »

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 19 aprile 1914.* **N. 8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 8°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nel § 3 della mia Nota: *Sulle equazioni alle derivate funzionali* (1), ho messo in luce la relazione fra equazioni integro-differenziali del 1° ordine ed equazioni alle derivate funzionali, limitandomi al caso della linearità per esaminare l'esempio più semplice. Mi permetto ora di estendere i detti resultati.

2. Sia $F|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(\xi)}}, x, z]|$ una funzione che dipende da tutti i valori di $\theta(\xi)$ nell'intervallo $0, 1$ e da due parametri x e z. Se $\theta(\xi)$ dipenderà anche da un parametro α, avremo che F sarà una funzione ordinaria di x, z, α; ed in particolare, se prendereremo $z = \alpha$, F sarà una funzione ordinaria di x, z. Prendiamo dunque $\theta(\xi) = f(\xi, z)$ e consideriamo (2)

$$F|[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), x, z]|$$

e l'equazione

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial z} = F|[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), x, z]| . \tag{1}$$

(1) Rend. R. Accad. dei Linei, 1, 15 marzo 1914.

(2) Cfr. la nota al § 3 della citata Memoria, pag. 395.

Per semplicità supponiamo che $F|[\theta(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]|$ possa considerarsi indipendente dalle derivate di $\theta(\xi)$ [1]; allora diremo che la (I) è una *equazione integro-differenziale del 1° ordine per rapporto a z.*

Per giustificare questa denominazione, basta pensare che F, sotto certe condizioni almeno, potrà esprimersi o per mezzo di una serie analoga a quella di Taylor [2] o analoga a quelle polinomiali di Weierstrass [3], e quindi, per mezzo di integrazioni multiple applicate alla f.

Nel caso particolare in cui F è della forma

$$\int_0^1 f(\xi, z)\,\varphi(x, \xi)\,d\xi,$$

in cui $\varphi(x, \xi)$ è una funzione determinata, si ricade nella equazione integro-differenziale considerata nel § 3 della Nota citata.

3. Supponiamo l'assoluta continuità di F rispetto agli elementi variabili; e supponiamo che, qualunque siano x e z, purchè $1 \geq x \geq 0$, $a + l \geq z \geq a - l$, si abbia

$$\left| F|[\theta(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]| - F|\theta_1(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]| \right| < A\varepsilon,$$

se $|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon$ per ξ compreso fra 0 e 1, e $\theta(\xi)$ e $\theta_1(\xi)$ compresi fra $\psi(\xi) + k$ e $\psi(\xi) - k$; ove A denota una certa quantità costante e $\psi(\xi)$ una funzione continua. Allora, applicando il metodo delle approssimazioni successive, l'integrale della equazione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$f(x, z) = \psi(x) + \Theta|[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]|, \tag{1}$$

in cui Θ si annulla per $z = a$. La detta forma dell'integrale f sarà valida per $1 \geq x \geq 0$, e z compreso in un certo intorno del punto a. È evidente che $\psi(x)$ rappresenta il valore iniziale di $f(x, z)$ per $z = a$.

L'equazione (I) si può anche scrivere

$$f(x, z) = \lambda\psi(x) + \int_a^z F|[f(\xi, \zeta), x, \zeta]|\,d\zeta, \tag{I'}$$

la quale dovrà coincidere colla (1) se si fa il parametro costante λ eguale ad 1.

[1] Considereremo in altri lavori il caso adesso escluso.

[2] Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, pag. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[3] Cfr. Gateaux, *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Rend. Lincei, 21 dicembre 1913, pag. 646. Le serie analoghe a quelle polinomiali di Weierstrass furono date dapprima dal sig. Fréchet.

Nella ipotesi, che la $F|[\overset{1}{\underset{0}{\theta(\xi)}}, x, z]|$ sia sviluppabile in serie analoga a quella di Taylor rispetto a $\theta(\xi)$, ed i nuclei dei varî termini siano funzioni olomorfe di z nell'intorno di $z = a$, si potrà sviluppare $f(x, z)$ in serie di potenze di λ e di $z - a$, seguendo un procedimento analogo a quello che ho impiegato nel § XVI del Cap. III delle mie lezioni sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. In tal caso ci si può evidentemente estendere, per rapporto a z, dal campo reale al campo complesso.

Consideriamo z come un parametro costante, e risolviamo l'equazione (1) rispetto a $\psi(x)$ ([2]). Avremo

$$\psi(x) = f(x, z) + \Theta_1 |[\overset{1}{\underset{0}{f(\xi, z)}}, x, z]| .$$

Si riconosce facilmente che, se si indica con

$$\Phi |[\overset{1}{\underset{0}{\theta(x)}}]| ,$$

una quantità che dipende arbitrariamente da $\theta(x)$ per x compresa fra 0 e 1 (senza punti eccezionali), e se per $\theta(x)$ si sostituisce

$$\varphi(x) + \Theta_1 |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]|$$

si avrà

$$\Phi \left|\left[\varphi(x) + \Theta_1 |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]| \right]\right| = \Omega |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z]| ,$$

la quale soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \int_0^1 \Omega' |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z, x]| \, F |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x, z]| \, dx = 0 ,$$

ove

$$\Omega' |[\overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z, x]|$$

denota la derivata di Ω rispetto a φ fatta nel punto x. Questa proposizione costituisce una facile estensione del teorema dato nella precedente Nota (§ 3).

4. Di speciale interesse sono le equazioni del tipo canonico.

Abbiasi

$$H |[\overset{1}{\underset{0}{f(\xi)}}, \overset{1}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, z]| ,$$

([1]) Cfr. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. IV.

e supponiamo che, nell'ipotesi di z costante, sia

$$\delta \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{H}'_f \left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , \varphi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| \delta f(x)\, dx + \\ + \int_0^1 \mathrm{H}' \left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , \varphi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| \delta\varphi(x)\, dx .$$

Le equazioni

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q(x , z)}{\partial z} = \quad \mathrm{H}'_\varphi \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , z , x \right]\right| \\ \dfrac{\partial p(x , z)}{\partial z} = - \mathrm{H}'_f \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , z , x \right]\right| \end{cases}$$

si diranno di tipo canonico.

Siano le derivate di

$$\text{(2)} \qquad \Phi \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z \right]\right| ,$$

fatte rispetto a $q(\xi)$ e $a(\xi)$ pel punto x, respettivamente

$$\text{(3)} \qquad \Phi'_q \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| \quad , \quad \Phi'_a \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| .$$

Denotiamole, per semplicità, con

$$\text{(4)} \qquad \Phi'_q(z , x) \quad , \quad \Phi'_a(z , x) .$$

Se Φ, non ha punti eccezionali, e soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mathrm{H} \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , \Phi'_q(z , \overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z \right]\right| = 0 ,$$

gl'integrali delle equazioni (II) si potranno ricavare dalle relazioni

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \Phi'_a \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| = b(x) \\ \Phi'_q \left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} , z) , a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , z , x \right]\right| = p(x , z) , \end{cases}$$

ove $b(x)$ rappresenta un funzione continua arbitraria, purchè si ammetta, inoltre, che, nell'ipotesi di z e x e $a(\xi)$ invariabili, sia

$$\delta \Phi'_a \left|\left[q(\xi) , a(\xi) , z , x \right]\right| = \mathrm{A} \delta q(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} \left|\left[q(\xi) , a(\xi) , z , x , y \right]\right| \delta q(y)\, dy ,$$

e l'equazione integrale

$$\mathrm{A} \psi(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} \left|\left[q(\xi) , a(\xi) , z , x , y \right]\right| \psi(y)\, dy = \theta(x)$$

abbia, almeno entro un certo campo, per la incognita $\psi(x)$ una soluzione unica, determinata e finita ([1]).

5. Nella ipotesi che H non contenga z, prendiamo Φ indipendente da z, onde sopprimiamo nelle espressioni (2), (3) e (4) la variabile z e scriviamo queste ultime

$$(4') \qquad \Phi'_q(x) \quad , \quad \Phi'_a(x) \,.$$

Supponiamo che, invece della (III), sia soddisfatta la relazione

$$(\mathrm{IV}) \qquad h + \mathrm{H}\left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \quad , \quad \Phi'_q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\right]\right| = 0 \,,$$

con

$$h = \Omega\left|\left[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\right]\right| \quad , \quad \delta h = \int_0^1 \Omega'_a\left|\left[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \,, x\right]\right| \delta a(x)\, dx \,.$$

Allora, alle (5), potremo sostituire le altre

$$(5') \qquad \begin{cases} \Phi'_a\left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \,, z) \,, a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \,, x\right]\right| = b(x) + z\,\Omega'_a\left|\left[a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \,, x\right]\right| \\ \Phi'_q\left|\left[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \,, z) \,, a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) \,, x\right]\right| = p(x \,, z) \,. \end{cases}$$

6. Come esempio mi permetto di svolgere un caso particolare che corrisponde al caso di Stäckel della separazione delle variabili ([2]).

Sia $g(x \,, y \,, q(x)) = \gamma(x \,, y)$ una funzione composta di $q(x)$ nel senso ordinario.

Calcoliamo $\Gamma(x \,, y)$, tale che il teorema di reciprocità sia soddisfatto ([3]),

$$\gamma(x \,, y) + \Gamma(x \,, y) = -\int_0^1 \gamma(x \,, \xi)\, \Gamma(\xi \,, y)\, d\xi \,,$$

nell'ipotesi del determinante diverso da zero. $\Gamma(x \,, y)$ dipenderà da tutti i valori di $q(x)$ per x compreso fra 0 e 1, onde potremo scrivere

$$\Gamma(x \,, y) = \mathrm{G}\left|\left[x \,, y \,, q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\right]\right| .$$

([1]) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IV.

([2]) Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, tomo I, Leipzig 1902, pag 77 e seg.

([3]) Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, pag. 105.

Prendiamo

$$\mathrm{A}\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = 2\lambda(x) + 2\int_0^1 \mathrm{G}\,|[x\,,\,y\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\lambda(y)\,dy$$

$$\mathrm{U}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{A}\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\psi(x\,,\,q(x))\,dx\,,$$

ove $\lambda(x)$ è una funzione arbitraria e $\psi(x\,,\,q(x))$ pure una funzione arbitraria composta, nel senso ordinario, di $q(x)$.

Formiamo

$$\mathrm{H}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\,,\,p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{A}\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,p^2(x)\,dx - \mathrm{U}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,.$$

Ciò premesso, calcoliamo

$$\mathrm{F}(x\,,\,q) = \int_0^q \sqrt{\psi(x\,,\,q) + a(x) + \int_0^1 a(\xi)\,g(x\,,\,\xi\,,\,q)\,d\xi}\;dq$$

$$\Phi\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\,a(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| = \int_0^1 \mathrm{F}(x\,,\,q(x))\,dx\,.$$

Si dimostra che

$$\int_0^1 \mathrm{A}\,|[x\,,\,q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\Phi'^2_q(x)\,dx = 2\mathrm{U}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| + 2\int_0^1 \lambda(\xi)\,a(\xi)\,d\xi\,,$$

ossia che l'equazione (IV) è soddisfatta prendendo

$$h = \int_0^1 \lambda(\xi)\,a(\xi)\,d\xi\,.$$

Gli integrali (5′) saranno quindi

$$(5'')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{q(x,z)} \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{D}(x\,,\,q)}} + \int_0^1 dy \int_0^{q(y,z)} \frac{g(y\,,\,x\,,\,q)\,dq}{\sqrt{\mathrm{D}(y\,,\,q)}} = \lambda(x)\,z + b(x) \\ \sqrt{\mathrm{D}(x\,,\,q(x\,,\,z))} = p(x\,,\,z)\,. \end{cases}$$

7. L'annullarsi della variazione dell' integrale

$$\int_0^{z_0} \left\{ \mathrm{H}\,|[q(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,\,z)\,,\,p(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,\,z)\,,\,z]| - \int_0^1 \frac{\partial q(\xi\,,\,z)}{\partial z}\,p(\xi\,,\,z)\,d\xi \right\} dz\,,$$

facendo variare di infinitamente poco q e p, conduce evidentemente alle equazioni integro-differenziali (II), e quindi alla equazione alle derivate funzionali (III).

8. È interessante di mettere a confronto i tipi diversi di equazioni alle derivate funzionali che si manifestano allorchè si parte da equazioni alle derivate parziali [1] o da equazioni integro-differenziali, derivanti, le une e le altre, da questioni di calcolo delle variazioni.

9. Problemi meccanici che conducano ad equazioni del tipo (II) si presentano, per esempio, allorchè si considerano sciami di corpuscoli del tipo di quelli che si presentano nello studio dell'anello di Saturno, che possono sotto un certo aspetto trattarsi come sistemi continui senza che fra gli elementi esistano vincoli esprimibili con equazioni di tipo differenziale.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli* [2]. Nota del Socio Angelo Angeli.

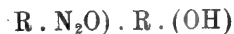
Nel mentre gli azossifenoli della forma:

$$(HO).R.(N_2O).R.(OH)$$

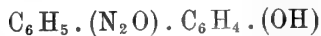
dove R rappresenta un residuo aromatico, si possono facilmente preparare riducendo, nelle opportune condizioni, i nitroderivati:

$$(HO).R.NO_2$$

e perciò sono sostanze accessibili ed anche bene studiate, le nostre conoscenze sopra gli azossifenoli aromatici che nella loro molecola contengono un solo ossidrile,

$$R.N_2O).R.(OH)$$

sono ancora quanto mai limitate ed incerte.

Nella letteratura si trova menzionato un paraossiazossibenzolo.

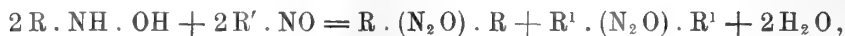
$$C_6H_5.(N_2O).C_6H_4.(OH)$$

che venne preparato ancora nel 1870 da Kekule ed Hidegh [3] per trattamento del paraossiazobenzolo,

$$C_6H_5.N_2.C_6H_4(OH)$$

(1) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. III, § 8.
(2) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.
(3) Ber. Berichte, *3*, 235 (1870).

con pentacloruro di fosforo. Ma successivamente Wallach e Kiepenheuer [1] hanno messo in dubbio l'esattezza di questa formola, la quale venne poi trovata erronea a E. Bamberger e W. Bernays [2], i quali pervennero per tutta altra via ad una sostanza cui si deve attribuire con tutta sicurezza la struttura di un vero paraossiazossibenzolo. Bamberger rinvenne infatti tale prodotto fra i composti che il nitrosobenzolo fornisce per decomposizione spontanea in presenza di alcali. Ma seguendo questo modo di operare, i rendimenti in prodotto sono minimi; basti pensare che Bamberger, partendo da 300 grammi di nitrosobenzolo pervenne a gr. 0,5 di parazossifenolo, e che da un chilo di nitrosobenzolo non ottenne nemmeno due grammi dell'isomero ortoderivato; come si vede, ci è voluta tutta l'abilità dell'illustre chimico di Zurigo per isolare quantità così piccole di sostanze dal complicatissimo miscuglio che si forma.

Allo scopo di portare una nuova conferma alle sue vedute, il Bamberger [3] ha in seguito realizzato, in altro modo, la sintesi del medesimo paraossiazossibenzolo. Sebbene nell'azione dei nitroderivati sopra le idrossilammine non si formino in generale azossicomposti misti, ma bensì miscugli dei prodotti a radicali aromatici eguali [4]:

$$2\,R\,.\,NH\,.\,OH + 2\,R'\,.\,NO = R\,.\,(N_2O)\,.\,R + R^1\,.\,(N_2O)\,.\,R^1 + 2\,H_2O\,,$$

tuttavia Bamberger e Bernays hanno trovato che nel caso della fenilidrossilammina e del paranitrosofenolo la reazione procede nel senso che essi desideravano:

$$C_6H_5\,.\,NH\,.\,OH + NO\,.\,C_6H_4\,.\,OH = C_6H_5\,.\,(N_2O)\,.\,C_6H_4(OH) + H_2O\,.$$

Ma anche in questo caso i rendimenti sono quanto mai scarsi, giacchè il prodotto principale è costituito da azossibenzolo; partendo infatti da 30 grammi di paranitrosofenolo e 27 grammi di fenilidrossilammina ebbero 21 grammi di azossibenzolo e 34 grammi di una massa nera resinosa da cui con grande difficoltà isolarono gr. 4,6 di un prodotto cristallino, che riuscirono a dividere in cinque frazioni dai punti di fusione:

154-156°, 151-153°,5, 142-150°, 139-148°, 105-116°.

La prima, per ulteriore purificazione, fuse a 156-157°, e si dimostrò identica col paraossiazossibenzolo che essi ottennero, come si è detto, nella decomposizione del nitrosobenzolo. Gli autori, che allora non potevano pensare alle isomerie da me più tardi prevedute e riscontrate, non si occuparono

(1) Ibid., *14*, 2617 (1831).

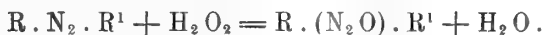
(2) Ibid., *35*, 1624 (1902); cfr. anche Bamberger: Ber. Rerichte, *33*, 1939 (1900); ibid.. *35*, 1614 (1902).

(3) Berliner Berichte, *35*, 1625 (1902).

(4) Ibid., *30*, 2278 (1897).

dello studio delle altre frazioni, ma per quanto dirò in seguito è degno di interesse soprattutto quella che fonde a 105-116°.

Da quanto ho esposto risulta che i pochi azossifenoli finora noti, vanno annoverati fra le sostanze che più difficilmente si possono ottenere e per tale ragione è stato pressochè impossibile sottoporli ad uno studio ulteriore ed esaminare in modo esauriente il loro comportamento. Per tale motivo io ho cercato di prepararli per altra via, giovandomi, cioè, del processo di ossidazione con acqua ossigenata in soluzione acetica (acido peracetico) che negli altri casi mi ha permesso di trasformare con rendimento quantitativo gli azoderivati nei corrispondenti azossicomposti:

$$R . N_2 . R^1 + H_2O_2 = R . (N_2O) . R^1 + H_2O .$$

In questo caso però, a prima vista, si presentava una difficoltà, dovuta alla presenza dell'ossidrile nell'azofenolo di partenza:

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . (OH)$$

giacchè non si poteva prevedere che tale prodotto, in generale poco stabile agli ossidanti, fosse anche in grado di resistere all'azione dell'acido peracetico in modo da limitarsi al passaggio:

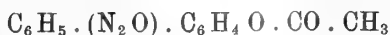
$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . OH + O = C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (OH) .$$

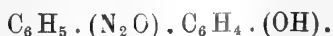
Per tale ragione io ho iniziato le mie ricerche giovandomi del solito artifizio che consiste nel sostituire l'idrogeno ossidrilico con un radicale che a trasformazione compiuta si potesse poi facilmente eliminare, ed a tale scopo ho preparato il derivato acetilico, che era già noto, del paraossiazobenzolo:

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . O . CO . CH_3 ,$$

tanto più che operando in soluzione di acido acetico glaciale era inverosimile che il processo di ossidazione fosse accompagnato anche da eliminazione del residuo acetico.

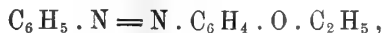
L'esperienza, anche in questo caso, ha confermata l'esattezza delle previsioni; la soluzione dell'acetilazofenolo infatti, colorata in bruno, per azione dell'acqua ossigenata diventa gialla, e per aggiunta di acqua si separa un prodotto bianco-giallognolo, splendente, che ha la composizione richiesta dall'azossicomposto:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 O . CO . CH_3$$

Saponificato con soda in soluzione alcoolica perde il gruppo acetilico per dare l'azossifenolo, che fonde a 148°:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (OH).$$

Il suo etere etilico, dopo molte ricristallizzazioni da ligroina, fonde a 72°

$$C_6H_5(N_2O) . C_6H_4 . O . C_2H_5$$

e ridotto con amalgama di alluminio fornisce nettamente l'azoetere:

$$C_6H_5 . N=N . C_6H_4 . O . C_2H_5 ,$$

identico a quello già nto.

Ma tanto il derivato acetilico quanto l'azossifenolo così preparati, presentano punti di fusione i quali, sebbene sieno netti, sono di alcuni gradi più bassi di quelli trovati da Bamberger. Dapprima ho pensato all'azossifenolo di Kekule, che pur fonde a 148°; ma questa sostanza, a differenza della mia, è insolubile negli alcali.

Perciò volli ricercare se anche in questo caso, come in tutti quelli che finora ho studiati, invece di una sostanza sola non si formassero i due isomeri che io aveva preveduti:

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N}=N . C_6H_4(OH) \qquad C_6H_5 . N=\underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4(OH)$$

Infatti dal prodotto fusibile a 148° dopo molte cristallizzazioni ne ho ricavato uno che fonde a 156°, mentre nelle acque madri ne è contenuto un secondo, isomero, che fonde molto più basso, a 107° e che a sua volta fornisce un etere etilico fusibile a 75°. Questo etere ridotto con amalgama di alluminio, fornisce del pari l'azoetere identico al precedente:

$$C_6H_5 . N=N . C_6H_4 . O . C_2H_5 .$$

Sebbene i punti di fusione dei due eteri etilici degli azossifenoli sieno molto prossimi (72° e 75°), essi hanno un comportamento molto diverso, ed il loro miscuglio, a circa parti eguali, fonde verso 55°.

Arrivati a questo punto ho tentato anche l'ossidazione diretta dell'azofenolo:

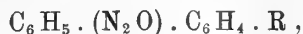
$$C_6H_5 . N=N . C_6H_4(OH)$$

ed ho trovato che essa pure procede nettamente, e così sono arrivato in modo più facile allo scopo; anche in questo caso si perviene a due isomeri che più agevolmente si possono separare l'uno dall'altro, e le proprietà di uno di essi coincidono perfettamente con quello isolato da Bamberger (156°).

Per ora mi limiterò ad indicare i due isomeri con le lettere α e β, senza volere con questo attribuire la formola definitiva di struttura:

	p. fus.		p. fus.
α-paraazossifenolo	156°	β-paraazossifenolo	107°
derivato acetilico	89°	derivato acetilico	73°
» etilico	72°	» etilico	75°

Nel caso di altri azossicomposti parasostituiti:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . R ,$$

dove R rappresenta un residuo alogenico, nitrico, carbossilico e solfonico, ci è stato agevole lo stabilire in modo rigoroso quale delle due forme si debba attribuire ai due isomeri:

$$C_6H_5 . \underset{\overset{\|}{O}}{N} = N . C_6H_4 . R \qquad C_6H_5 . N = \underset{\overset{\|}{O}}{N} . C_6H_4 . R$$

studiando principalmente il loro comportamento rispetto al bromo ed allo acido nitrico. A parità di condizioni, infatti, solamente quelli della seconda forma reagiscono con questi reattivi per formare bromo ovvero nitroderivati, nei quali il nuovo residuo è entrato nell'anello aromatico congiunto all'azoto trivalente:

$$C_6H_5 . N=$$

Ma nel caso degli azossifenoli e dei loro eteri questo metodo non si può più applicare, giacchè ho osservato che anche l'atomo di ossigeno, sotto forma di ossidrile ovvero di ossietile, al pari dell'atomo di azoto trivalente

$$\langle\quad\rangle \cdot N= \qquad \langle\quad\rangle \cdot O-$$

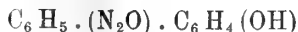
può favorire per conto suo l'entrata degli alogeni ovvero del gruppo nitrico nell'anello aromatico al quale esso è immediatamente congiunto. Nel caso dell'atomo di azoto trivalente si formano prodotti di addizione intermedî ad azoto pentavalente: nel caso dei fenoli e dei loro eteri invece molto probabilmente si formano derivati dell'ossigeno tetravalente, e le proprietà basiche dell'ossigeno e dei suoi eteri, come è noto, vennero in questi ultimi tempi poste in rilievo da molti chimici. Perciò, contrariamente a quanto si verifica per le altre coppie di azossicomposti isomeri finora studiati, tutti e due gli azossifenoli reagiscono con bromo; lo stesso fanno i loro eteri etilici che danno entrambi monobromoderivati che per caso fondono anche quasi alla stessa temperatura. Uno degli eteri etilici

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . O . C_2H_5$$

è identico a quello descritto due anni or sono da Angeli e Valori (1); il prodotto invece che fonde a 56° non è improbabile che rappresenti un miscuglio della forma che fonde a 72° con quella che fonde a 75°, forme forse isomorfe e che è pressochè impossibile scindere nei componenti per mezzo

(1) Questi Rendiconti. vol. XXI, 1° sem., 729 (1912).

di successive cristallizzazioni frazionate. Invece riesce più agevole separare i due azossifenoli da cui derivano

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4(OH)$$

che differiscono fra di loro notevolmente, come si è visto, e per punto di fusione e per solubilità nei diversi solventi.

Rispetto all'acqua ossigenata si comporta in modo analogo anche il p-bromo-p-ossiazobenzolo:

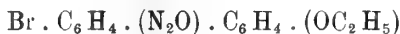
$$Br . C_6H_4 . N = N . C_6H_4 . OH$$

il quale fornisce un azossicomposto:

$$Br . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4 . OH$$

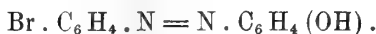
che fonde a 156° assieme ad un altro prodotto che si decompone verso 260° che ancora non venne studiato; esso pure è solubile negli alcali e probabilmente rappresenta l'isomero.

Con etilato sodico e ioduro di etile il primo dà l'etere:

$$Br . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4 . (OC_2H_5)$$

il quale per riduzione perde un atomo di ossigeno per dare l'azoetere:

$$Br . C_6H_4 . N = N . C_6H_4 . (OC_2H_5)$$

che a sua volta è identico al prodotto che si prepara eterificando con ioduro di etile il p-bromoazofenolo già noto:

$$Br . C_6H_4 . N = N . C_6H_4(OH) .$$

Questi passaggi che si compiono in modo quanto mai netto, non lasciano nessun dubbio sulla struttura di questi prodotti non solo, ma dimostrano che in tutte queste reazioni le sostanze prese in esame reagiscono secondo le forme ossidriliche e non secondo le forme chinoniche, quali per esempio:

$$Br . C_6H_4 . NH . N : C_6H_4 : O$$

ovvero:

$$Br . C_6H_4 . N(OH) . N : C_6H_4 : O$$

In modo del tutto simile procede anche l'ossidazione dei bisazofenoli: trattando infatti con acqua ossigenata in soluzione acetica il p-bisazofenolo da me descritto lo scorso anno [1]:

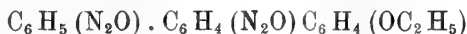
$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OH)$$

(1) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem. 844 (1913).

esso assume due atomi di ossigeno per dare un miscuglio di isomeri della forma:

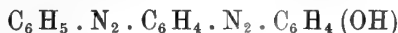
$$C_6H_5(N_2O) . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4(OH)$$

In questo caso, trattandosi di un bisazoderivato asimmetrico, gli isomeri possibili sono quattro; molto probabilmente finora io sono riuscito ad isolarne tre, che fondono rispettivamente a 200°, 184° e 175°. Dal prodotto che fonde a 184° venne preparato anche l'etere etilico:

$$C_6H_5(N_2O) . C_6H_4(N_2O)C_6H_4(OC_2H_5)$$

che fonde verso 125° e che è identico ad uno dei prodotti che si ottengono ossidando con acqua ossigenata [1]·

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OC_2H_5)$$

Con acido solforico concentrato tanto l'etere etilico quanto il bisazossifenolo da cui deriva, si colorano intensamente in violetto, la stessa colorazione che si ottiene sciogliendo in questo reattivo il p-bisazofenolo:

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OH)$$

Come si osserva in quasi tutti i casi finora studiati, anche qui l'acido solforico ha tolto i due atomi di ossigeno e saponificato il gruppo etossilico; a questo riguardo dirò che l'acido solforico saponifica facilmente tali eteri, tanto che anche i prodotti:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OC_2H_5)$$

e

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OC_2H_5)$$

per azione di questo reattivo forniscono subito il bisazofenolo corrispondente

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OH)$$

Riassumendo quanto si è detto in questa Nota, e ricordando alcune reazioni descritte lo scorso anno [2] potremo rappresentare col seguente schema i passaggi realizzati partendo dall'azobenzolo:

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_5$$

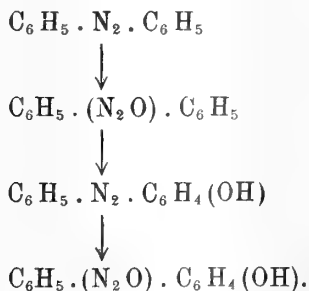
$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_5$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4(OH)$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4(OH).$$

[1] Ibid, pag. 848.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., 201; ibid., 844 (1913).

Partendo invece dal bisazobenzolo si possono effettuare le successive trasformazioni:

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . N = N . C_6H_5$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_5$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_5$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_5$$

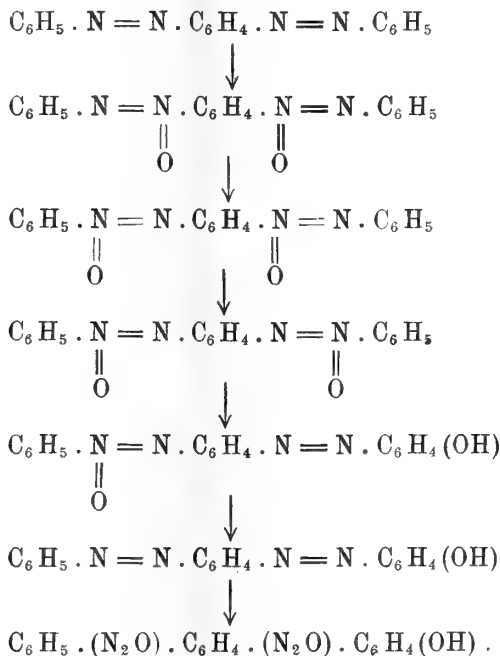
$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . N = N . C_6H_4(OH)$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . N = N . C_6H_4(OH)$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4(OH) .$$

Parte sperimentale.

Ossidazione dell'acetilparaossiazobenzolo. — Il derivato acetilico venne sciolto a caldo nella sufficiente quantità di acido acetico glaciale ed al liquido bruno così ottenuto si aggiunge, circa un egual peso dell'acetilderivato, di acqua ossigenata al 30 °/₀ (peridrol Merck).

La quantità di acido acetico si regola in modo che per aggiunta dell'acqua ossigenata non si separi dal derivato acetilico. Si riscalda a b. m. verso 80° e dopo qualche ora il liquido è diventato giallo; allora si versa in acqua la quale determina la separazione di una massa cristallina che viene purificata dall alcool bollente. Si ottengono così aghettini bianco giallognoli, splendenti, che fondono verso 81°. I dati dell'analisi corrispondono à quelli richiesti dal derivato acetilico del paraossiazossibenzolo:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (O . CO . CH_3) .$$

gr. 0,1025 di sostanza diedero cc. 9.6 di azoto a 14°.3 e 758 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_3$
N	11,10	10,94

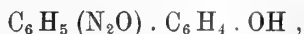
Il derivato acetilico viene immediatamente saponificato dalla potassa alcoolica; il liquido giallo così ottenuto si diluisce con acqua e poi acidi-

ficato con acido acetico. Si separa così un prodotto che purificato dal benzolo si presenta in aghi gialli che fondono nettamente a 148°.

gr. 0,1580 di sostanze diedero cc. 17.7 di azoto a 14°.2 e 758 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}N_2O_2$
N	13,28	13,08

Anche in questo caso l'analisi corrisponde all'azossifenolo:

$$C_6H_5(N_2O).C_6H_4.OH\ ,$$

ma se il punto di fusione coincide con quello dato da Kekule, esso è solubile negli alcali e d'altra parte non concorda con il punto di fusione 156° che Bamberger ha assegnato al suo prodotto avuto dal nitrosobenzolo. Perciò ho creduto opportuno ricercare a quale fatto fosse dovuta questa diversità nei punti di fusione, che sono ben netti, ed a tale scopo ho eterificato lo azossifenolo sciogliendone una molecola nella soluzione alcoolica di un atomo di sodio, e poi bollendo un lieve eccesso di ioduro di etile fino a che il liquido è diventato acido. Un paio d'ore sono sufficienti. Si distilla allora la maggior parte dell'alcool, al residuo si aggiunge un po' di soda caustica e successivamente acqua.

Si separa così un prodotto che ricristallizzato più volte da ligroina si presenta in laminette giallognole, splendenti che fondono a 72° e che si mostrò del tutto identico a quello ottenuto due anni or sono da Angeli e Valori ([1])

$$C_6H_5.(N_2O).C_6H_4.(OC_2H_5)\ .$$

Al pari di questi, ridotto nel modo più volte descritto con amalgama di alluminio in soluzione eterea e successivamente ossidato con ossido di mercurio, fornisce nettamente l'azoetere:

$$C_6H_5.N=N.C_6H_4(OC_2H_5)$$

identico a quello già preparato da altri ([2]).

Sulla sua struttura non vi ha perciò nessun dubbio; ma nelle acque madri da cui venne separato il prodotto che fonde a 72°, ne ho rinvenuto un altro che fonde, non nettamente, più basso, verso 55°. Ciò dimostra dunque che i prodotti prima descritti, l'azossifenolo ed il suo acetilderivato, per quanto abbiano l'aspetto di individui unici, sono miscugli di isomeri, probabilmente isomorfi. Ed infatti concentrando fortemente le prime acque madri da cui si è separato il prodotto che fonde a 148°, ho avuto un'altra sostanza molto più solubile in benzolo e che fonde più bassa, a 107°; è costituita

([1]) Questi Rendiconti, vol. XXI, 1° sem., 729 (1912).
([2]) P. Jacobson e W. Fischer, Berliner Berichte, *25*, 902 (1892).

del pari da aghi gialli, splendenti, solubili negli alcali e che hanno la stessa composizione.

gr. 0,1526 di sostanza diedero c. c. 16,6 di azoto a 6°,3 e 749 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}N_2O_2$
N	13.04	13.08

Eterificato con ioduro di etile in presenza di alcoolato sodico, come si è fatto per il caso precedente fornisce del pari un etere etilico che fonde a 75° ed invece il precedente fonde a 72°; mentre però quest'ultimo è nettamente colorato in giallo l'isomero che fonde a 75° è quasi bianco, con un lieve accenno al giallognolo; il miscuglio dei due, a circa parti eguali, fonde verso 55°.

Ridotto con amalgama di alluminio in soluzione eterea e poi ossidato con ossido di mercurio, fornisce del pari l'azoetere:

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . (OC_2H_5)$$

identico a quello preparato dall'isomero.

Solamente ricristallizzando un grandissimo numero di volte il prodotto che fonde a 148° prima da alcool e successivamente da benzolo, sono finalmente riuscito ad avere un prodotto che fonde a 156° e le cui proprietà coincidono con quelle descritte da Bamberger.

gr. 0.1915 di sostanza diedero c. c. 20,9 di azoto a 10°,2 e 760 mm.

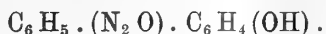
	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}N_2O_2$
N	13,16	13,08

Ossidazione del paraossiazobenzolo. Anche in questo caso l'ossiazobenzolo venne riscaldato in soluzione acetica, con circa il suo peso di peridrol, a bagno-maria, fino a che il calore del liquido è diventato giallo con tendenza al bruno. Per lo più 4, ovvero 5 ore, sono sufficienti; un riscaldamento più prolungato non è consigliabile perchè a lungo andare anche gli azossifenoli che si sono formati vengono decomposti con produzione di prodotti in parte resinosi ed in parte cristallini che ancora non vennero studiati.

Durante il riscaldamento della soluzione acetica, si separa pure piccola quantità di una polvere cristallina, giallognola, solubile negli alcali, fusibile verso 242° con annerimento, e che ancora non venne esaminata.

Viene separata per filtrazione ed alla soluzione acetica si aggiunge acqua; si separa così una massa giallastra, cristallina che dopo averla seccata nel vuoto si purifica da benzolo bollente. Una parte del prodotto si separa sotto forma di granuli cristallini, che aderiscono fortemente alle pareti del vetro; ricristallizzato un altro paio di volte dal benzolo fonde a

156° ed è costituito da una massa cristallina, giallognola. Essa è identica al prodotto avuto da Bamberger:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4(OH) .$$

gr. 0,1598 di sostanza diedero c.c. 17,2 di azoto a 7° e 760 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}N_2O_2$
N	13,13	13,08

Eterificato sul solido modo con ioduro di etile in presenza di alcoolato sodico fornisce l'etere:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (OC_2H_5)$$

che fonde a 72° ed è perfettamente puro.

L'azossifenolo p. f. 156° venne bollito per circa tre ore con anidride acetica, poi si tratta il liquido con carbonato sodico allo scopo di decomporre l'anidride che non ha reagito, e si ha così l'acetilderivato che si purifica da alcool bollente, in presenza di piccola quantità di nero animale. Si ottengono così laminette quasi bianche, dotate di splendore argentino, che fondono a 89°. Anche queste proprietà coincidono perfettamente con quelle del derivato acetilico descritto da Bamberger.

gr. 0,1478 di sostanza diedero c. c. 13,9 di azoto a 8° e 745 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_3$
N	11,20	10,94

Anche l'azossifenolo isomero che fonde a 107° per lo stesso trattamento fornisce un derivato acetilico che si presenta in squamme bianco giallognole, che fondono a 73°.

gr. 0,1483 di sostanza diedero c. c. 13,8 di azoto a 8°,6 e 751 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_3$
N	11,15	10,94

Ossidazione del bromoossiazobenzolo. — Il p-bromo-paraossiazobenzolo

$$Br . C_6H_4 . N = N . C_6H_4(OH)$$

sciolto in acido acetico caldo venne ossidato nel modo più volte descritto con circa l'egual peso di peridrol. Il liquido dapprima bruno va man mano facendosi più chiaro, tanto che dopo circa 5 ore è diventato giallo scuro. Contemporaneamente si separa una polvere cristallina, colorata in giallo, poco solubile in tutti i solventi e che si decompone verso 260°; si scioglie invece negli alcali e non venne ancora ulteriormente esaminata.

La soluzione acetica, separata per filtrazione, per aggiunta di acqua fornisce un precipitato voluminoso, che venne raccolto su filtro e lavato ac-

curatamente con acqua. Ricristallizzato più volte da benzolo bollente si presenta sotto forma di una polvere cristallina, giallognola, che fonde a 156°. È solubile negli alcali.

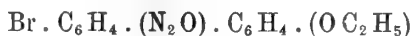
Anche in questo caso si è formato il corrispondente azossicomposto:

$$Br \,.\, C_6H_4 \,.\, (N_2O) \,.\, C_6H_4(OH)$$

gr. 0,1655 di sostanza diedero c. c. 13,7 di azoto a 13°,9 e 744 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9N_2O_2Br$
N	9,64	9,56

Con ioduro di etile ed alcoolato sodico dà l'etere etilico

$$Br \,.\, C_6H_4 \,.\, (N_2O) \,.\, C_6H_4 \,.\, (OC_2H_5)$$

che purificato dall'alcool costituisce aghettini gialli che fondono a 123°.
gr. 0,1714 di sostanze diedero c. c. 12,8 di azoto a 13°,4 e 753 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{13}N_2O_2Br$
N	8,82	8,72

Questo etere ridotto nel modo più volte descritto con amalgama di alluminio e poi ossidato con ossido di mercurio, fornisce l'azoetere:

$$Br \,.\, C_6H_4 \,.\, N = N \,.\, C_6H_4(OC_2H_5)$$

che dall'alcool bollente si separa sotto forma di lamine giallo dorate, dotate di vivo splendore, che fondono a 136°.
gr. 0,1548 di sostanza diedero c. c. 12,3 di azoto a 11°,6 e 747 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{13}N_2OBr$
N	9,37	9,18

La sostanza è perfettamente identica col prodotto che si ottiene eterificando il parabromo-paraossiazobenzolo

$$Br \,.\, C_6H_4 \,.\, N = N \,.\, C_6H_4(OH)$$

con ioduro di etile in presenza di etilato sodico.

L'altro azossicomposto isomero non l'ho ancora studiato; molto probabilmente esso è costituito dalla polvere gialla cristallina che si forma assieme al precedente ed alla quale venne prima accennato.

Ossidazione del p-bisazofenolo. — Il parabisazofenolo da me descritto lo scorso anno [1].

$$C_6H_5 \,.\, N_2 \,.\, C_6H_4 \,.\, N_2\, C_6H_4(OH)$$

[1] Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., 358 (1913).

venne ossidato nel solido modo con peridrol, in soluzione di acido acetico glaciale.

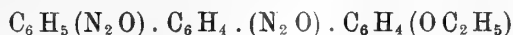
Anche in questo caso dopo 4-5 ore di riscaldamento sopra bagno-maria il colore intensamente bruno del liquido è passato al giallo, e nello stesso tempo si separano cristalli pure colorati in giallo, che vennero separati dall'acido acetico, sciolti in soda caustica molto diluita, e poi riprecipitati con anidride carbonica. Il prodotto viene in seguito purificato da benzolo bollente, da cui per raffreddamento si separano cristallini di color giallo limone che fondono a 185°. Anche in questo caso l'azocomposto di partenza ha assunto due atomi di ossigeno per dare il bisazossifenolo:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4(OH)$$

gr. 0,1560 di sostanza diedero c. c. 20,5 di azoto a 11°,4 e 751 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
N	16,73	16,76

Eterificato con ioduro di etile ed alcoolato sodico fornisce l'etere corrispondente:

$$C_6H_5(N_2O) . C_6H_4 . (N_2O) . C_6H_4(OC_2H_5)$$

che venne purificato da benzolo: cristallini gialli che fondono a 125° in un liquido torbido che solamente a temperatura più elevata diventa limpido. Questo comportamento è senza dubbio dovuto a cristalli liquidi.

gr. 0,2136 di sostanza diedero c. c. 29 di azoto a 12°,6 e 734 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{20}H_{18}N_4O_3$
N	15,67	15,47

Questo etere è a sua volta identico al prodotto meno solubile in benzolo, che si ottiene facendo agire l'acqua ossigenata in soluzione acetica sopra l'etere,

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4(OC_2H_5)$$

da me descritto lo scorso anno e che pure presenta in modo marcatissimo il fenomeno dei cristalli liquidi.

All'acido acetico filtrato dalla sostanza che fonde a 185° si aggiunge molta acqua, la quale determina la separazione di una massa cristallina, giallognola, che raccolta su filtro, lavata accuratamente con acqua e seccata a 100° venne trattata con benzolo bollente: una parte pochissimo solubile fonde a 200°. È solubile negli alcali, ed ha la stessa composizione della prima descritta.

gr. 0,1542 di sostanza diedero c. c. 21,6 di azoto a 16° e 756 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
N	16,46	16,76

Nel benzolo, da cui venne separata la precedente sostanza è contenuto un altro prodotto, molto più solubile in questo solvente. Si presenta in aghetti gialli che fondono verso 175°, ed è del pari solubile negli alcali. gr. 0.1446 di sostanza diedero c. c. 20,5 di azoto a 14°,2 e 743 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
N	16,48	16,76

Tanto queste sostanze, come anche la precedente, abbruciano con grandissima difficoltà; fondono tutte in liquidi torbidi (cristalli liquidi), e ciò rende molto difficile il poter stabilire con sicurezza se una delle forme non contenga ancora piccole quantità degli isomeri assîeme ai quali si ottiene.

Mi riservo lo studio ulteriore degli azossifenoli, e soprattutto di determinare la struttura degli isomeri che finora sono riuscito a preparare.

Anche nell'esecuzione di una parte delle presenti ricerche ho avuto per collaboratore il dott. Bruno Valori al quale esprimo i miei ringraziamenti.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. Almansi.

1. In due Note comparse di recente in questi stessi Rendiconti, ho esaminato il problema a cui si accenna nel titolo, supponendo che il movimento della massa liquida ammettesse un potenziale di velocità [1].

Io voglio ora esaminare il problema delle azioni esercitate sopra un corpo, nella ipotesi che il liquido abbia il movimento più generale, potendosi, anche in tal caso, stabilire alcune formule notevolmente semplici, e non prive d'interesse.

Su questo argomento, del quale ebbi già ad occuparmi (seguendo, però, una via diversa) in altre mie pubblicazioni degli anni 1909-10, io ritorno qui brevemente, affinchè in queste ultime tre Note si trovino raccolti tutti i risultati che nelle mie ricerche intorno al problema di cui si tratta, ho potuto stabilire.

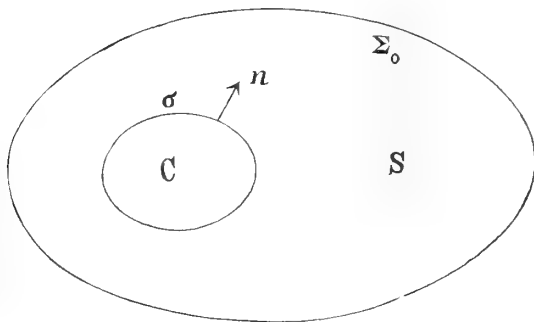
2. Chiamo σ la superficie che limita il corpo C pel quale si vuole esaminare l'azione esercitata dalla massa che lo circonda. Questa sarà poi limitata da una, o da più altre superficie, il cui insieme denoterò con Σ_0. Si ammetterà che sopra le particelle liquide non agiscano forze di massa. La densità sarà supposta uguale ad 1.

(1) *Sopra le azioni* ecc., a. 1913, 2° sem., fasc. 11°; *Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica.* a. 1914, 1° sem., fasc. 5°.

In un punto qualunque di σ o Σ_0 chiamerò n la normale rivolta verso l'interno dello spazio S limitato da quelle superficie.

Riferiamo i punti dello spazio ad un sistema di assi coordinati fissi (x, y, z). Diremo α, β, γ i coseni direttori di n.

Sopra un elemento $d\sigma$ della superficie di C agirà una forza di componenti

$$-p\alpha\, d\sigma \;,\; -p\beta\, d\sigma \;,\; -p\gamma\, d\sigma\,,$$

p denotando la pressione del liquido. Consideriamo le componenti della risultante di questo sistema di forze elementari, e i momenti del sistema rispetto agli assi. Una qualunque A di queste sei quantità possiamo rappresentarla mediante la formula

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A} = -\int_\sigma p\lambda\, d\sigma\,,$$

se intendiamo che λ sia rispettivamente uguale ad

$$\alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma\,,$$
$$\gamma y - \beta z \;,\; \alpha z - \gamma x \;,\; \beta x - \alpha y\,.$$

Le formule che vogliamo stabilire permettono di operare sopra la (1), senza specificare il significato di λ. Solo occorre tener presente che si ha, in tutti i casi:

$$\text{(2)} \qquad \int_\sigma \lambda\, d\sigma = 0\,.$$

Il problema che precisamente ci proponiamo è questo:

Le superficie σ e Σ_0 potranno essere rigide o deformabili, e, se rigide fisse o mobili. Per un periodo di tempo finito T noi supporremo di conoscere, in ogni istante, la configurazione delle superficie σ e Σ_0, e la loro posizione rispetto agli assi. Conosceremo allora, per tutto il tempo T, e in un punto qualunque P di σ o Σ_0, la componente secondo la normale

della velocità da cui è animata la particella liquida attigua a P, ossia la quantità

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

u, v, w essendo le componenti di velocità secondo gli assi.

Supporremo inoltre di conoscere *in un determinato istante* t_0 appartenente a T le componenti di velocità u, v, w *in tutto lo spazio* S occupato dal liquido. E noi ci proponiamo di determinare l'azione A *nell'istante* t_0.

La risoluzione di questo problema richiede essenzialmente la eliminazione delle derivate di u, v, w rispetto al tempo (derivate da cui dipende la pressione); e ciò può farsi mediante la determinazione di un'unica funzione armonica e regolare nello spazio S, *indipendente dal movimento del liquido.*

Se noi volessimo determinare il valore di A in un altro istante t, dovremmo prima determinare i valori di u, v, w al tempo t. Ma i mezzi dell'analisi non consentono, in generale, la risoluzione di questo problema [1].

3. Sia ψ la funzione regolare e armonica nello spazio S, che nei punti di σ soddisfa alla condizione

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda, \tag{3}$$

e nei punti di Σ_0 alla condizione

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \tag{4}$$

La funzione ψ esiste: se infatti diciamo Σ l'insieme delle superficie σ e Σ_0, vale a dire la superficie totale che limita lo spazio S, i valori assegnati a $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, per le formule (3), (4) e (2), sono tali che si ha:

$$\int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma = 0.$$

Sarà evidentemente, in virtù della formula (1), e delle (3) e (4):

$$A = -\int_\Sigma p \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma,$$

[1] Io evito, insomma, in tutta questa trattazione, il problema fondamentale della Idrodinamica. Dato il movimento del liquido in un istante t_0, e il movimento delle superficie che lo limitano per un periodo di tempo finito T, io non mi domando come si moverà il liquido in un istante t di T; ma quali sono le resistenze nell'istante t_0 in cui il movimento del liquido è dato.

ovvero:

$$A = -\int_{\Sigma} p\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\gamma\right) d\Sigma. \tag{5}$$

E se si trasforma l'integrale esteso a Σ in un integrale esteso allo spazio S, di cui Σ è il contorno, tenendo presente che ψ è una funzione armonica:

$$A = \int_{S} p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dS. \tag{6}$$

Ora:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{dw}{dt}.$$

Dunque:

$$A = -\int_{S}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dS. \tag{7}$$

Poniamo:

$$U = u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{8}$$

Sarà:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \tag{9}$$
$$+ u\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Seguendo le notazioni consuete noi denotiamo con $\frac{df}{dt}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$, la derivata di una funzione f rispetto al tempo, calcolata seguendo una particella nel suo movimento, o fissando un punto dello spazio; in modo che si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pertanto avremo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + u\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + w\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z},$$

e formule analoghe per $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$; quindi:

$$u\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + w\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) =$$
$$= u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + W,$$

essendo:

$$W = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \\ + 2vw \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial z} + 2wu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial x} + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} .$$

Risolvendo l'equazione (9) rispetto al primo trinomio del 2° membro, e sostituendo al secondo trinomio l'espressione fornita da queste ultime, otterremo:

$$\frac{du}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = \frac{dU}{dt} - \left\{ u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + w \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right\} - W ,$$

onde la (7) darà:

$$(10) \quad A = -\int_S \frac{dU}{dt} dS + \int_S \left\{ u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + w \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right\} dS + \\ + \int_S W\, dS .$$

Ora si ha, tanto se lo spazio S è fisso, quanto se è variabile:

$$\int_S \frac{dU}{dt} dS = \frac{d}{dt}\int_S U\, dS .$$

Ma per la formula (8):

$$\int_S U\, dS = \int_S \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS ;$$

quindi, integrando per parti, e tenendo presente la condizione d'incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 :$$

$$(11) \qquad \int_S U\, dS = -\int_\Sigma \psi(u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\Sigma = -\int_\Sigma \psi\, N\, d\Sigma .$$

Con una trasformazione analoga, il 2° integrale della formula (10) diventerà uguale a $-\int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} N\, d\Sigma$. Onde avremo infine:

$$(12) \qquad A = \frac{d}{dt}\int_\Sigma \psi\, N\, d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} N\, d\Sigma + \int_S W\, dS .$$

Questa formula risolve il problema. V' intervengono infatti le quantità ψ ed N che sono indipendenti dal movimento del liquido; e (nella W) le componenti di velocità u, v, w, ma non le loro derivate rispetto al tempo.

4. È da notare che la formula (12) sussiste anche se nello spazio S vi sono delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, come si riconosce facilmente esaminando le trasformazioni eseguite.

Consideriamo infatti un integrale del tipo

$$J = \int_S \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS ,$$

ove F, f, g, h rappresentino funzioni che potranno essere discontinue sopra superficie il cui insieme denoteremo con ω. e delle quali le ultime tre siano legate dalla relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 . \tag{13}$$

Le superficie ω, opportunamente completate, se occorre (per es. se ω è una superficie aperta situata nell' interno di S), con altre che diremo ω_0, e sulle quali le discontinuità saranno nulle, divideranno lo spazio S in un certo numero m di spazî S_i. E sarà

$$J = \sum_1^m {}_i \int_{S_i} \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS_i .$$

L' integrale esteso allo spazio S_i (in cui le funzioni sono continue) potremo trasformarlo in un integrale esteso alla superficie σ_i di S_i. Tenendo presente la relazione (13), e ponendo

$$E = - F . (f\alpha + g\beta + h\gamma) ,$$

ove α, β, γ denotano, nei punti di σ_i, i coseni della normale interna, avremo:

$$J = \sum_1^m {}_i \int_{\sigma_i} E \, d\sigma_i .$$

Ora l' insieme delle superficie σ_i è formato dalla superficie Σ che limita l' intero spazio S, e dalle due faccie delle superficie ω ed ω_0. Ma nei punti delle superficie ω_0, E ha, dalle due parti, valori uguali e di segno contrario, essendo ivi continue le F, f, g, h, ed essendo uguali e di segno contrario i coseni delle due normali; onde le superficie ω_0 non interverranno nella espressione di J. Se dunque nei punti di ω diciamo E ed E'' i valori di E dalle due parti, si avrà:

$$J = \int_\Sigma E \, d\Sigma + \int_\omega (E' + E'') \, d\omega .$$

Se poi la funzione F è continua nei punti di ω, e le funzioni f, g, h sono tali che la quantità $f\alpha + g\beta + h\gamma$ abbia dalle due parti di ω valori uguali e di segno contrario, sarà $E' + E'' = 0$, quindi

$$J = \int_{\Sigma} E\, d\Sigma.$$

come nel caso che non esistano discontinuità.

Questo appunto accade nelle trasformazioni d'integrali eseguite nel § 3: precisamente nella (5-6) $\left(F = p\,;\, f, g, h = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$, nella (8-11) $(F = \psi\,;\, f, g, h = u, v, w)$, e nell'altra analoga alla precedente $\left(F = \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$. La pressione p è infatti continua nello spazio S; la funzione ψ è continua con tutte le sue derivate; e se vi sono superficie su cui la velocità è discontinua, la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ ha, secondo le due normali, valori uguali e di segno contrario.

5. Particolarmente interessante è il caso che il corpo C si muova di moto traslatorio uniforme, e che la superficie Σ_0 sia fissa.

La velocità normale N è allora nulla sopra Σ_0, e i due primi integrali della formula (12) risultano estesi alla sola superficie σ di C. Se poi supponiamo che il corpo si muova parallelamente all'asse delle x con velocità V_0, sarà sopra $\sigma N = V_0\alpha$; onde avremo:

$$A = V_0 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \psi\, \alpha\, d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial t}\, \alpha\, d\sigma \right\} + \int_{S} W\, dS. \tag{14}$$

Ma la quantità entro parentesi, per una formula dimostrata nella prima delle due Note precedenti a questa (§ 2), è uguale ad $\int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} N\, d\sigma$, ossia a $V_0 \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, \alpha\, d\sigma$. Denotiamo poi le componenti di velocità, anzichè con u, v, w, con $V_0 u$, $V_0 v$, $V_0 w$ (supposto $V_0 \gtreqless 0$). Volendo conservare a W la sua espressione $u^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \cdots$, dovremo nella ultima formula sostituire W con $V_0^2 . W$; si avrà pertanto:

$$A = V_0^2 \left\{ \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, \alpha\, d\sigma + \int_{S} W\, dS \right\};$$

e denotando con $-K$ il coefficiente di V_0^2, che non dipende da V_0 (bensì dalla configurazione del sistema, e dal movimento del liquido nell'istante t_0):

$$A = -K . V_0^2 .$$

Possiamo chiamare *simili* quei movimenti i quali (nell'istante t_0 a cui si riferisce A) si ottengono uno dall'altro moltiplicando le componenti di velocità per una costante. Noi vediamo dunque che *per movimenti simili il valore di* A *è proporzionale al quadrato della velocità del corpo mobile.*

Sembra sia questa l'espressione più generale della legge di proporzionalità fra l'azione A — in particolare la componente della forza secondo la direzione del movimento, o *resistenza diretta* — e il quadrato della velocità del corpo; legge confermata, entro certi limiti, dall'esperienza ([1]).

Supponiamo che A rappresenti la resistenza diretta; e confrontiamo un movimento M col movimento *simile* M′ ottenuto invertendo le velocità di tutte le particelle liquide. Dovrà cambiare di segno la velocità V_0 di C, ma V_0^2 e K non varieranno; e perciò non varierà, nè di grandezza, nè di segno, la resistenza A. Quindi avverrà o che A sia nulla per ambedue i movimenti, o che per uno di essi la resistenza abbia lo stesso senso del movimento del corpo.

Questo risultato è da considerarsi come un'estensione del noto *paradosso di D'Alembert.*

Si deve però tener presente che le formule qui stabilite valgono per qualunque movimento della massa liquida *compatibile col dato movimento del corpo* C; mentre i valori del coefficiente K forniti dalle osservazioni si riferiscono a quei movimenti particolari che sono *provocati dal movimento stesso di* C. Per tali movimenti K risulta positivo.

6. Se oltre ad esser fissa la superficie Σ_0 è anche immobile il corpo C, la formula (14), posto $V_0 = 0$, darà:

$$A = \int_S W \, dS. \tag{15}$$

In questo caso, se noi confrontiamo due movimenti simili della massa liquida, poichè W e quindi A risultano moltiplicate per il qnadrato della costante per cui si moltiplicano le componenti di velocità, avremo che i valori di A stanno tra loro come i quadrati della velocità in uno stesso punto dello spazio.

7. Si può dare di W un'espressione molto semplice.

In un punto qualunque dello spazio S siano, al tempo t_0, a, b, c, i coseni di direzione della velocità, e sia V la sua grandezza. Sarà $u = Va$, $v = Vb$, $w = Vc$, quindi:

$$W = V^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} a^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial z} bc + \cdots \right).$$

Ma la quantità entro parentesi non è altro che la derivata seconda della

([1]) V. Levi-Civita, *Scìe e leggi di resistenza,* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIII, an. 1907.

funzione ψ rispetto alla direzione della velocità. Designando questa con ν avremo:

$$W = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nu^2} .$$

8. Un'altra espressione si può dare della quantità W, e perciò di **A**. Essendo $U = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}$, sarà identicamente:

$$u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} +$$
$$+ \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} +$$
$$+ \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + W .$$

Poniamo

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

denotiamo cioè con ξ , η , ζ le componenti del vortice. I coefficienti di $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, nella formula precedente, sono uguali ad

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} - (v\zeta - w\eta) , \text{ ecc. } (V^2 = u^2 + v^2 + w^2).$$

Si avrà per conseguenza da quella formula, risoluta rispetto a W:

$$W = u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} + D,$$

ove:

$$D = (v\zeta - w\eta) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (w\xi - u\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (u\eta - v\xi) \frac{\partial \psi}{\partial z} ,$$

ovvero:

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} .$$

9. Supponiamo, come nel § 6, che le superficie σ e Σ_0 siano fisse. Varrà allora la formula (15), da cui, sostituendo a W l'espressione trovata, otterremo:

$$A = \int_S \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) dS -$$

$$- \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS + \int_S D\, dS .$$

Se rappresentiamo con ω l'insieme delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, potremo eseguire sopra i due primi integrali la trasformazione esaminata nel § 4, ed avremo

$$A = \int_\Sigma E\, d\Sigma + \int_\omega (E' + E'')\, d\omega + \int_S D\, dS ,$$

essendo ora

$$E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n} - UN . \tag{16}$$

Nei punti di Σ n denota la normale interna (§ 2). Nei punti di ω n rappresenta sia l'una che l'altra normale, N è la componente della velocità secondo n, E' ed E'' sono i valori di E dalle due parti (§ 4).

Ma osserviamo che nei punti di Σ, ossia delle superficie σ e Σ_0, che abbiamo supposte fisse, $N = 0$, quindi $E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n}$. Inoltre sopra σ $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda$, sopra Σ_0 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ (§ 3). Onde sarà:

$$A = \frac{1}{2} \int_\sigma V^2 \lambda\, d\sigma + \int_\omega (E' + E'')\, d\omega + \int_S D\, dS . \tag{17}$$

Se lo spazio S non è semplicemente connesso, la massa liquida potrà essere in movimento senza che si abbiano nè superficie di discontinuità ω, nè vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$, $D = 0$). In tal caso avremo

$$A = \frac{1}{2} \int_\sigma V^2 \lambda\, d\sigma ; \tag{18}$$

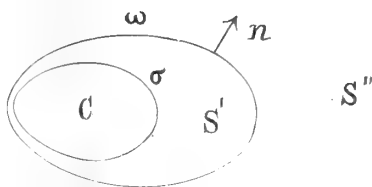
la quale formula poteva ottenersi direttamente dalle (1) e (2), essendo allora $p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{cost.}$

10. Altro caso notevole è il seguente.

Si abbia nello spazio S una superficie di discontinuità ω, chiusa, e che contenga C nel suo interno, la quale superficie potrà anche, in parte,

coincidere con σ. Noi ci avviciniamo così a quello che realmente accade nel caso di un corpo fisso investito da una corrente.

Diciamo S' lo spazio compreso fra σ ed ω, S'' quella compreso fra ω e Σ_0. Nello spazio S', e nell'istante t_0 a cui ci riferiamo, il liquido sia in quiete; nello spazio S'' (che supporremo a connessione multipla) il moto sia irrotazionale.

Potremo applicare la formula (17), in cui si dovrà porre $D = 0$, mancando i vortici in tutto lo spazio S. Inoltre, poichè nello spazio S' non si

ha movimento, ed è nulla per conseguenza tanto la velocità V quanto la funzione U, sarà nullo l'integrale esteso a σ, e nell'integrale esteso ad ω sarà $E' = 0$, se intendiamo che E' si riferisca alla faccia di ω rivolta verso S'. Quanto ad E'', poichè nei punti di ω la componente normale della velocità è nulla (il liquido essendo in quiete nello spazio S'), avremo dalla formula (16) $E'' = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n}$, ove s'intende che V rappresenti la velocità sulla faccia esterna di ω, n la normale esterna. Onde sarà per la (17):

$$A = \frac{1}{2} \int_\omega V^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega .$$

Se ω viene a coincidere con σ, ove $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda$, ritroviamo la formula (18).

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota I del Corrispondente Francesco Severi.

È noto che sopra una curva algebrica C, non può esistere un'infinità continua di sistemi lineari (completi) d'integrali abeliani di 1ª specie, riducibili (¹).

Picard e Poincaré hanno da tempo indicato esempî di curve di genere $p > 1$, possedenti un'infinità discontinua d'integrali ellittici (integrali con due periodi ridotti) (²). In questa Nota mi propongo di mostrare l'esistenza di curve contenenti infiniti sistemi lineari di $q\ (\geq 1)$ integrali con $2q$ periodi ridotti; e ciò anche all'infuori dei sistemi che s'ottengono ovviamente, sulle curve di Picard-Poincaré, combinando linearmente a due a due, a tre a tre, ecc., i loro integrali ellittici. Resta però sottinteso che, nel caso $q > 1$, non potrà esigersi, come accade sempre per $q = 1$, che ognuno degli infiniti sistemi sia riducibile al genere q (³), cioè che provenga da un'involuzione di genere q della curva sostegno, giacchè si sa anzi che non può esistere una curva algebrica con infinite involuzioni irrazionali di genere $q > 1$ (⁴).

(¹) Pei concetti fondamentali relativi agl'integrali riducibili, veggansi, ad es., le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908). Ved. in particolare a pagina 340.

(²) Picard, *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes*, etc. (Bulletin de la Société math. de France, tom. XI, 1883, pag. 25) pag. 47; Poincaré, *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (Comptes rendus, tom. 99, 1884, pag. 853); *Sur les fonctions abéliennes* (American Journal, tom. 8, 1886, pag. 289).

(³) Nel trattato di Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903) pag. 493; e nelle mie *Lezioni* citate, q integrali indipendenti, di 1ª specie, di una curva C di genere $p\ (> q)$ diconsi *riducibili al genere* q, quando, mediante una sostituzione razionale, essi possono mutarsi nei q integrali di 1ª specie di una curva di genere q. Poincaré invece adotta questa locuzione anche quando si sappia soltanto che i q integrali hanno $2q$ periodi ridotti. In generale ciò non porta l'esistenza su C di un'involuzione di genere q, di gruppi di punti, ma sibbene l'esistenza di un'involuzione *abeliana*, sulla varietà dei gruppi di q punti di C.

(⁴) De Franchis, *Un teorema sulle involuzioni irrazionali* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. 36, 1913, pag. 368). Noterò di passaggio che oltre alla via, del resto assai semplice, indicata dal De Franchis, per stabilire la citata proposizione, si può seguire quest'altra. È chiaro (formola di Zeuthen) che le involuzioni di genere $q > 1$, sopra una C di genere p, hanno l'ordine limitato. Ma poichè le corrispondenze di dati indici, sopra una curva, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui (ved. il lemma geometrico al n. 4 della mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica*, Math.

Darò qui un cenno della via seguìta e dei risultati ottenuti nel presente lavoro.

Per brevità un sistema lineare d'integrali riducibili, i cui periodi ridotti sieno in numero doppio a quello degl'integrali indipendenti contenuti nel sistema, si dirà un sistema *regolare*. Esso è necessariamente completo (1).

Se sulla curva C, di genere p, esistono due sistemi regolari d'integrali riducibili, si presenta spontanea la considerazione del loro sistema lineare « congiungente » K, e del loro sistema lineare « intersezione » H. Poggiandomi sulle ricerche di Castelnuovo intorno alle varietà di Picard (2) e sopra una disuguaglianza fra il numero degl'integrali indipendenti (di 1ª specie) di un sistema d'integrali riducibili ed il numero dei loro periodi ridotti (3), dimostro che i sistemi H, K sono regolari, come i due sistemi dati (n. 1).

Ciò posto, si rappresentino gli ∞^{p-1} integrali di 1ª specie di C (4), coi punti di uno spazio lineare S_{p-1}, sicchè i sistemi regolari d'integrali riducibili, abbiano per imagini certi spazî lineari di S_{p-1}. Dalla proposizione riferita, segue subito che gli spazî successivamente dedotti, mediante proiezioni e sezioni, a partire da un gruppo di spazî imagini di più sistemi regolari, rappresentano nuovi sistemi regolari.

Ne deriva un'immediata ed elegante dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, circa l'esistenza d'infiniti integrali ellittici sopra una curva di genere p, che possegga $\mu+1$ integrali ellittici dipendenti $(p \geq \mu \geq 2)$ (5). Nel caso $\mu=3$, per esempio, sul piano rappresentativo del

---

Annalen, Bd. 74, 1913); così ne segue, in forza di un noto teorema di Humbert-Castelnuovo, che le involuzioni di genere >1 sono esse pure in numero finito.

A proposito della mia Memoria citata dei Math. Annalen, colgo l'occasione per avvertire che negli enunciati dei nn. 19 e 20, relativi ad una corrispondenza T variabile colla curva generica di un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^2, sopra una superficie, regolare o irregolare, F, va aggiunto in modo esplicito che, qualora $|C|$ sia composto con una involuzione I_n, la corrispondenza T non deve *far parte* della corrispondenza simmetrica $S(n-1, n-1)$, generata da I sopra ogni C. Del resto la dimostrazione del n. 19 esclude in modo evidente questo caso, da che in essa si suppone che il luogo dei punti omologhi di un dato x nelle T relative alle ∞^1 curve della rete $|C|$, che passan per x, sia una *curva*; mentre nel caso da escludersi, il luogo suddetto ridurrebbesi ad un gruppo di punti. I teoremi dei nn. 19, 20 valgono evidentemente, anche senza quest'esclusione esplicita, purchè si riferiscano a sistemi lineari *semplici* $|C|$, almeno ∞^3.

(1) Cfr. le mie *Lezioni*, pag. 340.

(2) Castelnuovo, *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5), tom. XIV, 1905, pag. 593).

(3) Ved. le mie *Lezioni*, pag. 338.

(4) Consideriamo come identici due integrali che differiscano per una costante, additiva o moltiplicativa.

(5) *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 305; Krazer (trattato citato), pag. 489.

sistema che congiunge i 4 integrali ellittici dati, si hanno 4 punti, a tre a tre indipendenti, A_1, A_2, A_3, A_4, imagini di quei 4 integrali. Orbene, le intersezioni a due a due delle rette congiungenti due degli A, o due dei nuovi punti che da essi via via deduconsi (rete di Möbius), rappresentano infiniti integrali ellittici contenuti nel sistema.

In generale si trova (restringendo leggermente la portata del teorema del n. 4) che se una curva C, di genere p, possiede $\mu+1$ (≥ 3) sistemi regolari, a μ a μ indipendenti, d'integrali riducibili, tali che uno, A, di essi, di dimensione $q-1$ (≥ 0), sia contenuto nel sistema che congiunge gli altri, la curva contiene un'infinità discontinua di sistemi analoghi ad A. Resta anche ben determinata la struttura di tale infinità, poichè si prova che quei sistemi possono coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu-1$ (individuata da $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$). Va considerato in modo speciale soltanto il caso $\mu=2$, perchè allora il gruppo degli spazî rappresentativi dei tre dati sistemi, non è capace di definirne altri, come A, mediante operazioni *interne* di proiezione e sezione. Ma da $\mu=2$ si risale agevolmente a $\mu=3$, con un'opportuna operazione di *ampliamento* (n. 2) del sistema congiungente i tre dati. La rete di Möbius (di specie 1) coordinata alla totalità dei sistemi regolari ∞^{q-1} esistenti su C, è allora costituita dai punti d'una retta derivanti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Allorquando i $\mu+1$ sistemi dati sieno della stessa dimensione $q-1$ — e a questo caso ci si può sempre ridurre — gl'infiniti sistemi regolari che da essi derivano, costituiscono quella che chiamo una *configurazione normale di sistemi d'integrali riducibili*. Tale configurazione è studiata al n. 5 (Nota II) ove si determina anche il minimo continuo, cui appartengono tutti i suoi sistemi regolari.

Naturalmente questi risultati possono riferirsi, non soltanto agl'integrali abeliani propriamente detti, ma anche agl'integrali semplici di prima specie d'una varietà. Basta considerare, in luogo d'una varietà di Jacobi, una varietà di Picard.

Il n. 7 (Nota II) è dedicato a stabilire l'esistenza effettiva di varietà (o curve) algebriche soddisfacenti ai teoremi sopra riferiti. E nel n. 8 (Nota II) espongo infine una dimostrazione analitica del teorema generale del n. 4.

1. Sistemi congiungente e intersezione di due dati sistemi regolari. Sistemi complementari. — Sia V una varietà di Picard (o di Jacobi) a p dimensioni, la quale possegga due sistemi regolari A_1, A_2, contenenti rispettivamente q_1, q_2 integrali riducibili di prima specie, indipendenti.

Gl' integrali di A_1 sono allora costanti lungo le varietà *algebriche* W' a $p - q_1$ dimensioni di un sistema ∞^{q_1}, d'indice 1, appartenente a V [1], e, similmente, le varietà W'', di livello costante degl' integrali di A_2, sono algebriche, a $p - q_2$ dimensioni, e formano un sistema ∞^{q_2}, pure d'indice 1.

Sulla varietà *algebrica* W a $d\,(\leq p)$ dimensioni, riempita dalle W'' che escono dai punti di una W' genericamente fissata, son costanti tutti gl' integrali eventualmente comuni ai due sistemi, giacchè essi lo sono tanto lungo le W' come lungo le W''.

Pel teorema di Castelnuovo, or ora citato a pie' di pagina, ne deriva che il sistema, evidentemente lineare, formato da tutti gli eventuali integrali comuni ai due sistemi A_1, A_2, è regolare. Dunque:

Il sistema intersezione di due dati sistemi regolari d' integrali riducibili, è regolare.

Passiamo a considerare il sistema congiungente dei due dati sistemi A_1, A_2, cioè il minimo sistema lineare d' integrali semplici di 1ª specie di V, che li contiene entrambi.

Qualora si rappresenti il sistema lineare S degli ∞^{p-1} integrali di V, coi punti di uno spazio S, a $p - 1$ dimensioni, e s' indichino colle stesse lettere A_1, A_2 gli spazî a $q_1 - 1$ ed a $q_2 - 1$ dimensioni, imagini dei sistemi A_1, A_2, il sistema intersezione H ed il sistema congiungente K, verranno rappresentati rispettivamente dallo spazio intersezione H e dallo spazio congiungente K di A_1, A_2.

Sicchè le dimensioni $r - 1$ ed $s - 1$ di H, K saranno legate alle dimensioni di A_1, A_2 dalla relazione

$$r + s = q_1 + q_2,$$

e, se non esiste H, il sistema K avrà la dimensione $q_1 + q_2 - 1$.

Consideriamo anzitutto il caso in cui H manchi. Allora scrivendo i periodi di una combinazione lineare generica degl' integrali di A_1, A_2, cioè di un integrale generico di K, si vede subito che K è un sistema di $q_1 + q_2$ integrali indipendenti con *al più* $2(q_1 + q_2)$ periodi ridotti. Diciamo « al più », perchè *a priori* potrebbe dubitarsi che questi periodi fossero ulteriormente riducibili.

Ma se si ricorda che il doppio del numero degl' integrali indipendenti (di 1ª specie) contenuti in un dato sistema lineare d' integrali riducibili, non può mai superare il numero dei periodi ridotti [2], si conclude che i pe-

[1] Che le W' sieno *algebriche* risulta da un teorema di Picard, contenuto nel lavoro citato. Viceversa Castelnuovo ha dimostrato che, se q_1 integrali semplici di 1ª specie di V si mantengono costanti lungo una curva o superficie o varietà algebrica, essi individuano un sistema regolare ∞^{q_1-1}. Ved. Nota citata, pag. 594.

[2] *Lezioni*, pag. 338.

riodi ridotti, ulteriormente irriducibili, degl' integrali di K, son proprio in numero di $2(q_1 + q_2)$, e quindi che K è regolare.

Prima di passare ad esaminare il caso in cui H esista, convien premettere la nozione di *sistema complementare* (regolare) di un dato sistema regolare.

Picard [1] e Poincaré [2] hanno dimostrato che, se una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, possiede q_1 integrali semplici di 1ª specie riducibili, a $2q_1$ periodi ridotti, essa possiede in conseguenza un sistema di $p - q_1$ integrali di 1ª specie con $2(p - q_1)$ periodi ridotti.

E di più i due sistemi (regolari) non hanno alcun integrale comune, sicchè sono rappresentati in S da due spazî duali, indipendenti. Due sistemi siffatti si chiameranno *complementari* l'uno dell'altro. Non è però detto che un sistema regolare individui il suo complementare (n. 4 Oss.); comunque ciò non pregiudica affatto le nostre ulteriori considerazioni.

Un sistema regolare M, di dimensione $d - 1$, il quale sia contenuto in un altro sistema regolare N, di dimensione $l - 1$ $(l > d)$, *ammette anche entro N un sistema complementare*, di dimensione $l - d - 1$, cioè un sistema regolare ∞^{l-d-1}, non avente con M alcun integrale comune. Esso non è altro che l' intersezione di N col complementare di M, entro al sistema totale S.

Ciò premesso, si esaurisce subito anche il caso in cui esista il sistema intersezione H dei due dati sistemi regolari A_1, A_2. Costruiscasi in A_1 un sistema B_1, di dimensione $q_1 - r - 1$, complementare di H: B_1 è indipendente da H e quindi anche da A_2. Ed è chiaro che il sistema K, congiungente A_1 ed A_2, coincide con quello che congiunge B_1 ed A_2. Dall'esame del caso precedente, segue pertanto che K è esso stesso un sistema regolare. E si conclude:

Anche il sistema congiungente di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

2. Ampliamento di un sistema regolare. — Se la varietà picardiana V, di dimensione p, possiede un sistema regolare A, ∞^{q-1}, d' integrali riducibili, si può sempre costruire una picardiana W, di dimensione q, a cui *spettino* quegl' integrali, cioè tale che gl' integrali semplici di 1ª specie di W, abbiano gli stessi periodi degl' integrali appartenenti ad A. I punti di W sono le imagini delle ∞^q varietà tracciate su V, lungo cui sono costanti quegl' integrali ed il punto corrente su W è funzione razionale del punto corrente su V.

[1] Memoria cit. pag. 43. Ivi trovasi il teorema cui si allude nel testo per le curve di genere 2.

[2] *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 302. Ved. pure, Castelnuovo, loc. cit., pag. 598.

Posto ciò, consideriamo un'altra picardiana W' di dimensione q' e sia Φ la picardiana, di dimensione $q+q'$, che rappresenta la varietà delle coppie di punti di W, W'. La Φ contiene due sistemi regolari complementari, rispettivamente di ∞^{q-1} e $\infty^{q'-1}$ integrali riducibili: i primi hanno gli stessi periodi ridotti degl'integrali di W, ossia di A, e i secondi gli stessi periodi ridotti degl'integrali di W'.

Si è così costruito un sistema regolare più ampio B, $\infty^{q+q'-1}$, cui appartiene un sistema regolare *identico* al dato sistema ∞^{q-1} A. E quando parliamo di sistemi « identici » d'integrali riducibili, intendiamo alludere a sistemi i cui elementi (integrali) si possono riferire (omograficamente) per guisa che due integrali corrispondenti abbiano gli stessi periodi ridotti. Due varietà di Picard, di dimensione q, a cui spettino rispettivamente due dati sistemi regolari ∞^{q-1}, fra loro identici, sono birazionalmente equivalenti.

Diremo per ciò che *il sistema regolare B è un ampliamento del sistema regolare A*, ottenuto per *proiezione* dal sistema lineare degl'integrali di W'.

3. Dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, relativo alle curve (o varietà) con infiniti integrali ellittici. — Dalle proposizioni del n. 1 discende che se, entro alla totalità S degli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di una varietà algebrica V, esistono più sistemi regolari d'integrali riducibili, *ogni sistema lineare dedotto da essi con operazioni interne di proiezione e di sezione, è un sistema regolare d'integrali riducibili.*

Supponiamo che V possegga $\mu+1$ integrali ellittici $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu+1}$, linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$). Senza introdurre un'effettiva restrizione, si può ritenere che fra i suddetti integrali non se ne trovino mai μ dipendenti fra loro.

Il sistema regolare congiungente quegl'integrali, ha perciò la dimensione $\mu-1$, e viene rappresentato da uno spazio lineare K, in cui sono segnati $\mu+1$ punti $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu+1}$, a μ a μ indipendenti, imagini dei dati integrali. A partire allora da quei $\mu+1$ punti, con operazioni interne di proiezione e di sezione, se ne possono ottenere infiniti altri (com'è ben noto, si ottengono così tutti e soli i punti « razionali » rispetto al gruppo dei $\mu+1$ dati, i quali si assumano come vertici della piramide fondamentale delle coordinate proiettive). Si conclude pertanto col teorema di Poincaré:

Se una varietà (o curva) algebrica con p integrali semplici di 1ª specie, contiene $\mu+1$ integrali ellittici linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) ne contiene infiniti altri.

Nel caso $\mu=3$, come già abbiamo detto nell'introduzione, gl'infiniti integrali ellittici vengono rappresentati dai vertici della rete di Möbius che, sul piano rappresentativo K, è definita dai punti, a 3 a 3 indipendenti, imagini dei 4 integrali ellittici dati. Le rette della rete corrispondono a

sistemi regolari di 2 integrali riducibili con 4 periodi. Se a è una retta della rete, il corrispondente sistema ∞^1 contiene alla sua volta infiniti integrali ellittici, rappresentati dai vertici della rete che cadono su a. Tali vertici, come si sa, s'ottengono tutti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Nel caso di μ qualunque, potremo similmente dire che gl' infiniti integrali ellittici vengono coordinati ai vertici di *una rete di Möbius di specie* $\mu - 1$, *avente come base un gruppo di* $\mu + 1$ *punti a* μ *a* μ *indipendenti*. Le rette, i piani,..., gli $S_{\mu-2}$ della rete, rappresentano rispettivamente sistemi regolari di 2 integrali con 4 periodi, di 3 integrali con 6 periodi,..., di $\mu - 1$ integrali con $2(\mu - 1)$ periodi; e su ognuno degli spazî subordinati della rete, il quale abbia la dimensione k ($k = 1, 2, ..., \mu - 2$), resta subordinata una rete di Möbius di specie k, i cui elementi rappresentano sistemi regolari d'integrali riducibili. In particolare sopra una retta della rete si hanno, come prima, infiniti punti imagini d'integrali ellittici, i quali s'ottengono tutti da 3 di essi, mediante costruzioni di quarti armonici. Una tal totalità di punti si chiamerà brevemente *una rete di Möbius di specie 1*, avente come base una terna di punti (allineati).

Osservazione. — La dimostrazione esposta cade in difetto nel caso estremo $\mu = 2$, perchè allora lo spazio K riducesi ad una retta, su cui sono segnati 3 punti distinti u_1, u_2, u_3. E da questi non se ne possono dedurre altri, con operazioni interne di proiezione e di sezione. Tuttavia proveremo che anche in tal caso la varietà V possiede infiniti integrali ellittici, rappresentati dai punti della rete di Möbius di specie 1, definita da (u_1, u_2, u_3).

A tale scopo si operi l'ampliamento del sistema K, mediante proiezione di questo sistema da un integrale ellittico u_4 identico ad u_3 (n. 2), talchè la varietà Φ del n. prec., verrà in tal caso ad esser la varietà delle terne dei punti tolti da tre curve ellittiche $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, alle quali spettino rispettivamente tre integrali identici ad u_1, u_2, u_3. Il sistema ampliato ∞^2, B, contiene un sistema (identico a) K e un altro sistema ∞^1, L, congiungente u_3 ed u_4. Ed è evidente che ad L appartengono infiniti integrali ellittici, ottenibili tutti combinando linearmente u_3, u_4, mediante coefficienti interi (o razionali).

Se pertanto sul piano B, imagine di B, si segnano le rette K, L (le quali si incontrano in u_3), uno, u_5, degl' infiniti punti di L (diversi da u_3, u_4), che rappresentano integrali ellittici, costituirà insieme ad u_1, u_2, u_4 una quaderna d'integrali ellittici, e tre a tre indipendenti. Saremo perciò ricondotti al caso $\mu = 3$, e si concluderà che la retta K, appartenente alla rete definita da (u_1, u_2, u_4, u_5), contiene infiniti vertici della rete stessa, formanti una rete di Möbius di specie 1; il che dimostra appunto quanto abbiamo asserito.

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri*. Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Mostra l'esperienza che il movimento di un liquido, scorrente entro un tubo, può aver luogo in condizioni di regime, alquanto differenti fra loro: *il regime di Poiseuille* e *il regime idraulico.*

Se il liquido scorre molto lentamente in un tubo rettilineo, i filetti liquidi si mantengono sensibilmente paralleli alle pareti, senza mescolarsi gli uni cogli altri. È il *regime di Poiseuille.* Esso può caratterizzarsi analiticamente sfruttando le equazioni idrodinamiche di Navier per i liquidi viscosi, ridotte ai soli termini lineari, nelle componenti della velocità e loro derivate. Il regime di Poiseuille è stabile fino a che la velocità del liquido non passa un certo limite (*velocità critica*), di là del quale, esso è ancora possibile, ma cessa di essere stabile.

Considerazioni di omogeneità ad esperienze sistematiche hanno condotto Reynolds a ritenere che la velocità critica sia inversamente proporzionale al diametro del tubo e alla densità del liquido, e direttamente proporzionale al coefficiente di viscosità. In modo preciso, detti: ϱ la densità del liquido, k il coefficiente di viscosità, d il diametro di una sezione trasversale del tubo, V la velocità media nella sezione stessa, la instabilità del regime di Poiseuille incomincia a manifestarsi quando il rapporto (*rapporto di Reynolds*)

$$\frac{\varrho\, d \mathrm{V}}{\mathrm{k}}$$

assume un certo valore, che esperienze di Hagen, Couette e Reynolds stesso hanno concordemente stabilito eguale a circa 2000 in unità (C. G. S.). Detta V_c la velocità critica, si ha dunque sensibilmente

$$\mathrm{V}_c = 2000\, \frac{\mathrm{k}}{\varrho\, d}\,.$$

A partire da questa velocità, l'andamento regolare dei filetti — caratteristico del regime di Poiseuille — si modifica alquanto; questi tendono

a confondersi insieme e a diffondersi in tutta la massa liquida effluente nel tubo, per dar luogo infine al *regime idraulico*. Questo nuovo regime non si stabilisce immediatamente dopo V_c, ma a partire da una velocità superiore, cioè di circa $1,2\,V_c$. Per velocità comprese in questo intervallo, sono *a priori* possibili entrambi i regimi; ma sono entrambi instabili.

Trattandosi di moti *non più lenti*, per lo studio analitico del fenomeno più non è sufficiente di ricorrere alle equazioni di Navier, ridotte ai soli termini lineari.

È questa la principale circostanza per cui lo studio teorico dei moti turbolenti è appena abbozzato ([1]), e si è ancora in attesa di una soddisfacente giustificazione idromeccanica delle risultanze sperimentali.

Ciò premesso, veniamo alla questione che forma oggetto della presente Nota.

2. Si consideri un solido sferico, immerso in un liquido viscoso indefinitamente esteso. La sfera sia dotata di un moto rettilineo con velocità V; il suo moto si comunica alla massa fluida circostante.

Con qual legge?

Quando si tratta di una lenta traslazione del solido, a questa domanda risponde esaurientemente la classica soluzione di Stokes pel caso permanente, e una altrettanto esauriente soluzione nel caso, più generale, di una traslazione con velocità variabile ([2]).

L'elemento dinamico saliente che caratterizza, si può dire, il *regime di Stokes* è la resistenza opposta alla sfera dalla massa liquida, e il cui valore assoluto è — com'è ben noto — definito dalla formula

$$R = 6\pi a k V \qquad (a = \text{raggio della sfera}).$$

Per la trattazione analitica, ancor qui (come già per l'efflusso lento entro tubi), trattandosi di moti lenti, si è autorizzati ad usufruire delle equazioni di Navier, ridotte alla forma lineare.

Che cosa accade quando non si è più nel regime di Stokes? Quando cioè la velocità della sfera più non è lenta?

Dal punto di vista matematico, il problema esigerebbe l'integrazione delle equazioni di Navier, rigorose e non più approssimate. Ci si imbatte

([1]) Cfr. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklaerung des Turbolenten Fluessigkeitsbewegungen*. Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908, vol. III; Th. v. Karman und H. Rubach, *Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits-und Lufwiderstandes*, Physikalische Zeitscrift, 1912; Mises, *Kleine Schwingungen und Turbulenz*, Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung, B. XXI (1912); Föppl; *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder*, Münch. Sitzungberichte, 1913.

([2]) Cfr. Picciati, *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI (1907).

quindi nella stessa difficoltà accennata più sopra per lo studio dell'efflusso, non più lento, entro tubi [1].

Dal punto di vista fisico l'intuizione ci dice che deve accadere qualche cosa di analogo a ciò che si verifica per i liquidi scorrenti entro tubi. Ancor qui deve esistere oltre al regime tranquillo (di Stokes), un regime idraulico, e una *velocità critica* della sfera che segna il termine della stabilità di un regime e l'inizio della preparazione ad un nuovo regime.

Scopo della presente Nota è di mostrare, con considerazioni elementari suggerite dai criterî di omogeneità, che queste previsioni trovano una giustificazione teorica.

Tali considerazioni farebbero anzi prevedere la possibilità dell'esistenza di un terzo regime. In modo preciso, i tre regimi sarebbero caratterizzati dal diverso comportamento della resistenza, quale risulta dalle formule seguenti:

$$R_1 = \varphi a k V ,$$

$$R_2 = \psi \varrho a^2 V^2 ,$$

$$R_3 = \chi \frac{k^2}{\varrho} ,$$

dove φ , ψ , χ dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds:

$$\sigma = \frac{\varrho a V}{k} .$$

Il primo regime corrisponde ad una resistenza proporzionale alla velocità, al raggio della sfera ed al coefficiente di viscosità: è il *regime di Stokes*.

Nel secondo regime — *regime idraulico* — la resistenza varia in proporzione al quadrato della velocità e alla superficie del solido.

Nel terzo regime la resistenza risulta proporzionale al quadrato del coefficiente di viscosità.

Il presentarsi dell'uno o dell'altro di questi regimi, quasi certamente dipende ancor qui — come già nell'efflusso entro tubi — dal valore del rapporto σ di Reynolds.

Il terzo regime (che analoghe considerazioni di omogeneità mettono in luce anche per i liquidi scorrenti entro tubi) non è stato messo in evidenza nelle esperienze di Reynolds. Non è però improbabile che il suo posto spetti a quell'intervallo V_c, $1.2\,V_c$ in cui è stata constatata l'instabilità dei due primi regimi.

[1] Per tentativi di soluzioni approssimate, a partire da quelli di Stokes, cfr. Noether, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel.* Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 62 (1913); Oseen, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokessehen Widerstandsformel.* Ark. f. Mat. Astr. och. Fysik 9, n. 16, (1913).

Agli esperimentatori spetta di assodare fino a qual punto le previsioni teoriche trovino conferma nella realtà.

3. Il valore assoluto R della resistenza opposta dalla massa liquida alla traslazione della sfera, sarà, in generale, dipendente dalla densità ϱ e dalla viscosità k del liquido, nonchè dal raggio a e dalla velocità V della sfera. Ciò si può mettere in rilievo, scrivendo:

$$\text{(1)} \qquad R = f(\varrho, k, a, V),$$

f designando la incognita legge di dipendenza.

Se si tengono presenti le dimensioni delle cinque quantità fisiche che entrano nella (1), e che, per comodo del lettore, mettiamo in evidenza mediante le rispettive equazioni maxwelliane di dimensioni:

$$[R] = lt^{-2}m\,;\ [\varrho] = l^{-3}m\,;\ [k] = l^{-1}t^{-1}m\,;\ [a] = l\,;\ [V] = lt^{-1}$$
$$(l = \text{lunghezze};\ t = \text{tempi};\ m = \text{masse}),$$

si ottiene da (1), dividendo le lunghezze per λ, i tempi per τ e le masse per μ,

$$\text{(2)} \qquad R = f(\lambda^3\mu^{-1}\varrho, \lambda\tau\mu^{-1}k, \lambda^{-1}a, \lambda^{-1}\tau V)\,.\,\lambda\tau^{-2}\mu\,.$$

Come si vede, la f dipende dai quattro argomenti

$$\lambda^3\mu^{-1}\varrho\,;\ \lambda\tau\mu^{-1}k\,;\ \lambda^{-1}a\,;\ \lambda^{-1}\tau V,$$

che si possono rendere puri numeri. Per ciò è necessario e basta che λ, τ, μ vengano fissati in modo che tre degli argomenti anzidetti sieno puri numeri, i quali, senza togliere nulla alla generalità, possiamo assumere $= 1$. Questo si può raggiungere in quattro modi distinti. Si richiede cioè che λ, τ, μ soddisfino ad uno dei quattro sistemi di equazioni seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \lambda\tau\mu^{-1}k = \lambda^{-1}a = \lambda^{-1}\tau V = 1\,;$$
$$\text{(II)} \qquad \lambda^{-1}a = \lambda^{-1}\tau V = \lambda^3\mu^{-1}\varrho = 1\,;$$
$$\text{(III)} \qquad \lambda^{-1}\tau V = \lambda^3\mu^{-1}\varrho = \lambda\tau\mu^{-1}k = 1\,;$$
$$\text{(IV)} \qquad \lambda^3\mu^{-1}\varrho = \lambda\tau\mu^{-1}k = \lambda^{-1}a = 1\,.$$

Queste dànno, rispettivamente, per soluzioni:

$$(\text{I}_1) \qquad \lambda = a\,,\quad \tau = aV^{-1}\,,\quad \mu = a^2V^{-1}k\,;$$
$$(\text{II}_1) \qquad \lambda = a\,,\quad \tau = aV^{-1}\,,\quad \mu = a^3\varrho\,;$$
$$(\text{III}_1) \qquad \lambda = \varrho^{-1}kV^{-1}\,,\quad \tau = \varrho^{-1}kV^{-2}\,,\quad \mu = \varrho^{-2}k^3V^{-3}\,;$$
$$(\text{IV}_1) \qquad \lambda = a\,,\quad \tau = a^2\varrho k^{-1}\,,\quad \mu = a^3\varrho\,.$$

Per queste, la (2) diviene rispettivamente:

$$(3)\qquad \begin{cases} R_1 = f_1\, akV \,, \\ R_2 = f_2\, \varrho a^2 V^2 \,, \\ R_3 = f_3\, \dfrac{k^2}{\varrho} \,, \\ R_4 = f_4\, \dfrac{k^2}{\varrho} \,, \end{cases}$$

avendo posto per brevità:

$$f_1 = f\left(\frac{\varrho a V}{k}\,,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_2 = f\left(1\ ,\frac{k}{\varrho a V}\,,\ 1\ ,\ 1\right),$$

$$f_3 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\frac{\varrho a V}{k}\,,\ 1\right),$$

$$f_4 = f\left(1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\frac{\varrho a V}{k}\right).$$

Come si vede, i quattro coefficienti, puramente numerici, f_1, f_2, f_3, f_4, dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds

$$\sigma = \frac{\varrho a V}{k}\,.$$

Matematica. — *Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles.* Nota di ÉMILE COTTON, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans un fort intéressant Mémoire « *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire* » (Annales de l'École normale, 3ᵉ série, tom. 28, 1911) M. T. Levi-Civita a posé la question de l'existence de ce qu'il appelle un *moyen mouvement asymptotique* pour les solutions de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d\theta}{dt} = f(\theta\,, t)$$

dont le second membre est une fonction régulière (au point de vue du théorème de Cauchy-Lipschitz) périodique par rapport à θ et par rapport à t: il s'agit de savoir si l'on peut trouver un nombre μ tel que toute solution $\theta = \varphi(t)$ de (1) puisse se mettre sous la forme $\varphi(t) = \mu t + \varepsilon(t)$, ε restant borné pour toutes les valeurs de t.

La réponse est affirmative: M. Levi-Civita l'a démontré dans un cas particulier (Mémoire cité, chap. 2) et M. E. E. Levi dans le cas général (Comptes-Rendus, 1911, tom. 153, pag. 799).

La même question, sous une forme bien différente, avait été résolue par H. Poincaré, dans le chapître XV de son célèbre Mémoire « *Sur les courbes définies par les équations différentielles* » (Journal de mathématiques, 4ème sér. tom. 1., 1885, p. 220).

De plus, l'illustre géomètre a mis en évidence les relations entre les solutions périodiques de (1) et le nombre μ, et a proposé l'étude de ce nombre considéré comme fonction des coefficients de l'équation (1).

La présente Note se rapporte à ces derniers problèmes; son principal objet est une représentation géométrique mettant en évidence l'intérêt du nombre μ pour l'étude de la distribution des diverses solutions périodiques d'une équation

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{F}(\theta, t, \lambda), \tag{2}$$

de même nature que (1), mais dont les coefficients dépendent d'un paramètre variable λ.

1. — Revenons d'abord à l'équation (1), dont nous supposons le second nombre entièrement déterminé. On peut admettre que les périodes de $f(\theta, t)$ par rapport à θ et par rapport à t sont égales à 2π.

Nous représentons géométriquement les solutions de (1) par des caractéristiques tracées dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ot, $O\theta$. Ces caractéristiques s'échangent entre elles par les transformations du groupe discontinu G constitué par les translations amenant l'origine O aux points dont les deux coordonnées sont des multiples de 2π.

La caractéristique passant par le point A_0 (O, α) de l'axe $O\theta$ rencontre la droite $t = 2n\pi$ en un point A_n; le coefficient angulaire $m_n(\alpha)$ de la droite $A_0 A_n$, joue dans la suite un rôle important.

La démonstration, donnée par H. Poincaré, de l'existence du moyen mouvement asymptotique μ montre que $m_n(\alpha)$ et μ ont même valeur approchée à $\frac{1}{n}$ près par défaut.

Si μ est un nombre rationnel $\frac{r}{s}$, il existe des solutions telles qu'on ait: $\varphi(t) + 2r\pi = \varphi(t + 2s\pi)$.

Ces solutions sont donc des *solutions périodiques*, le mot étant entendu au sens large que lui a donné H. Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. I, p. 80); parmi les caractéristiques correspondantes, il en est qui admettent les transformations d'un sous-groupe de G. Toutes les solutions peuvent être périodiques; s'il en est de non périodiques, elles sont asymptotes à une solution pério-

dique. Avec la représentation des caractéristiques sur un tore dont H. Poincaré fait usage, il correspond un cycle à une solution périodique, et un cycle limite à une solution périodique isolée. Réciproquement si (1) admet une solution périodique, μ est rationnel.

2. — Considérons maintenant l'équation (2), dont les coefficients dépendent du paramètre λ. Nous supposerons que si λ varie dans un intervalle, d'où nous ne le ferons pas sortir, cette équation jouit des mêmes propriétés que l'équation (1). Nous admettrons même que $F(\theta, t, \lambda)$ est une *fonction analytique.*

La caractéristique issue du point $A_0(O, \alpha)$ coupe la droite $t = 2n\pi$ (n entier) en un point appelé plus haut, A_n, qui varie maintenant avec λ; désignons donc par $m_n(\alpha, \lambda)$ le coefficient angulaire de la droite $A_0 A_n$. *Nous représenterons la variation de* $m_n(\alpha, \lambda)$ *par une surface* S_n dont l'équation, rapportée à trois axes rectangulaires $O\alpha, O\lambda, Oz$, sera $z = m_n(\alpha, \lambda)$.

Cette surface se transforme en elle même par la translation parallèle à $O\alpha$ d'amplitude 2π. C'est d'ailleurs une surface analytique, ainsi que le montre un théorème de Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. 1, pag. 58). Si le plan $z = \frac{p}{n}$ (p étant entier) coupe la surface S_n suivant une ligne réelle C_{pn}, cette courbe est une ligne analytique. À chacun de ses points correspond un système de valeurs de α et de λ, une équation (2) et une caractéristique bien déterminées; cette caractéristique admet l'une des transformations de G: elle correspond donc à une solution périodique pour laquelle le moyen mouvement asymptotique $\mu = \frac{p}{n}$.

D'ailleurs, lorsque $p = O$, la courbe C_{pn} en question est identique à celles considérées par Poincaré dans la recherche des solutions périodiques (au sens restreint du mot) de l'équation (2).

En même temps que la surface S_n, nous considérerons la surface Σ définie par $z = \mu(\lambda)$, qui représente la variation du moyen mouvement asymptotique en fonction de λ et de α. Comme il ne dépend pas de α, cette surface est cylindrique, les génératrices sont parallèles à $O\alpha$.

La distance des deux points de rencontre de S_n et de Σ avec une même parallèle à Oz est inférieure à $\frac{1}{n}$; la surface analytique S_n tend donc uniformément vers Σ lorsque $\frac{1}{n}$ tend vers zéro; $\mu(\lambda)$ est donc une fonction continue, comme Poincaré l'avait annoncé; mais n'est pas nécessairement analytique.

Ainsi, pour l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \lambda \cos \theta ,$$

qui s'intègre immédiatement, $\mu(\lambda)$ est égal à $\sqrt{1-\lambda^2}$ pour $|\lambda|<1$; il est nul pour $|\lambda|>1$: La section droite de la surface cylindrique se compose d'un demi-cercle et des deux prolongements du diamètre qui le limite.

Toute ligne C_{pn} est située sur Σ; si elle n'est pas formée de parallèles à l'axe $O\alpha$, il lui correspond une ou plusieurs bandes B_{pn} du plan $z=\frac{p}{n}$ limitées par des parallèles à cet axe et faisant partie de Σ. Réciproquement, à une telle bande, située sur un plan $z=\frac{p}{n}$ de cote rationnelle, il correspond nécessairement une courbe C_{pn} et une famille de solutions périodiques. Il peut arriver que C_{pn} soit composée de parallèles à l'axe $O\alpha$; il n'y a plus lieu de parler de bandes B_{pn}, leur largeur étant alors nulle.

L'existence de lignes C_{pn} ainsi constituées, qui paraît si vraisemblable au premier abord, est-elle une conséquence nécessaire de ce qui précède? je ne saurais le dire. Mais, par contre, il est bien évident qu'il existe des bandes B_{pn} aussi étroites qu'on le veut (c'est à dire que la différence des valeurs extrêmes de λ correspondant à la bande, est arbitrairement petite). On écarte, bien entendu, le cas où le moyen mouvement asymptotique resterait constant dans l'intervalle de variation de λ.

Les valeurs μ_0 et μ_1 de $\mu(\lambda)$ pour $\lambda=\lambda_0$ et $\lambda=\lambda_1$, étant supposées différentes, soit, pour fixer les idées, $\mu_0<\mu_1$.

La surface analytique S_n coupe les plans $\lambda=\lambda_0$ et $\lambda=\lambda_1$ suivant des courbes Γ et Γ_1. Pour tous les points de Γ_0 on a $z<\mu_0+\frac{1}{n}$ et, pour ceux de Γ_1, $z>\mu_1-\frac{1}{n}$; et si n est assez grand, il existe un entier p tel que

$$\mu_0-\frac{1}{n}<\frac{p}{n}<\mu_1+\frac{1}{n}.$$

Coupons alors S_n par un plan $\alpha=$ constante: l'intersection coupe le plan $z=\frac{p}{n}$. Il existe alors des solutions périodiques pour lesquelles les nombres r et s du n° 1 sont égaux à p et à n, et pour lesquelles la valeur initiale de θ a une valeur arbitrairement donnée à l'avance.

Il suffit de connaître (d'une façon exacte ou suffisamment approchée) une solution de chacune des équations particulières obtenues en remplaçant dans (2) *λ par λ_0 et par λ_1, pour pouvoir s'assurer que les valeurs correspondantes, μ_0 et μ_1, du moyen mouvement asymptotique μ, sont différentes.*

S'il en est ainsi, on pourra, en résumé, affirmer l'existence d'une infinité de familles à un paramètre de solutions périodiques, pour l'équation générale (2). *Parmi celles-ci il en est qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de familles où toutes les solutions sont périodiques, quelles que soient les valeurs initiales de ces solutions.*

Meccanica. — *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività.* Nota della sign.[na] Clarice Munari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota I di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sia P un punto materiale libero. I suoi movimenti sotto l'azione di una forza perpendicolare alla velocità, in un mezzo che loro opponga una resistenza viscosa (idraulica), sono caratterizzati dal fatto che, in un intervallo di tempo non nullo qualunque, la perdita unitaria di forza viva (1) è positiva e dipende solamente dalla durata dell'intervallo (dal cammino percorso da P).

Questa è l'osservazione che, convenientemente generalizzata prendendo in esame il movimento di un qualunque sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, forma il soggetto della Nota presente e di un'altra che le farà immediatamente seguito.

1. Sia S un sistema olonomo con n gradi di libertà a vincoli indipendenti dal tempo e privi di attrito. Indicando con $\mathfrak{T}$ la forza viva, con $q_1, q_2, \dots, q_n$ le coordinate lagrangiane, le equazioni del moto saranno

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} = Q_h\,, \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

ove si rappresenti con Q_h la forza secondo la coordinata lagrangiana q_h (che in generale sarà funzione di t, delle q e delle $\dot{q}$).

Di più, poichè si suppongono i vincoli indipendenti dal tempo, $\mathfrak{T}$ risulterà una forma quadratica delle $\dot{q}$ (definita e positiva)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s$$

(1) Naturalmente, per perdita unitaria di forza viva relativa ad un intervallo di tempo, intendo il quoziente tra la differenza dei valori iniziale e finale della forza viva, e il valore iniziale della forza viva stessa.

a coefficienti dipendenti dalle sole q, e varrà l'equazione della forza viva

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \sum_1^n {}_h Q_h \dot{q}_h , \tag{1}$$

che dà, come conseguenza immediata,

$$\frac{d \log \mathfrak{T}}{dt} = \frac{\sum_1^n {}_h Q_h \dot{q}_h}{\mathfrak{T}} .$$

Se ne deduce, posto

$$P_{t,\tau} = \frac{\mathfrak{T}_t - \mathfrak{T}_{t+\tau}}{\mathfrak{T}_t} ,$$

detta cioè $P_{t,\tau}$ la perdita unitaria di forza viva nell'intervallo di tempo $(t, t+\tau)$:

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{\int_t^{t+\tau} \frac{\sum_1^n {}_h Q_h \dot{q}_h}{\mathfrak{T}} dt} . \tag{2}$$

2. Per esporre nel modo più semplice ed espressivo l'osservazione da cui deriva la presente Nota, ci sarà conveniente di contrassegnare con opportune denominazioni due speciali tipi di dipendenza (delle Q dalle $\dot{q}$, cioè) delle forze attive su S dall'atto di movimento.

Diremo che il sistema delle forze attive su S:

1°) *è perpendicolare all'atto di movimento* quando, qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, si ha

$$\sum_1^n {}_h Q_h \dot{q}_h = 0 ; \tag{3}$$

2°) *deriva da una resistenza di mezzo* quando sia

$$Q_h = - f(\mathfrak{T}) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} , \qquad (h = 1, 2, \dots n) \tag{4}$$

ove $f(\mathfrak{T})$ è una funzione della forza viva di S sempre positiva per $\mathfrak{T} > 0$. In questo secondo caso chiameremo $f(\mathfrak{T})$ la funzione caratteristica della resistenza di mezzo.

Ambedue le denominazioni introdotte si presentano come naturali estensioni di denominazioni di uso corrente quando si pensi alla rappresentazione del moto di S mediante il moto di un punto P (di coordinate $q_1, q_2, \dots, q_n$) in un S_n, a fondamento della cui metrica sia posta la forma differenziale quadratica (definita e positiva)

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dq_r dq_s .$$

Per la prima denominazione la cosa appare senz'altro evidente: rispetto poi alla seconda, è forse il caso di rilevare esplicitamente che, quando si richieda che le Q risultino proporzionali alle $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}}$, i valori forniti per esse dalle (4) sono i più generali cui corrisponda in qualunque atto di movimento del sistema una potenza essenzialmente negativa, e di grandezza dipendente solo dalla grandezza della forza viva di S.

3. Ciò premesso, supponiamo che il sistema delle forze attive su S risulti di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo: cioè sia

$$Q_h = Q_h^* - f(\mathfrak{T}) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

ove le Q_h^*, qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, soddisfino la relazione

$$\sum_1^n {}_h \, Q_h^* \dot{q}_h = 0.$$

Posto

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{T}) \, dt,$$

avremo allora, per la (2),

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-I_{t,\tau}}, \tag{5}$$

cioè $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$ [1]:

Supponiamo, viceversa, che nel moto di S, $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$:

$$P_{t,\tau} = \mathfrak{F}(I_{t,\tau}).$$

In questa ipotesi, derivando rispetto a τ, otteniamo, qualunque sia τ;

$$\frac{d}{dt} P_{t,\tau} = -\frac{1}{\mathfrak{T}_t} \frac{d}{dt} \mathfrak{T}_{t+\tau} = \mathfrak{F}'(I_{t+\tau}) \, f(\mathfrak{T}_{t+\tau});$$

[1] Sulla traccia del procedimento seguito nella Nota del Levi-Civita: *Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità* (Atti del R. Istituto Veneto, serie VII, tomo VII), sarebbe facile di convincersi che la (5) è una diretta conseguenza del fatto che le equazioni del moto di S, in assenza del sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, si possono ricavare dalle equazioni del moto libero dello stesso S, mediante il cambiamento di variabile indipendente

$$dt_1 = e^{-\int f(\mathfrak{T}) \, dt} dt,$$

ove t_1 rappresenti il tempo pel moto libero, e t il tempo pel moto soggetto al sistema di forze derivante dalla resistenza di mezzo di funzione caratteristica $f(\mathfrak{T})$.

e in particolare per $\tau = 0$ (scrivendo per semplicità, secondo il solito, $\mathfrak{T}$ al posto di $\mathfrak{T}_t$),

$$(6) \qquad \frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -kf(\mathfrak{T}),$$

ove si rappresenti con k il valore, necessariamente positivo [1], di $\mathcal{F}'(0)$.

Confrontando la (6) colla (1) si ottiene

$$\sum_1^n {}_h\, Q_h\, \dot{q}_h = -kf(\mathfrak{T})\,\mathfrak{T}\,.$$

Se allora poniamo

$$Q_h = Q_h^\star - kf(\mathfrak{T})\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dot{q}_h}\,, \qquad (h\,,1\,,2\,,\dots n)$$

subito troviamo che in qualunque atto di movimento del sistema, cioè qualunque siano t, le q e le $\dot{q}$, dovrà risultare

$$\sum_1^n {}_h\, Q_h^\star\, \dot{q}_h = 0\,.$$

Possiamo dunque concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S *risulti di un sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo, è che esista una funzione* $f(\mathfrak{T})$ *della forza viva del sistema, sempre positiva per* $\mathfrak{T} > 0$ *e tale che, posto*

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{T})\,dt\,,$$

$P_{t,\tau}$ *risulti funzione di* $I_{t,\tau}$ *solamente, positiva per* $I_{t,\tau} > 0$. *In tale ipotesi, la* $f(\mathfrak{T})$ *coinciderà, a meno di una costante moltiplicativa, colla funzione caratteristica della resistenza di mezzo.*

[1] Essendo

$$\mathcal{F}(0) = P_{t\,,\,0} = 0\,,$$

l'ipotesi che sia

$$\mathcal{F}(I_{t\,,\,\tau}) > 0$$

per

$$I_{t\,,\,\tau} > 0$$

porta di conseguenza che $\mathcal{F}'(0)$ non può risultare negativa. D'altra parte non può risultare nulla, perchè allora, per la (6), sarebbe $\mathfrak{T} = \text{cost}$, e, in conseguenza, $P_{t,\tau} = 0$, qualunque fosse τ. Sarà dunque, necessariamente,

$$\mathcal{F}'(0) > 0\,.$$

Matematica. — *Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali.* Nota del dott. LUCIO SILLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le ultime ricerche del prof. Lauricella, intorno ai sistemi di funzioni ortogonali, all'equazione integrale di prima specie e alle funzioni permutabili del prof. Volterra, avendo dato luogo di recente a notevoli lavori (1), saranno, a nostro avviso, feconde di nuovi ed importanti risultati, sopratutto se taluno, interpretando il comune desiderio, ne agevolerà al più presto lo studio ripubblicandole in una Memoria riassuntiva che il compianto Autore non ebbe agio di fare.

Ci proponiamo, per ora, di mostrare che la teoria stabilita nella Nota *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.* (2) permette, come il Lauricella stesso affermava nel proemio, di trovare utili applicazioni per gli sviluppi delle funzioni in serie di funzioni ortogonali e per la risoluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti.

1. Sia

$$(\Phi) \qquad \varphi_1(x)\,,\, \varphi_2(x)\,, \dots ,\, \varphi_i(x)\,, \dots$$

un sistema finito o infinito (numerabile) di funzioni ortogonali in un certo intervallo (ab); le $\varphi_1(x)\,,\,\varphi_2(x)\,,\dots$ siano, cioè, sommabili (integrabili, nel senso del Lebesgue) insieme con i loro quadrati e con i loro prodotti due a due in quell'intervallo, e tali che si abbia:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 \,\dots\dots\, i \neq j \\ 1 \,\dots\dots\, i = j \end{cases}.$$

Il sistema Φ è detto *chiuso* se le equazioni integrali:

$$(1) \qquad \int_a^b \theta(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0\,, \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,\dots)$$

non ammettono alcuna *soluzione effettiva* $\theta(x)$, cioè non sono eventualmente soddisfatte che da funzioni $\theta(x)$ diverse dallo zero tutto al più in un insieme

(1) Cfr., per esempio, le Note: del prof. E. Daniele, *Sui nuclei che si riproducono per iterazione* [Rendic. del Circolo mat. di Palermo, tom. XXXVII (1914), pp. 262-266]; e del prof. C. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5a, tom. XXIII (1914), pp. 219-225].

(2) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5a, tom. XXI (1912), pp. 675-685.

di punti di misura nulla. Se, invece, esistono soluzioni effettive delle equazioni (1), il sistema Φ sarà detto *aperto* (¹).

Nel caso di un sistema Φ aperto, il Lauricella ha dimostrato (²) che si può sempre, ed in un modo solo, costruire un sistema finito, o infinito e numerabile, di funzioni ortogonali:

$$(M) \qquad \mu_1(x)\,,\, \mu_2(x)\,,\, \ldots\,,\, \mu_i(x)\,,\, \ldots\,,$$

che egli ha chiamato *sistema complementare* di Φ, in guisa che il sistema totale che ne risulta:

$$\Omega = \Phi + M = \varphi_1(x)\,,\, \varphi_2(x)\,,\, \ldots\,,\, \mu_1(x)\,,\, \mu_2(x)\,,\, \ldots$$

sia ortogonale e chiuso.

2. Gioverà ora richiamare un teorema che ha una speciale importanza per le questioni che interessano i sistemi di funzioni ortogonali e la soluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti, e che si può denominare di *Fischer-Weyl* (³).

Sia proposta la successione:

$$(2) \qquad f_1(x)\,,\, f_2(x)\,,\, \ldots$$

di funzioni sommabili nell'intervallo (ab) insieme con i loro quadrati: diremo che quella successione è *convergente in media* se si ha:

$$\lim_{m\,,\,n \equiv \infty} \int_a^b \{ f_m(x) - f_n(x) \}^2 \, dx = 0\,.$$

Diremo poi che la successione (2) *converge in media verso la funzione* $f(x)$, se è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{s \equiv \infty} \int_a^b \{ f(x) - f_s(x) \}^2 \, dx = 0\,.$$

Ciò premesso, il teorema di Fischer-Weyl si può enunciare così: Se la successione (2) è convergente in media, è sempre possibile (ed in infiniti modi diversi) estrarre dalla (2) una successione parziale:

$$(3) \qquad f_{n_1}(x)\,,\, f_{n_2}(x)\,,\, f_{n_3}(x)\,,\, \ldots\,,$$

(¹) Per maggiore esattezza di terminologia, preferiamo adottare questa locuzione in luogo dell'altra *non chiuso*.

(²) Nella Nota precedentemente citata: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.*

(³) Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, tom. CXLIV, 1° sem., 1907, pp. 1022-1024); H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* (Math. Ann., tom. LXVII, 1909, pp. 225-245) e G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei. serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

dove $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sono numeri interi, positivi e crescenti, la quale converge *uniformemente in generale* (¹) nell' intervallo (ab) verso un' unica funzione $f(x)$ determinata in tutto (ab) (eccetto, al più, i punti di un insieme di misura nulla) e sommabile col suo quadrato in quell' intervallo. Inoltre la successione (2) converge in media verso la funzione $f(x)$, e si può pure scrivere:

$$f(x) = f_{n_1}(x) + [f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)] + [f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)] + \cdots \tag{4}$$

3. Teorema I: *se* $F(x)$, *come pure il suo quadrato e il suo prodotto per una qualunque delle funzioni* $\varphi(x)$ *del sistema* Φ, *sono funzioni sommabili nell'intervallo* (ab), *e se, inoltre,* Φ *è un sistema chiuso, è sempre possibile sviluppare* $F(x)$ *in una serie di funzioni* $\varphi(x)$ *che converge uniformemente in generale nell'intervallo* (ab), *secondo il teorema di Fischer-Weyl.*

Ci limiteremo soltanto ad indicare la dimostrazione di questo teorema, rinviando per i particolari ad una precedente Nota (²).

Siano:

$$a_i = \int_a^b F(x)\, \varphi_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

i cosidetti *coefficienti di Fourier* della funzione $F(x)$ relativi alla successione Φ; posto:

$$f_j(x) = \sum_1^j {}_i\, a_i\, \varphi_i(x), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

si dimostra che la successione (5) è convergente in media; quindi, per il teorema di Fischer-Weyl, la successione convergerà in media verso una unica funzione $F_1(x)$ tale che, applicando la formola (4), si potrà scrivere:

$$F_1(x) = \sum_1^{n_1} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots,$$

dove, beninteso, la serie del secondo membro è uniformemente convergente in generale nell' intervallo (ab) considerato.

Ora, poichè:

$$\int_a^b F_1(x)\, \varphi_i(x)\, dx = a_i,$$

(¹) È una locuzione del Weyl; s'intende che, indicata con ε una quantità positiva ad arbitrio, la successione (3) convergerà in egual grado in un intervallo C_ε (appartenente ad (ab) e la cui misura non è inferiore a b-a-ε) verso una funzione $f(x)$.

(²) Cfr. la nostra Nota: *Sulla propagazione del calore* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XXI, 1912, pp. 441-447).

sarà:

$$\int_a^b \{ F(x) - F_1(x) \} \varphi_i(x)\, dx = 0 ;$$

quindi $F(x) = F_1(x)$, essendo Φ un sistema ortogonale chiuso.

4. Teorema II. *Se* $F(x)$ *è una funzione che soddisfa alle condizioni enunciate nel precedente teorema e, dippiù, il suo prodotto per una qualunque delle funzioni* $\mu(x)$ *del* **sistema** M, *complementare del sistema* Φ, *è* **sommabile** *nell'intervallo* (ab); *se, inoltre,* Φ *è un sistema ortogonale aperto, la condizione necessaria e sufficiente affinchè* $F(x)$ *sia* **sviluppabile** *in serie di funzioni* $\varphi_i(x)$, *uniformemente convergente in generale nell'intervallo* (ab), *a norma del teorema* **di** *Fischer-Weyl, è che si abbiano*:

$$\int_a^b F(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0 . \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Supponiamo, pertanto, che si sia trovato:

$$F(x) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots \tag{7}$$

dove le a_i sono i coefficienti di Fourier di $F(x)$ rispetto alle funzioni $\varphi_i(x)$ del sistema Φ ed $n_1, n_2, \ldots$ indicano numeri interi, positivi e crescenti: la serie del secondo membro è, inoltre, supposta convergente uniformemente in generale nell'intervallo (ab). Moltiplicando ambi i membri della (7) per $\mu_j(x)$ e integrando per serie, fra i limiti a e b, si ha:

$$\int_a^b F(x)\, \mu_j(x)\, dx = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i \int_a^b \mu_j(x)\, \varphi_i(x)\, dx + \cdots = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

giacchè si è tenuto conto che le funzioni $\varphi_i(x)$ e $\mu_j(x)$ costituiscono un unico sistema ortogonale (n. 1).

Dunque la condizione (6) è necessaria.

Ci rimane da provare che quella condizione è sufficiente, vale a dire che, supposto siano soddisfatte le (6), la $F(x)$ è suscettibile dello sviluppo (7). Costruiamo, a tal uopo, la successione seguente:

$$\varpi_1(x), \varpi_2(x), \ldots, \varpi_j(x) = \sum_1^{j}{}_i\, a_i\, \varphi_i(x), \ldots :$$

si dimostra, con un metodo già noto [1], che questa è convergente in media;

[1] Cfr. la nostra Nota già citata.

quindi, pel teorema di Fischer-Weyl, esisterà una funzione $G(x)$ verso la quale la successione convergerà in media, e tale che si avrà:

$$G(x) = \sum_{1}^{n_1} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots \text{ (}^1\text{)}: \tag{8}$$

la serie del secondo membro converge, inoltre, uniformemente in generale nell' intervallo (ab).

Ora, integrando per serie, dalla (8), si ottiene:

$$\int_a^b G(x)\, \varphi_j(x)\, dx = a_j .$$

E, poichè si è posto:

$$\int_a^b F(x)\, \varphi_j(x)\, dx = a_j ,$$

risulterà:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\}\, \varphi_j(x)\, dx = 0.$$

D'altra parte, dalla (8), moltiplicando per $\mu_j(x)$ e integrando per serie fra a e b, abbiamo, a causa della ortogonalità del sistema $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{M}$

$$\int_a^b G(x)\, \mu_j(x)\, dx = 0 .$$

Ma, per ipotesi, sussistono la (6); dunque avremo pure:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\}\, \mu_j(x)\, dx = 0.$$

Ora, poichè $\boldsymbol{M}$ è il sistema complementare di $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{M}$ è un sistema chiuso e dobbiamo perciò concludere che $F(x) = G(x)$.

5. I risultati precedenti trovano utili applicazioni nell'equazione integrale di prima specie:

$$g(x) = \int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy , \tag{9}$$

dove $g(x)$ è una funzione data, $K(x, y)$ è il *nucleo dell' equazione integrale*, pur esso noto, e $h(y)$ è la funzione incognita. Come è noto, per la teoria dello Schmidt ([2]), esiste una serie finita od infinita (numerabile) di coppie di funzioni ortogonali

$$\varphi_1(x)\ , \psi_1(y)\ ;\ \varphi_2(x)\ , \psi_2(y)\ ; \ldots$$

([1]) S'intende che i numeri $n_1, n_2 \ldots$ non sono propriamente quelli della formola (7).

([2]) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (Math. Ann., tom. 63, 1907, pp. 433-476).

tali che:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, y)\, \psi_i(y)\, dy \quad , \quad \psi_i(y) = \lambda_i \int_a^b K(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx ,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ costituiscono una successione di costanti positive che, se infinita, ha il solo punto limite $\lambda \equiv \infty$.

Ora se il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle x, se cioè il sistema Φ è aperto, talchè le equazioni integrali (1) ammettono soluzioni $\theta(x)$ effettive, per l'esistenza di una soluzione della (9) debbono essere soddisfatte due condizioni [1]: *a*) che la serie $\sum_1^\infty {}_i\, a_i^2 \lambda_i^2$ converga, essendo:

$$a_i = \int_a^b g(x)\, \varphi_i(x)\, dx ;$$

b) che $g(x)$ sia sviluppabile in serie di funzioni $\varphi_i(x)$ con i coefficienti a_i. Ebbene, in base al teorema II (n. 4) possiamo sostituire alla condizione (*b*) l'altra, in modo cioè che si abbia:

$$\text{(10)} \qquad \int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

dove le $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots$ costituiscono il sistema complementare di Φ.

6. Il Lauricella ha dimostrato [2] che, alla condizione (*b*) si può sostituire l'altra equivalente:

$$\text{(11)} \qquad \int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = 0 ,$$

che deve essere soddisfatta da tutte le funzioni $\theta(x)$ che sono soluzioni delle (1). Ora è facile dimostrare che le condizioni (10) e (11) sono sostituibili l'una all'altra. Infatti, se sussistono le (10) possiamo scrivere (n. 4), che

$$g(x) = \sum_1^{n_1} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_i\, a_i\, \varphi_i(x) + \cdots ;$$

donde, moltiplicando per $\theta(x)$, e integrando per serie fra a e b, risulta:

$$\int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = \sum_1^{n_1} {}_i\, a_i \int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx + \cdots = 0 ,$$

giacchè $\theta(x)$ è, per ipotesi, una soluzione effettiva di (1).

[1] Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XVIII, 1909, pp. 71-75).

[2] Nella Nota ora citata.

Reciprocamente: siano verificate le (11), per ogni funzione $\theta(x)$ che sia soluzione effettiva delle (1). In tal caso, posto:

$$k_i = \int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx \,,$$

si deve avere:

$$\theta(x) = \sum_1^{n_1}{}_i\, k_i\, \mu_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, k_i\, \mu_i(x) + \cdots;$$

donde, moltiplicando per $g(x)$, e integrando per serie, si avrà:

$$0 = \int_a^b g(x)\, \theta(x)\, dx = \sum_1^{n_1}{}_i\, k_i \int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx + \cdots$$

Dunque deve essere:

$$\int_a^b g(x)\, \mu_i(x)\, dx = 0\,. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Risulta, pertanto, chiaramente spiegato perchè la condizione (b) e la (11) sono sostituibili l'una all'altra: esse, infatti, equivalgono entrambe all'unica condizione (10).

7. Vogliamo, da ultimo, fare un'osservazione relativa all'equazione integrale di prima specie (9).

Se il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle x, occorre che le condizioni (a) e (b) siano soddisfatte per l'esistenza di una soluzione $h_1(y)$ della (9) e allora si ha [1]:

$$h_1(y) = \sum_1^{n_1}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(y) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_i\, a_i\, \lambda_i\, \psi_i(y) + \cdots \qquad \left(a_i = \int_a^b g(x)\, \varphi_i(x)\, dx\right)$$

La soluzione $h_1(y)$ sarà poi *unica* solo nel caso in cui il nucleo $K(x, y)$ risulti *chiuso rispetto alle* y [2].

Se, invece, il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle y; se, cioè, vi sono soluzioni effettive $\varrho(y)$ dell'equazione:

$$\int_a^b K(x, y)\, \varrho(y)\, dy = 0\,, \tag{12}$$

o, ciò che fa lo stesso, delle equazioni:

$$\int_a^b \varrho(y)\, \psi_i(y)\, dy = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

[1] G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

[2] Cfr. la nostra Nota: *Sui sistemi di equazioni integrali di 1ª specie* (idem, serie 5ª, tom. XXII, 1913, pp. 13-20).

in tal caso la soluzione della (9) conterrà una funzione arbitraria. E precisamente, se si sceglie una funzione arbitraria qualsiasi $\chi(y)$ nell'intervallo (ab), purchè la serie $\sum_i \alpha_i \psi_i(y)$, con $a_i = \int_a^b \chi(x) \psi_i(y) dy$, sia integrabile termine a termine in (ab), la funzione:

$$\varrho(y) = \chi(y) - \sum_i \alpha_i \psi_i(y)$$

soddisferà all'equazione integrale (12) e si potrà scrivere:

$$h(y) = h_1(y) + \varrho(y) .$$

Ora, indicando con $\nu_1(y) , \nu_2(y) , \ldots$ il sistema complementare di Ψ, si può applicare il teorema II (n. 4) alla funzione $\varrho(y)$, giacchè sono soddisfatte le (13), e quindi si avrà:

$$\varrho(y) = \sum_1^{s_1}{}_i b_i \nu_i(y) + \sum_{s_1+1}^{s_2}{}_i b_i \nu_i(y) + \cdots \qquad \left(b_i = \int_a^b \varrho(y) \nu_i(y) dy\right)$$

Pertanto la soluzione dell'equazione (9) risulterà espressa in questo modo:

$$h(y) = \sum_1^{n_1}{}_i a_i \lambda_i \psi_i(y) + \cdots + \sum_1^{s_1}{}_i b_i \nu_i(y) + \cdots$$

Astronomia pratica. — *Sulla costruzione delle tavole per correzione del passo dei microscopi micrometrici.* Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

Fisica. — *Sulla formazione della rugiada e della brina.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

Chimica. — *Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio.* Nota I di M. AMADORI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull' incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo* (1). Nota di GINO BIANCHINI, presentata dal Corrispondente A. PIUTTI.

Scopo del presente lavoro fu lo studio della natura dell' incompatibilità che si manifesta nelle miscele di salolo, sulfonal e β-naftolo col rammollimento a successiva fluidificazione quando la mescolanza si effettua a temperature superiori a 27°.

Siccome questi tre composti, di uso comune in farmacia, hanno la proprietà di fondere bene senza scomporsi in misura apprezzabile per mezzo di un abbassamento del loro punto di cristallizzazione, mi sembrò opportuno di ricorrere, in queste mie ricerche, ad un metodo che ha dato già buoni risultati anche nel campo delle sostanze organiche, come lo provano i numerosi lavori apparsi nella letteratura scientifica in questi ultimi anni, e che fu impiegato felicemente a risolvere anche le quistioni delle incompatibilità farmaceutiche da varî sperimentatori, dei quali basti ricordare il Caille (2), i dottori E. Quercigh e Giulia Wautrain-Cavagnari (3) ed il prof. Italo Bellucci (4).

Ho eseguito, per ottenere lo scopo prefissomi, la misura delle velocità di raffreddamento di miscele binarie e ternarie dei tre componenti suddetti, operando su una massa complessiva di circa dieci grammi per ogni esperienza.

Le precauzioni adottate erano le solite, come: disposizione speciale per ottenere il raffreddamento della massa con una velocità uniforme; agitazione continua durante il raffreddamento, finchè la massa della fase liquida non diventava troppo piccola in confronto di quella della fase solida, da render sconsigliabile il rimuovere la miscela per la eventualità di formazione di spazî vuoti che impediscono al termometro di dare indicazioni corrispondenti allo svolgersi dei fenomeni.

Per ogni concentrazione furono ripetute le esperienze fino ad ottenere dei dati concordanti e sicuri. Le curve di raffreddamento furono confrontate

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Napoli.

(2) Comptes Rendus, *148,* 1458.

(3) Atti Soc. per il progresso delle scienze, 1912.

(4) Rend. Acc. Lincei, 1912, II, 610.

colla curva del dispositivo a vuoto. Ogni volta che, per la limitata massa della fase che avrebbe dovuto produrre anomalie nel raffreddamento del sistema, queste non risultavano molto decise nelle curve relative, l'esperienza fu ripetuta raddoppiando la massa o modificando nel modo più conveniente le disposizioni sperimentali per mettere in evidenza con maggior sicurezza l'andamento dei fenomeni.

Sistema sulfonal + β-naftolo.

Le miscele fuse di salolo e sulfonal lasciano cristallizzare, nel loro raffreddamento, i componenti allo stato puro.

Ciò risulta evidente dall'esame della tabella n. 1, in cui sono riportati i risultati ottenuti nell'analisi termica di questo sistema binario:

TABELLA N. 1.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI		Principio della cristallizzazione	Arresto eutettico	Durata dell'arresto eutettico in secondi per 10 gr. di sostanza
Salolo	β-naftolo			
100	—	124°.5	67	—
90	10	120.5	67	60
80	20	114	67	80
70	30	108.5	67	90
60	40	95	67	110
50	50	82	67	150
40	60	68.5	67	180
30	70	83	67	140
20	80	99	67	100
10	90	110	67	40
—	100	122	67	—

Il sulfonal impiegato proveniva dalla Ditta Bayer e C. di Elberfeld, ed aveva il punto di cristallizzazione a 124°.5; il β-naftolo proveniva dalla Ditta Erba di Milano, e cristallizzava a 122°. Tutte le miscele sperimentate presentano dapprima un rallentamento della velocità di raffreddamento in corrispondenza all'inizio della cristallizzazione primaria, e quindi un arresto che si manifesta a temperatura costante, con durata maggiore o minore in corrispondenza alla cristallizzazione eutectica.

Nella fig. 1 è rappresentato il diagramma di stato, il quale ha per base il lato A C del triangolo delle isoterme nel sistema ternario. Nell'area di temperature e concentrazioni M M′ E′ si verifica la cristallizzazione del sulfonal puro; nella N N′ E′ invece cristallizza solo il β-naftolo: al disopra delle due curve M E′ ed E′ N si trova l'area delle temperature alle quali esiste soltanto la fase liquida costituita dalle mescolanze dei due componenti. Al disotto

della retta M'N' esistono soltanto i cristalli di sulfonal e di β-naftolo, meccanicamente commisti.

La temperatura eutectica è di 67°; la concentrazione eutectica è di 38 % di sulfonal e di 62 % di β-naftolo espressi in funzione dei loro pesi molecolari.

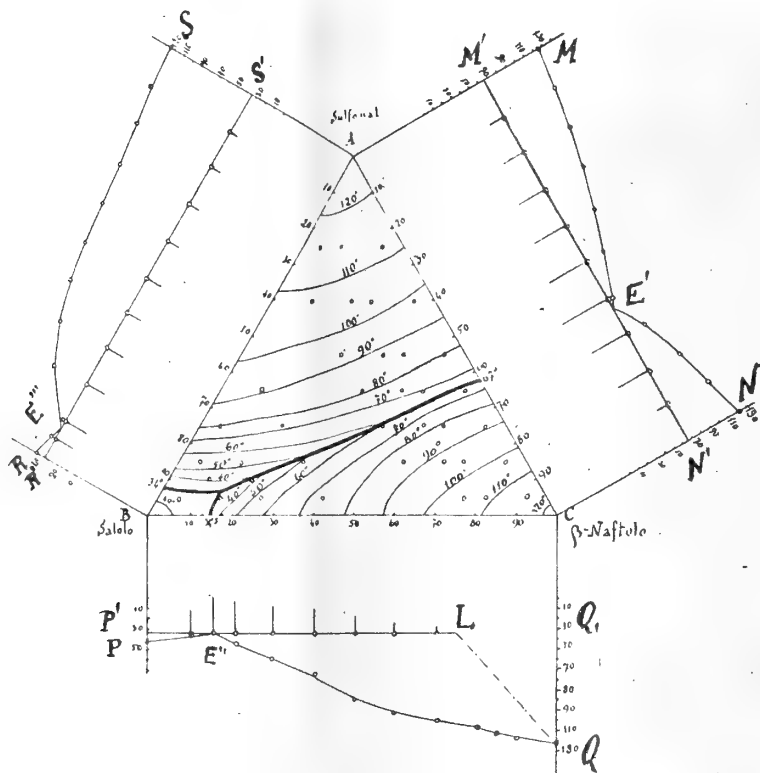



Fig. 1.

Sistema salolo + β-naftolo.

Dall'esame delle curve di raffreddamento delle miscele binarie formate dal salolo e dal β-naftolo, si vede subito che queste due sostanze hanno la proprietà di dare soluzioni solide fra loro in proporzioni limitate.

Infatti, quando si lasciano raffreddare le miscele e concentrazioni elevate di β-naftolo (superiori all'80 % in molecole), si osserva che la cristallizzazione precede regolarmente dal principio alle fine senza dar luogo ad alcun arresto in corrispondenza alla temperatura di cristallizzazione eutectica; le curve temperature-tempi mostrano solo un intervallo di cristallizzazione che incomincia alla temperatura di saturazione della fase liquida iniziale rispetto al β-naftolo, e finisce a temperature sempre più elevate di quella eutectica.

Per le altre concentrazioni si ha regolarmente un rallentamento nella velocità di raffreddamento in corrispondenza al principio della cristallizzazione del salolo o del β-naftolo, ed un arresto alla temperatura eutettica.

L'assenza di eutectico per concentrazioni in β-naftolo superiori all'80 % di β-naftolo è confermata anche dalla curva delle durate degli arresti eutectici, durate che tendono a zero più rapidamente delle concentrazioni del salolo.

Nella seguente tabella n. 2 sono riportati i dati numerici che si riferiscono a questo sistema binario:

Tabella n. 2.

Concentrazioni molecolari		Priincipio della crislallizzazione	Arresto eutettico	Durate eutettiche in secondi
Sulfonal	β-naftolo			
100	0	42.5	—	—
90	10	36	34.5	100
85	15	34.5	34.5	160
80	20	43.5	34.5	130
70	30	60	34.5	110
60	40	73	34.5	100
50	50	85.5	34.5	80
40	60	94	34.5	50
30	70	101.5	34.5	30
20	80	109	—	—
15	85	114.5	—	—
10	90	119	—	—
0	100	122	—	—

Nella fig. 1, il diagramma di stato di questo sistema è rappresentato sul lato BC del triangolo. In esso sono delimitati i campi di esistenza delle varie fasi: il campo QLE″ e il luogo degli equilibrî fra cristalli misti di salolo e β-naftolo colla fase liquida; nell'area QQ′L esistono le soluzioni solide sole; nella PE″P′ si hanno i cristalli di salolo puro in equilibrio con la fase liquida; al disotto della linea P′Q′ si hanno i cristalli di β-naftolo e di salolo mescolati meccanicamente, e le soluzioni solide; al disopra della curva QE″P la sola fase liquida.

Si conclude, quindi, che l'incompatibilità fra salolo e β-naftolo è di natura fisica; i due componenti formano soluzioni solide ad alta percentuale di β-naftolo cioè dall'80 % in poi. La temperatura eutettica è di 34,5: la concentrazione della miscela eutettica è dell'85 % di salolo e del 15 % di β-naftolo.

Questo sistema era stato precedentemente studiato dai dottori E. Quercigh e Giulia Wautrain Cavagnari, e dal prof. Italo Bellucci. I risultati delle mie esperienze concordano con quelle dei precedenti sperimentatori per

cui l'esistenza di soluzioni solide ricche in β-naftolo sembra definitivamente provata.

Dalle mie ricerche su questo sistema istituite per avere dei dati direttamente confrontabili senza obiezione con quelli ottenuti nel sistema ternario, risulta che l'incompatibilità fra il salolo ed il β-naftolo non esiste per tutte le concentrazioni, ma solo per quelle comprese fra il 0 e l'80 % di β-naftolo. Il salolo impiegato aveva il punto di fusione a 42°,5.

Sistema salolo + sulfonal.

Anche l'incompatibilità esistente fra salolo e sulfonal è di natura fisica, come si può vedere dai dati riportati nella seguente tabella n. 3.

TABELLA N. 3.

Concentrazioni molecolari		Principio della cristallizzazione	Temperatura eutettica	Durata dell'arresto eutettico in secondi
Salolo	Sulfonal			
100	0	42.5°	—	—
95	5	39	34	90
90	10	38	34	100
80	20	70.5	34	90
70	30	89	34	80
60	40	97	34	80
50	50	105	34	70
40	60	109	34	60
30	70	112	34	60
20	80	118.5	34	50
10	90	123	34	30
0	100	124.5	—	—

Nella figura 1, nel lato AB del triangolo, è costruito il diagramma di stato di questo sistema binario. Il campo RR'E'' è il luogo degli equilibrî monovarianti fra la fase solida, costituita dai cristalli di salolo, e la fase liquida; il campo E'''SS' è quello delle miscele e delle temperature in cui i cristalli di sulfonal sono in equilibrio colla fase liquida.

La concentrazione eutectica è del 92 % di salolo e dell'8 % di sulfonal, espressi in grammimolecole.

La temperatura di cristallizzazione eutectica è di 34°.

Miscele ternarie. — Nel campo delle miscele ternarie furono sperimentate quelle corrispondenti ad otto sezioni parallele al lato sulfonal-β-naftolo ed aventi le seguenti diverse concentrazioni in salolo: 90 ; 80 ; 70 ; 55 ; 30 ; 20 ; 15 e 5 % in molecole.

I risultati sperimentali ottenuti sono riassunti nelle seguenti tabelle nn. 4, 5, 6, 7 ed 8. Dall'insieme di queste cifre si può ottenere la rappre-

sentazione dei fenomeni che si verificano nel sistema ternario, ricorrendo al solito metodo delle coordinate triangolari.

Si osserva che la solubilità del salolo nel β-naftolo allo stato solido non viene minimamente influenzata dalla presenza del sulfonal, e quindi che nel campo ternario non si osservano per via termica se non cristalli misti binarii.

Si stabilì, quindi, che la temperatura dell'eutectico ternario che si forma nelle miscele di salolo, sulfonal e β-naftolo è di 27°; e le concentrazioni dei rispettivi componenti sono del 15 % di β-naftolo, 7 % di sulfonal e 78 % di salolo, espressi in molecole.

Per tale ragione, la posizione E dell'eutectico ternario è molto vicina al lato salolo + β-naftolo del triangolo delle concentrazioni; da esso partono le tre linee su cui si effettua la cristallizzazione secondaria, che vanno a terminare alle tre temperature eutectiche binarie alle concentrazioni relative rappresentate dalle proiezioni E', E'', E''' sui lati AB, BC e CB che chiameremo identicamente E', E'', E'''.

Il procedere della cristallizzazione che avviene normalmente nella porzione del campo in cui non si formano soluzioni solide binarie, viene influenzato, nell'area rimanente, dalla cristallizzazione delle soluzioni di salolo in β-naftolo.

L'area delle concentrazioni rimane divisa in tre campi:

I. $AE'''EE'$, nella quale la fase cristallina, che si separa inizialmente, è costituita dal sulfonal puro.

II. $CE'EE''$ in cui si ha la cristallizzazione primaria delle soluzioni solide di salolo in β-naftolo.

III. $BE'''EE'$ in cui la fase cristallina che inizialmente si separa è costituita dal salolo puro.

Si conclude, quindi, che:

a) l'aggiunta di sulfonal alle miscele di salolo e β-naftolo ne provoca la fluidificazione a temperature inferiori alla loro temperatura eutectica, finchè però la temperatura ambiente non è inferiore a 27°;

b) è da sconsigliarsi nella pratica farmaceutica l'aggiunta del sulfonal anche per miscele di salolo e β-naftolo molto ricche in quest'ultimo componente, qualora tali sostanze medicamentose si vogliano somministrare in cartine.

TABELLA N. 4. — SEZIONE I AL 5 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β-naftolo			
5	95	0	123°.5	—	34
5	70	20	112	61	27
5	60	35	98	62	27
5	45	50	79.5	64	27
5	35	60	78	66	27
5	25	70	87.5	62	27
5	15	80	103	59	27
5	5	90	115.5	54	27
5	0	95	120.5	—	—

TABELLA N. 5. — SEZIONE II AL 15 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β-naftolo			
15	85	0	120°	—	34
15	75	10	115	39	27
15	60	25	104	51	27
15	45	40	85.5	54	27
15	35	50	69	59	27
15	25	60	81	57	27
15	15	70	96	54	27
15	5	80	108.5	37	27
15	0	85	114.5	—	27

TABELLA N. 6. — SEZIONE III AL 20 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β-naftolo			
20	80	0	118°.5	—	34
20	75	5	116	47	27
20	60	20	105	49	27
20	45	35	88	53	27
20	35	45	72	55	27
20	25	55	78.5	56	27
20	15	65	92	53	27
20	5	75	84.5	34	27
20	0	80	109	—	27

TABELLA N. 7. — SEZIONE IV AL 20 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β-naftolo			
30	70	0	112°	—	34
30	60	10	107	33	27
30	45	25	93.5	41	27
30	35	35	81	47	27
30	25	45	60	49	27
30	15	55	84	41	27
30	0	70	101.5	—	34.5

TABELLA N. 8. — SEZIONI AL 55 AL 70 ALL' 80 ED AL 90 DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β-naftolo			
55	45	0	101°	—	34
55	35	10	91.5	28	27
55	25	20	72	32	27
55	15	30	45	21	27
55	5	40	73	28	27
55	0	45	79	—	34.5
70	30	0	89	—	34
70	25	5	80	30	27
70	15	15	50.5	28	27
70	10	20	32	29	27
70	5	25	49	—	27
70	0	30	73	—	34 5
80	20	0	70.5	—	34
80	15	5	53	31	27
80	10	10	38	30	27
80	5	15	28	—	27
80	0	20	43.5	—	34.5
90	10	0	38	—	34
90	5	5	36	30	27
90	0	10	36	—	34.5

Chimica. — *Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce.* Nota di R. CIUSA e A. PIERGALLINI, presentata dal Socio G CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *Sul calore specifico delle leghe metalliche costituite da soluzioni solide.* Nota di Luigi Rolla [1], presentata dal Corrisp. A. Garbasso.

1. La teoria dei fenomeni termoelettrici, sviluppata recentemente da Bernoulli [2] partendo dall'ipotesi dei *quanti*, viene alla conclusione che, in prima approssimazione, la forza termoelettrica fra una soluzione solida diluita e il metallo solvente, per la differenza di un grado di temperatura, è data da

$$\varepsilon = k \ln \frac{\nu'}{\nu} = k \ln \frac{\theta'}{\theta} , \tag{1}$$

dove k è una costante, ν' indica la frequenza atomica *media* della lega, ν la frequenza atomica del solvente, θ' il punto di fusione della lega e θ il punto di fusione del solvente. La (1) è ricavata ammettendo la formola di Lindemann [3]

$$\nu = 2{,}8 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{\theta}{m v^{2/3}}} \tag{2}$$

[m = peso atomico: v = volume atomico], e supponendo che, per approssimazione, il *volume atomico medio* della lega (che s'immagina molto diluita) sia eguale al volume atomico del solvente.

Ma la (1) può considerarsi, in certo modo, come una particolarizzazione della formola di Koref [4], verificata già in parecchi casi, secondo la quale, in ciascun composto binario di punto di fusione T'_f, la frequenza di ciascun atomo componente diventa

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{T'_f}{T_f}} , \tag{3}$$

quando T_f indichi il punto di fusione dell'elemento preso allo stato puro. Per le soluzioni solide di qualunque concentrazione, vale questa formola. L'esperienza dimostra, infatti, che non sempre il calore specifico di una lega binaria, i cui componenti siano miscibili in tutti i rapporti allo stato solido e liquido, si può calcolare dai calori specifici dei componenti allo stato puro,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Zeit. für Elektrochemie, XVII, 689 (1911).

(3) Phys. Zeit. IX, 609 (1909).

(4) Phys. Zeit. XIII, 184 (1912).

mediante la regola del miscuglio. Dunque la frequenza atomica dei componenti, nella lega, non conserva il proprio valore; e il punto di fusione, per le soluzioni solide, si può definire come quella temperatura alla quale le ampiezze delle oscillazioni atomiche diventano tali che gli atomi vicini, del solvente e del soluto, abbiano a toccarsi. Dunque la frequenza atomica di ciascun componente viene ad esser data da una formola analoga alla (2), dove, al posto di θ e di v, figurano il punto di fusione T'_f e il volume atomico del metallo nella lega. Ma quando si ammetta, come è ben verosimile, che v possa essere posto eguale a quello del metallo allo stato puro, si ha

$$\nu' = 2{,}8 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{T'_f}{m v^{2/3}}} \, ,$$

dalla quale, combinata colla (2), si ricava immediatamente la (3).

Con ciò si viene ad affermare che la frequenza atomica di un metallo in una lega costituita da una soluzione solida dipende dalla concentrazione di questa. Alla curva di fusione corrisponde una *curva di frequenza atomica* per ciascun componente; e le formole che possono servire per calcolare quella, saranno, in generale, facilmente generalizzate per il calcolo di questa [1]. La differenza tra la frequenza atomica di un metallo allo stato puro e in lega, raggiunge un valore massimo, per poi diminuire quando la concentrazione della soluzione solida è uguale a quella del liquido della fusione: questa legge però riguarda solo le differenze negative, perchè, in accordo colle considerazioni teoriche di van Laar [2] non si sono ancora trovati dei sistemi, costituiti da due metalli miscibili in tutti i rapporti allo stato solido e liquido, il cui diagramma di fusione presenti un massimo. L'eccezione sarebbe costituita dal comportamento del sistema Pb-Tl, ma non è ancora ben certo se il punto di massimo corrisponda a un composto definito.

2. La conferma sperimentale della (3), si può avere studiando una proprietà delle soluzioni solide che dipenda dalla frequenza atomica dei componenti: per es. la conducibilità elettrica [3] o il calore specifico.

Quanto ai calori specifici [4], sebbene esistano molte misure, non si conosce una ricerca sistematica completa, guidata dalla teoria. Tuttavia, sebbene su leghe di altra natura, costituite da composti definiti, Schimpff [5], nel laboratorio di Tammann, ha fatto delle determinazioni molto accurate, dalle quali risultarono, in modo non dubbio, regolarità che indicano l'esistenza di una legge generale.

(1) Cfr. van Laar, Zeit. f. phys. Ch. *63*, 216, (1908).
(2) Ibid. 63, 236, (1908); 64, 272, (1908).
(3) Cfr. Wien, Ber. d. preuss. Ak. d. Wiss. (1913), 184.
(4) Landolt-Börnstein-Roth, Tabellen, (1913), 777 e segg.
(5) Zeit. für phys. Ch., *71*, 257, (1910).

Si può in sostanza ritenere che ogniqualvolta il punto di fusione della lega è più alto di quelli dei componenti, o, per lo meno, assai più alto di quello di uno dei componenti, il calore specifico è minore di quello calcolato colla legge di Kopp. La differenza tra il valore calcolato e quello trovato non cresce sempre al crescere della differenza tra i punti di fusione della lega e dei componenti, sicchè non sempre la (3), estesa senz'altro a questo caso, sarebbe verificata. Ma non bisogna dimenticare che l'additività del volume molecolare è un'ipotesi che non sappiamo fino a qual punto sia valida, e la (3) stessa ha sempre il carattere di formola approssimata.

Non va passato nemmeno sotto silenzio lo studio di Laborde [1], il quale stabilì che, nelle leghe di ferro e antimonio, il calore specifico è sempre maggiore di quello che prescrive la regola del miscuglio. Ciò è in conformità col diagramma di fusione.

Quando si applichino le formole della teoria dei *quanti* per il calcolo dei calori speciffci dei corpi solidi mono-atomici, si ha modo di interpretare questi risultati che prima di ora rimanevano solo dati empirici.

Per eseguire una ricerca sistematica sopra le soluzioni solide metalliche, io ho considerato le leghe di

argento - oro
oro - rame
rame - nichel
nichel - manganese
manganese - rame [2].

La curva di fusione dei sistemi argento-oro, rame-nichel, come è noto, non ha punti in cui la tangente sia parallela all'asse delle concentrazioni [3]. Le curve di fusione dei sistemi oro-rame, nichel-manganese, manganese-rame, hanno un minimo rispettivamente in corrispondenza dell'82 $^0/_0$ in peso di oro, del 45 $^0/_0$ in peso di nichel e del 32 $^0/_0$ in peso di manganese [4].

I calori specifici furono misurati col calorimetro a blocco di rame descritto da Koref [5], e con quello a toluolo, tipo Fabre e Silbermann, modificato da Schottky [6]. Il primo servì per la temperatura compresa tra — 190° e 0°, l'altro, tra 0° e 25°.

L'errore medio delle determinazioni è sempre inferiore all'1 $^0/_0$.

(1) Beiblätter, (1896), 858.

(2) Debbo ringraziare il mio carissimo amico, prof. Nicola Parravano, per aver messo a mia disposizione le leghe di cui ebbi bisogno nel corso delle esperienze, e per avermi fornito i campioni dei metalli puri che servirono per le fusioni.

(3) Landolt-Börnstein-Roth, (1913), 642, 674.

(4) Ibid., pagg. 655, 686, 674.

(5) Ann. d. Physik. XXXVI, 49, (1911). L'apparecchio fu costruito dal sig A. Hoenon, meccanico dell'Istituto di chimica fisica di Berlino.

(6) Phys. Zeit. X, 634, (1910).

Prima di sperimentare sulle leghe, si fecero sempre le misure corrispondenti sui metalli che servirono a prepararle.

Si calcolò, colla regola del miscuglio, il calore specifico delle leghe studiate: indi, applicando la (3), si calcolò, per ciascun metallo in lega, il calore atomico a pressione costante colla formola [1]

$$(4) \qquad C_p = \frac{3}{2} R \left[\frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1\right)^2} \right] + A \frac{T'_f}{T} C_p^2 ,$$

nella quale $R = 1{,}685$, e T rappresenta la temperatura assoluta media alla quale fu eseguita l'esperienza.

Il calore specifico della lega è allora dato da

$$(5) \qquad \frac{\frac{C'_p\, g'}{A'} + \frac{C''_p\, g''}{A''}}{g' + g''} ,$$

essendo C'_p, C''_p i valori atomici così calcolati dei due metalli il cui peso atomico è A', A''; e i cui pesi rispettivi, nella lega, sono g' . g''.

Si ha, riassumendo [2], la seguente tabella:

[1] Cfr. Nernst e Lindemann, Zeit. f. Elektr., XVII, 820, (1911).

[2] I risultati delle esperienze verranno pubblicati per intero nella « Gazzetta Chimica italiana ».

Lega Ag-Au [Au : 20 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1279	Ag : 1233	Ag : 213	Ag : 217	137	0,0459	0,0453	0.0455
	Au : 1336	Au : 123	Au : 121	234	0,0495	0,0491	0,0493
				285	0,0513	0,0505	0,0505

Lega Cu-Au [Cu : 20 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1157	Au : 1336	Au : 123	115	137	0,0391	0,0384	0,0378
	Cu : 1356	Cu : 330	305	234	0,0430	0,0421	0,0415
				285	0,0437	0,0429	0,0428

Lega Cu-Ni [Ni : 5 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
	Cu : 1356	Cu : 330	Cu : 330	137	0,0731	0,0728	0 0725
1360	Ni : 1724	Ni : 301	Ni : 267	234	0,0878	0,0870	0,0862
				285	0,0906	0,0902	0,0897

Lega Cu-Ni [Ni : 10 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
	Cu : 1356	Cu : 330	Cu : 339	137	0,0734	0,0736	0,0730
1430	Ni : 1724	Ni : 301	Ni : 274	234	0,0875	0,0871	0,0869
				285	0'0908	0,0903	0,0901

Lega Ni-Mn [Ni : 5 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1493	Ni : 1724	Ni : 301	Ni : 280	137	0,0925	0,0913	0,0897
	Mn : 1533	Mn : 227	Mn : 271	234	0,1030	0,1028	0,1019
				285	0,1062	0,1056	0,1042

Lega Ni-Mn [Ni : 10 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1453	Ni : 1724	Ni : 301	Ni : 276	137	0,0922	0,0917	0,0915
	Mn ·1533	Mn : 277	Mn : 269	234	0,1038	0,1044	0,1016
				285	0,1096	0,1057	0,1038

Lega Ni-Mn [Ni : 45 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1295	Ni : 1724	Ni : 301	Ni : 260	137	0,0923	0,0903	0,0878
	Mn : 1533	Mn : 277	Mn : 254	234	0,1070	0,1031	0,0991
				285	0,1109	0,1057	0,1009

Lega Cu-Mn [Mn : 10 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1263	Cu : 1356	Cu : 330	Cu : 318	137	0,0771	0,0752	0,0741
	Mn : 1533	Mn : 277	Mn : 251	234	0,0899	0,0885	0,0876
				285	0.0947	0,0930	0,0909

Lega Cu-Mn [Mn : 32 °/₀].

T'_f	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1138	Cu : 1356	Cu : 330	Cu : 302	137	0,0827	0,0817	0,0786
	Mn : 1533	Mn : 277	Mn : 238	234	0,0956	0,0944	0,0912
				285	0,0989	0,0966	00,943

Si ha dunque accordo fra la teoria e l'esperienza. Anche se esso non è perfetto, resta dimostrata, almeno qualitativamente, l'esistenza delle curve di frequenza atomica. Effettivameute si tratta di piccole differenze che soltanto con apparecchi di grande sensibilità si riesce ad apprezzare con sicurezza.

Nel caso delle leghe di nichel e manganese, di rame e manganese, e di rame e oro, la cui concentrazione corrisponde ai punti di minimo delle curve di fusione, il fenomeno si apprezza particolarmente bene: nelle leghe di rame e nichel, essendo il punto di fusione compreso fra quelli dei componenti, i calori atomici del rame e del nichel diventano rispettivamente minore e maggiore di quelli degli elementi allo stato puro. Così la regola del miscuglio viene a essere verificata, almeno per un largo intervallo di concentrazione.

Ciò risulta anche dalle misure di Jäger e Diesselhorst (1), che riguardano la costantana [60 % di rame e 40 % di nichel]. Per le leghe di argento e oro si deve fare la stessa osservazione: senonchè qui, in ogni caso, il punto di fusione differisce, relativamente, assai poco da quelli dei componenti. E il calore specifico è praticamente uguale a quello della corrispondente miscela greggia dei due metalli.

Il principio stabilito da Tammann (2) — secondo il quale un corpo, che si presenti in due stati diversi, ha un più grande calore specifico quando il suo contenuto in energia è maggiore, o, in altri termini, quando, nel passaggio allo stato in cui il calore specifico è minore, l'energia che si libera è positiva — si può far valere per ciascun componente delle leghe prese in esame. Intanto, ammettendo il fatto sperimentale previsto dalla teoria di Van Lear, che le curve di fusione di due metalli miscibili in tutte le proporzioni allo stato solido e liquido non presentano mai un massimo, si deduce immediatamente che il calore di trasformazione allo stato solido nelle sostanze che passano dallo stato di purezza a quello che caratterizza la soluzione solida, non è mai positivo. Infatti, in tale ipotesi, bisognerebbe che il calore atomico di ciascun metallo di ventasse, nel nuovo stato, più piccolo, in conseguenza della (3) e della (4).

Quando la curva di fusione è sempre crescente o decrescente, non si può, *a priori*, affermar nulla: infatti il calore specifico di uno dei metalli diventa maggiore; e quello dell'altro, minore. Si può però affermare che, nelle curve di fusione a minimo, il calore di miscibilità allo stato solido deve essere negativo.

(1) Landolt-Börnstein-Roth, (1913), 754.

(2) Krystallissieren und Schmelzen, pag. 25.

Batteriologia agraria. — *Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno.* Nota di C. LUMIA, presentata dal Socio G. CUBONI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* Nota II di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

2° *Fenomeni che si osservano nelle rane escul. estive tenute in acqua distillata ed in soluzioni Ringer ipertoniche.*

Come ho già riferito, prima di porre gli animali nell'acqua distillata o nelle soluzioni saline ipertoniche essi vennero fatti soggiornare in acqua di condotta cambiata tre volte al giorno, finchè nel liquido di lavaggio non si trovavano più i residui alimentari emessi dalle rane. In questo modo era presumibilmente eliminata ogni influenza dell'ambiente dal quale gli animali provenivano, e l'esperimento aveva inizio — sotto questo riguardo — per tutti nelle identiche condizioni.

Quando le rane venivano poste nel recipiente con acqua distillata o negli altri con soluzioni ipertoniche, dopo essere state asciugate accuratamente con un panno pulito, non contenevano mai urina in vescica, come era facile persuadersene premendone l'addome inferiormente ed ai lati.

In ciascun recipiente (vasi di vetro) erano versati cinque litri di liquido e tante rane (circa trenta) da occupare un volume pressochè eguale. Ciò per eliminare le possibili influenze dovute alla differente estensione della superficie assorbente (Spina, Durig, ecc.), nonchè quelle di una differente irradiazione di calore.

I recipienti contenenti gli animali erano poi conservati, come ho detto, in una stanza sotterranea ed al buio.

Dopo 3-8 giorni di permanenza delle rane nei diversi liquidi si osservavano costantemente i fenomeni seguenti:

a) *Le rane in acqua distillata* non presentavano mai un mutamento notevole nel colore della pelle; esse erano normalmente vivaci; non contenevano mai urina in vescica; nè avevano mai liquido in nessuno dei sacchi linfatici.

Aperta la cavità toraco-addominale si notavano tanto lo stomaco quanto l'intestino vuoti di liquido; talvolta nell'ultimo tratto di questo era raccolta un po' di bile densa. Il fegato aveva colorito normale con cistifellea contenente generalmente poca bile; così pure normali apparivano al colorito ed al taglio la milza ed i reni. I polmoni si presentavano normalmente distesi e ben irrorati dal sangue. Il cuore pulsava con ritmo regolare e conteneva un sangue di colorito rosso-chiaro spontaneamente coagulabile.

b) *Le rane in soluzione Ringer ipertonica massima* (soluzione contenente il 10 °/₀₀ di Na Cl) avevano invece molto mutato nel colore della pelle, divenuta grigiastra. Stimolate adeguatamente (nelle regioni innervate dal Trigemino) [1] si ponevano in riflesso tonico diffuso (iperestesiche); contenevano quasi sempre urina in vescica, ed avevano inoltre una considerevole quantità di linfa giallo-citrino-chiara, spontaneamente coagulabile, nell'interno dei sacchi linfatici, specialmente in quelli laterali. La respirazione di questi animali era differente da quella delle rane tenute in acqua semplice, in quanto predominava manifestamente quella che i tedeschi chiamano « *einpumpende Atmung* ». Aperta la cavità toraco-addominale si notava subito la maggior distensione dei polmoni, come pure si osservava non di rado la presenza di aria tanto nello stomaco quanto nell'intestino. In quest'ultimo organo essa trovavasi spesso commista a liquido verdastro. Il fegato appariva normale con cistifellea contenente per lo più parecchia bile; normali si presentavano anche la milza ed i reni. Il cuore pulsava con ritmo più lento della norma e conteneva un sangue rosso-scuro, denso, spontaneamente coagulabile. Il coagulo era più abbondante di quello formatosi dal sangue delle rane tenute in acqua distillata.

c) *Le rane in soluzione Ringer ipertonica ultramassima* (soluzione contenente l'11 °/₀₀ di Na Cl) avevano un colorito della pelle più accentuatamente grigiastro, ed erano sempre un po' torpide nei loro movimenti. Stimolate anch'esse adeguatamente si ponevano in riflesso tonico diffuso più presto delle precedenti e per stimoli di intensità minore (iperestesia). Rinnovando lo stimolo non era anzi raro il caso di promuovere un prolungato grido di dolore; e qualche volta anzichè un tono diffuso riflesso si poteva avere un vero tetano. Esse contenevano molta urina in vescica che emettevano facilmente non appena si stringevano in qualche modo tra le dita. La linfa dei sacchi linfatici era invece in quantità molto minore che nelle rane precedenti. Contenevano sempre aria nello stomaco e nell'intestino, commista, in quest'ultimo, a liquido verdastro. La cistifellea conteneva molta bile: il fegato era rosso-scuro in superfice e talora verde-scuro al taglio. Più oscuri anche apparivano la milza ed i reni. I polmoni si mostravano molto distesi, ed irrorati da sangue scuro. Il cuore pulsava con ritmo

[1] B. Brunacci, Zeitschr. f. allgem. Physiol. IX, 1908.

lento e conteneva un sangue più scuro, più denso e più coagulabile del normale. Non di rado si osservava scarso liquido anche tra i muscoli.

d) Quando le rane avevano soggiornato in *soluzioni Ringer più concentrate delle precedènti*, esse, come abbiamo riferito, morivano entro un intervallo di tempo più o meno lungo a seconda della concentrazione maggiore o minore del liquido ambiente.

I fenomeni che si osservavano in questi casi estremi possono riassumersi come segue:

Pelle grinzosa, grigiastra la quale si asciugava rapidamente appena l'animale era tolto dal liquido. Emorragie capillari specialmente evidenti nella cute situata tra le due coscie. Sacchi linfatici vuoti di qualsiasi liquido. Polmoni enormemente distesi pieni d'aria, di colorito grigiastro. Lo stomaco e l'intestino contenevano aria. Il cuore, arrestato in diastole era pieno di sangue oscuro e denso. Tutti gli altri organi interni (fegato, milza, rene, ecc.) apparivano di colore molto più oscuro del normale e vi si notavano spesso diffuse emorragie capillari.

È stata ritenuta (Cl. Bernard, P. Bert, ecc.) come causa della morte di questi animali immersi in soluzioni saline troppo concentrate, la forte sottrazione di acqua cui essi vanno per tal modo soggetti. Senza voler escludere questo fattore, senza dubbio importante, mi sembra tuttavia che non debba attribuirglisi una importanza esclusiva. È noto infatti che le rane possono sopportare una diminuzione in peso per evaporazione, molto superiore (sino al 25-30 %) a quella che si verifica allorchè siano immerse in soluzioni saline contenenti per es. l'1 % di NaCl, senza pertanto morire. Tra le *cause della morte* di questi animali mi sembrerebbe dovesse invece ritenersi come molto importante (oltre alla alterata funzione della pelle, restringimento dei pori cutanei, ecc.) l'*eccitamento riflesso del vago* [per stimoli dolorifici cutanei (iperestesia, riflesso tonico diffuso), e per l'eccessiva distensione dei polmoni (gli animali finchè vivono pompano continuamente aria)] *che determina l'arresto diastolico del cuore*. Ho infatti osservato che *se si apre con precauzione la cavità toraco-addominale di rane appena morte e se si punge uno dei polmoni con uno spillo, si accerta, non di rado, contemporaneamente allo sgonfiarsi di entrambi i polmoni, il ristabilirsi per breve tempo delle pulsazioni cardiache.*

Biologia. — *La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo. Contributo critico agli esperimenti di trasmissione.* Nota II del dott. Carlo Basile [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Nella mia Nota precedente [2] io misi in evidenza che nelle regioni mediterranee è possibile, soltanto in determinate condizioni meteorologiche, che, in natura, le pulci, che succhiano sangue periferico di bambini o di cani infetti di leishmaniosi, si infettino di leishmania, e che alla loro volta riescano infettanti.

Per quanto appare fin ora, tali condizioni meteorologiche sono date da quei mesi nei quali la temperatura massima in ciascuna decade non è stata mai inferiore a 18° ctgr., nè superiore a 30° ctgr.; le condizioni più favorevoli però sembrano avverarsi in quei mesi nei quali la temperatura massima, in ciascuna decade, è stata fra 18° ctgr. e 22° ctgr.; bisogna anche notare che le pulci vivono nelle case, fra le vesti, le coltri e le materassa ove viene a crearsi una temperatura che nei singoli giorni si mantiene meno variabile che nell'ambiente esterno.

Da questi dati si desume che gli esperimenti eseguiti per infetta resperimentalmente di leishmania varii insetti ematofagi e quelli di trasmissione di questi protozoi patogeni ad animali sani per via naturale, hanno valore dimostrativo quando sono eseguiti in opportune condizioni di temperatura.

a) *Infezione sperimentale delle pulci.* — Sin dall' inizio delle mie ricerche sulla leishmaniosi interna nel mediterraneo io pensai che le condizioni di temperatura dovessero avere la loro importanza sullo sviluppo delle leishmania nel loro insetto trasmettitore; e nel 1910 infatti ottenni la infezione sperimentale delle pulci (*Ctenocephalus serraticeps*) con *virus* della leishmaniosi interna del Mediterraneo, mantenendo a 22° ctgr. le pulci che avevano succhiato, con tecnica allora descritta [3], polpa splenica di cane intensamente infetto di leishmaniosi naturale.

Lo stesso esperimento fu successivamente tentato, con esito negativo, dal Gabbi in Messina [4]; questo autore il 21 agosto 1911, pose quattro gocce di succo splenico, ottenuto, per puntura della milza, da un bambino infetto di leishmania, sotto una campana di vetro sotto la quale fece arrivare 11 pulci

(1) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Rend. Acc. Lincei, Aprile 1914.

(3) Rend. Acc. Lincei, Genn. 1911.

(4) Malaria. Ottobre 1911.

canine e 7 umane; simile esperimento egli ripetè il 10 settembre dello stesso anno con 15 pulci (9 umane e 6 canine). Tanto la prima che la seconda volta l'esperimento fu condotto dal Gabbi, come infatti egli scrisse, a temperatura ambiente. Questa, come risulta dalle mie indagini, tanto il 21 agosto quanto il 10 settembre 1911 superò in Messina i 30° ctgr. e quindi, per come ho rilevato nella mia Nota precedente, essa non era adatta al ciclo evolutivo delle leishmania nella pulce. Ma oltre a ciò (lasciando da parte se le pulci hanno o non hanno effettivamente succhiato) riguardo alla tecnica usata dal Gabbi, resta da osservare che, usando poche gocce di succo splenico, queste in ambiente esterno coagulano subito, così che i parassiti ben presto si alterano e scompaiono; anche per questa sola causa adunque non era possibile la loro ulteriore vitalità ed evoluzione. Così condotto il tentativo del Gabbi di infezione sperimentale delle pulci con *virus* di origine infantile evidentemente non poteva essere positivo!

b) *Trasmissione della leishmaniosi interna per mezzo delle pulci.* — La trasmissione, per via naturale, della leishmaniosi a cani sani per mezzo delle pulci fu da me ottenuta, negli esperimenti eseguiti dal dicembre 1910 al giugno 1911 [1]; allora migliaia di pulci, raccattate dal dicembre al marzo a Bordonaro, centro endemico di leishmaniosi infantile e canina, furono da me poste a Roma su cuccioli sicuramente sani (nati da madri sicuramente sane ed allevati fuori del contatto di insetti ematofagi) e mantenuti, per tali esperimenti, in canile di nuova costruzione e protetto da fitte reti metalliche affinchè nessun insetto ematofago venisse con essi in contatto.

Fu in seguito a questi esperimenti, condotti in modo rigoroso e usando cani di controllo, che potei stabilire (giugno 1911), che, in natura, le pulci riescono infettanti dal dicembre al marzo, non escludendo che esse possano riuscire infettanti anche negli altri mesi qualora vi si osservano le condizioni meteorologiche adatte, non solo al ciclo evolutivo delle leishmania, ma anche alla capacità infettante di esse pulci.

Successivamente (1912) il Massaglia [2] ed il Marshall [3] tentarono, con esito negativo, di trasmettere, per mezzo di varii ectoparassiti, la leishmaniosi interna da cani sperimentalmente infetti a cani sani.

Questi autori non accertarono se le pulci e gli altri ectoparassiti viventi sui cani sperimentalmente inoculati di leishmaniosi presentassero o no nel loro intestino forme evolutive di leishmania. Resta per ciò il dubbio che non solo, per le condizioni meteorologiche forse non adatte, ma anche perchè la inoculazione di leishmania determina quasi sempre negli animali adulti

(1) Rend. Acc. Lincei. Febbr., Marzo, Aprile, Giugno, 1911.
(2) Patologica 1912.
(3) Il R. Army Medical Corps: Sett. 1912.

una infezione sperimentale lieve, tanto le pulci quanto gli altri ectoparassiti non si sieno infettati. Questo dubbio ha maggior valore nel caso del Massaglia dove il cane sperimentalmente infetto era di già in via di guarigione spontanea.

Queste ragioni spiegano a sufficienza il reperto negativo osservato dal Massaglia e dal Marshall.

Il Sergent invece che nel febbraio 1912 iniziò ad Algeri un esperimento di trasmissione della leishmaniosi interna da cane naturalmente infetto a cane sano per mezzo delle pulci, non solo accertò che le pulci erano infette di protozoi « tipo *leishmania* », ma anche seguì la mia tecnica precedente, mantenendo le pulci a 22° ctgr.; si pose perciò nelle condizioni di temperatura più adatte ed ottenne esito positivo.

Anche il Wenyon recentemente [1] ha tentato, in Malta, di trasmettere la leishmaniosi da cane naturalmente infetto a cani sani; egli, su due cuccioli portati dall'Inghilterra ha posto 300 pulci raccattate su un cane infetto di leishmaniosi naturale.

Il Wenyon dopo tre mesi dall'inizio dell'esperimento ha osservato che sui cuccioli si erano sviluppate molte pulci; allo esame microscopico e culturale degli organi di questi cuccioli, divenuti cachettici ed anemici, egli non ha riscontrate leishmania onde, molto affrettatamente, ritiene che il suo esperimento di trasmissione della leishmaniosi interna per mezzo delle pulci sia stato negativo. Io piuttosto penso che l'esperimento del Wenyon resti molto dubbio; volendo anche ammettere che i cuccioli non si sieno infettati è da osservare che l'esperimento è stato iniziato con appena 300 pulci raccattate su un cane infetto di leishmaniosi natnrale, onde il numero delle pulci infette, ammesso che ve ne fossero state, sarà stato molto esiguo; anzi io dubito che vi fossero state delle pulci infette, perchè l'autore non ha studiato le loro feci per accertare se esse fossero infette o no di protozoi « tipo *leishmania* ».

Il Wenyon nel suo lavoro non specifica neppure in quali mesi egli ha eseguito tale esperimento; dal complesso del lavoro sembra potersi desumere che egli abbia eseguito l'esperimento nei mesi estivi; perciò, volendo anche ammettere che vi fossero state delle pulci infette, è da osservare che le condizioni metereologiche dell'esperimento mentre erano favorevoli all'attiva moltiplicazione delle pulci, che da lui è stata notata, non erano adatte alla loro capacità infettante.

Meritano particolare attenzione gli esperimenti eseguiti da Pereira da Silva [2]; questo autore il 27 aprile 1911 pose un cucciolo dell'età di circa un mese a convivere con due cani sperimentalmente infetti di leishmaniosi

(1) Trans. of the Soc. of trapic. Medicine and Hygiene. Genn. 1914.

(2) Arquivos do Instituto Bacteriologico Camara Pestana. Tom. IV, fasc. II. 1913.

infantile; su questi cani egli, a vario intervallo di tempo, raccolse delle pulci. L'esame delle feci di queste pulci soltanto il 15 giugno, dimostrò la presenza di numerosi parassiti ovali, piriformi, cen o senza flagello, tipo « *leishmania* ». Il cucciolo morì nel dicembre successivo per rogna; l'esame microscopico degli organi emopoietici fu negativo per le leishmania.

In questo caso possiamo ritenere che le pulci dall'aprile al giugno si sieno infettate, ma che successivamente sia per le condizioni meteorologiche non adatte (dal giugno al dicembre) alla loro capacità infettante sia per le speciali condizioni del cane lo esperimento sia riuscito negativo.

Un secondo esperimento è stato eseguito dal Pereira da Silva in opportune condizioni meteorologiche. Quest'autore infatti dal 16 al 24 febbraio 1913 pose a far succhiare su un cane sperimentalmente infetto di leishmaniosi infantile (cane 12° dei suoi esperimenti) 22 pulci le di cui deiezioni, esaminate costantemente nei 15 giorni precedenti non avevano svelato alcun parassita; tre di queste pulci, dopo 8 giorni dall'aver succhiato sangue del cane sperimentalmente infetto, presentarono nelle loro feci dei protozoi « *tipo leishmania* » e si mantennero positive sino alla loro morte; l'ultima di esse morì il 2 marzo.

Dal 24 febbraio sino alla loro morte esse furono nutrite su un cane sano (cane 13°); subito dopo la morte il loro contenuto intestinale fu inoculato in un altro cane sano (cane 14°) il quale morì dopo circa un mese dall'inoculazione; la causa della morte del cane 14° non è stata accertata, il cane 13° sopravvisse. Ambedue i cani (cane 13° e cane 14°) non presentarono nessuna leishmania allo esame microscopico e culturale dei loro organi emopoietici.

Quest'esperimento del Pereira da Silva conferma che le pulci si infettano succhiando sangue di cane infetto. Il reperto negativo di leishmania negli organi emopoietici dei cuccioli (13° e 14°) nei quali era stata tentata la trasmissione della leishmaniosi per via naturale e per via sperimentale lascia dubitare sulla capacità infettante delle pulci infette; questo risultato trova spiegazione in un altro esperimento eseguito contemporaneamente dallo stesso autore. Un cane (cane 15°) al quale fu inoculata un'emulsione di milza del cane 12° (intensamente infetto di leishmaniosi infantile sperimentale e sul quale le pulci si erano nutrite ed infettate) morto anche esso, come il cane 14°, dopo circa un mese dall'inoculazione, non presentò parassiti all'esame microscopico e culturale dei suoi organi emopoietici.

Concludendo il *virus* del cane 12° inoculato in cani sani sia direttamente sia dopo aver subìto evoluzione nelle pulci, non si è più rivelato allo esame microscopico e culturale degli organi emopoietici dei cani nelle inoculazioni in serie.

Le stesse condizioni possono essersi avverate nell'esperimento precedente eseguito dal Pereira dall'aprile al dicembre 1911.

Il Pereira da Silva si forza a dubitare che i protozoi da lui osservati nello intestino delle pulci possano essere stati *Herpetomonas*, ma a ciò è da osservare che il non aver l'autore riscontrato alcuna forma di essi negli organi emopoietici dei cani inoculati costituisce un reperto del tutto opposto a quello ottenuto dal Laveran e dal Franchini, i quali, inoculando in *Mus musculus* e successivamente in cuccioli, il contenuto intestinale di pulci infette di protozoi da essi definiti *Herpetomonas* hanno poi osservato nel sangue e negli organi emopoietici degli animali inoculati dei protozoi « tipo *leishmania* ».

Questo mio studio che ha posto in notevole evidenza la meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo dimostra anche che, nelle ricerche su questa infezione, non si deve mai dare valore assoluto a un reperto negativo; così queste mie nuove ricerche confermano pienamente le deduzioni dei miei esperimenti di trasmissione, per via naturale, della leishmaniosi interna nelle regioni mediterranee; tali miei esperimenti, eseguiti in modo rigoroso, corroborati dai controlli, hanno dimostrato sin dal 1911 che le pulci infette di leishmania sono infettanti dal dicembre al marzo; non si può escludere che esse possano essere infettanti negli altri mesi dell'anno qualora vi esistano le opportune condizioni meteorologiche.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Gianfranceschi G., *Per lo studio del corista campione dell'Ufficio Centrale italiano*. Pres. dal Socio Blaserna.

Acqua C., *Osservazioni ed esperienze sul baco da seta*. Pres. dal Socio Grassi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Blaserna fa omaggio, a nome dell'autore, della pubblicazione del Socio straniero C. D. Walcott: *The Monarch of the Canadian Rockies*.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 aprile 1914.

Agamennone G. — La determinazione delle distanze a cui avvengono i terremoti in base alle osservazioni d'un solo Osservatorio. (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.

Bateson W. — Problems of Genetics. New Haven, 1913. 8°.

Binaghi R. — La genesi dei tubercoli ferrugginosi nelle condotte di acqua potabile studiata dal punto di vista chimico. (Estr. dalla « Rivista di Igiene e di Sanità pubblica », an. XXIV). Biella, 1913. 8°.

Binaghi R. — Tubazioni in ghisa ed altri materiali contenenti ferro studiati in rapporto alla formazione dei tubercoli ferrugginosi e al rammollimento del materiale delle condutture. (Estr. dagli « Atti del II. Congresso dell'Associazione degli igienisti italiani »). Genova, 1914. 8°.

Buelow B. (Fürst von). — Deutsche Politik. Berlin, 1914. 8°.

Casagrandi O. — Tubazioni in ghisa ed altri materiali contenenti ferro studiati in rapporto alla formazione dei tubercoli ferrugginosi e al rammollimento del materiale delle condutture. (Estr. dagli « Atti del II Congresso dell'Associazione degli igienisti italiani »). Genova, 1914. 8°.

Dalla Vedova G. — Scritti geografici scelti e ripubblicati a cura d'un Comitato di geografi in occasione dell'80° genetliaco dell' Autore, 29 gennaio 1914. Novara, 1914. 8°.

Eredia F. — Sulla spartizione della secchezza. (Estr. dalla « Rivista meteorico-agraria », an. XXXV). Roma, 1914. 8°.

Galdieri A. — Fiori, insetti e fumarole. (Estr. dal « Bollettino della Soc. dei naturalisti in Napoli », an. XXV). Napoli, 1913. 8°.

Galdieri A. — Il tufo campano di Vico Equense. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XV). Napoli, 1913. 8°.

Galdieri A. — L'origine della terra rossa. (Estr. dagli « Ann. della R. Scuola sup. di agricoltura di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.

Galdieri A. — Osservazioni sui calcari di Pietraroia in provincia di Benevento. (Estr. dal « Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », 1913). Napoli, 1913. 8°.

Galdieri A. — Su di una calcite feltriforme di Nocera. (Estr. dagli « Annali della R. Scuola sup. di agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.

Galdieri A. — Su di una leucofonolite haüynitica del vulcano di Roccamonfina. (Estr. dal « Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », 1913). Napoli, 1913. 8°

Galdieri A. — Sul bolo di Terra di Otranto. (Estr. dagli « Annali della R Scuola sup. di agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.

Galdieri A. — Sulla dissoluzione del calcare in acqua carbonica. (Estr. dagli « Annali della R. Sc. sup. d'agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.

Galdieri A. — Sulla fosforite di Leuca. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli », ser. VI, vol. X). Napoli, 1913. 8°.

Gerhartz H. — Ueber die zum Aufbau der Eizelle notwendige Energie (Transformationsenergie). Bonn, 1914. 8°.

Loria G. — Le glorie matematiche della Gran Brettagna. (Extr. de la Révue « Isis », I). Wondelgem-lez-Gand, 1914. 8°.

LUSSANA S. — La termodinamica dei gas e dei liquidi in rapporto alle applicazioni pratiche. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il progresso delle scienze », 1913). Roma, 1914. 8°.

MAGGI G. A. — Geometria del movimento. Lezioni di cinematica con un'appendice sulla geometria della massa. Pisa, 1914. 8°.

ORTH J. — Bericht über das Leichenhaus des Charité-Krankenhauses für das Jahr 1912. (Abdr. aus « Charité Annalen », XXXVII Jahrg.). Berlin, 1913. 8°.

ORTH J. — Gesellschaft der Charité-Aerzte. (Sonderabd. aus « Berliner klin. Wochenschr. », 1914). Berlin, 1914. 8°.

ORTH J. — Referat über Ribbert, Hugo. Das Carcinom des Menschen, sein Bau, sein Wachstum seine Entstehung. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Krebsforschung », Band XIII). Berlin, 1913. 8°.

ORTH J. — Ueber eine Geschwulst des Nebennierenmarks nebst Bemerkungen über die Nomenklatur der Geschwülste. (Sonderabd. aus « Sitzungsberichte der kön. preussischen Akad. der Wissenschaften », 1914). Berlin, 1914. 8°.

PAOLINI V. — Il tufo campano di Vico Equense. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XV). Napoli, 1913. 8°.

TARAMELLI T. - Il paesaggio della « Gioconda » e l'uomo pliocenico di Castel nedolo. (Estr. dai « Rend. del R. Istit. lombardo di scienze e lettere », volume XLVII). Pavia, 1914. 8°.

TRANCOSO F. — As radiações ultra violetas e infra-vermelhas, seu estudo e aplicações. Lisboa, 1913. 8°.

VERWORN M. — Irritability. A physiological Analysis of the general effect of stimuli in living substances. New Haven, 1913. 8°.

VOLTERRA V. — Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik: gehalten im September 1909 an der Clark-University. Mit Zusätzen und Ergänzungen des Verfassers deutsch von Dr. Ernst Lamla. Leipzig, 1914. 8°.

WAGNER H. — Der Kartenmasstab. Historisch-kritische Betrachtungen. (Sonderabd. aus « Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin ». 1914). Berlin, 1914. 8°.

WAGNER H. — Zur Geschichte der Seemeile. (Sonderabd. aus « Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie », 1913 Berlin, 1913. 8°.

WALLACE CAMPBELL W. — Stellar Motions with special referenee to motions determined by meary of the Spectrograph. New Haven, 1913. 8°.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Gianfranceschi. Per lo studio del corista campione dell'Ufficio Centrale italiano (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . Pag. 629
Acqua. Osservazioni ed esperienze sul baco da seta (pres. dal Socio *Grassi*) . . . . . . „ „

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Blaserna (Presidente). Fa omaggio di una pubblicazione del Socio straniero *Walcott* . „ „

BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . „ 630

RENDICONTI — Aprile 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Volterra. Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali . . . Pag. 551
Angeli. Sopra gli azossifenoli . . . » 557
Almansi. Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento . » 570
Severi. Sugli integrali abeliani riducibili . . . » 581
Bottasso. Sull'operatore differenziale binario S di M. Pieri (pres. dal Corrisp. *Marcolongo*) (*) » 588
Cisotti. Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . » »
Cotton. Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles (pres. *Id.*) . . . » 592
Munari. Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività (pres. *Id.*) (*) » 596
Signorini. Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica (pres. *Id.*) . . . » »
Silla. Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funz'oni ortogonali (pres. dal Socio *Volterra*) . . . » 600
Viaro. Sulla costruzione delle tavole per correzione del passo dei microscopî micrometrici (pres. dal Socio *Millosevich*) (*) . . . » 607
Tonelli. Su una proposizione dell'Almansi (pres. dal Corrisp. *Almansi*) (*) . . . » »
Godeaux. Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un (pres. dal Corrisp. *Enriques*) (*) » »
Lo Surdo. Sulla formazione della rugiada e della brina (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) (*) . » »
Amadori. Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio (pres. dal Socio *Ciamician*) (*) . . . » 608
Bianchini. Sull'incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo (pres. dal Corrisp. *Piutti*) » »
Ciusa e *Piergallini.* Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce (pres. dal Socio *Ciamician*) (*) . . . » 615
Rolla. Sul calore specifico delle leghe metalliche costituite da soluzioni solide (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . » 616
Lumia. Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno (pres. dal Socio *Cuboni*) (*) . . . » 622
Brunacci. Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni; importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria (pres. dal Socio *Luciani*) . . . » »
Basile. La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo. Contributo critico agli esperimenti di trasmissione (pres. dal Socio *Grassi*) . . . » 625

(Segue in terza pagina)

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 3 maggio 1914.* **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 9°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

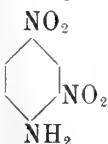
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

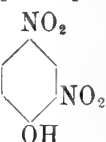
Seduta del 3 maggio 1914.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *La trinitrobenzina asimmetrica 1. 2. 4.* Nota del Socio G. KOERNER e del dott. A. CONTARDI.

I tentativi fatti da Paolo Hepp (¹), per preparare la trinitrobenzina 1. 2. 4 non condussero a un prodotto ben definito e puro, ma il lavoro dimostrò fuori di ogni dubbio che nella nitrazione della paradinitrobenzina si formava anche questo trinitroderivato.

Nel 1890 il Lobry de Bruyn (²) riprese lo studio di questo trinitrobenzolo e modificò il processo di nitrazione, sia rispetto ai rapporti tra la binitrobenzina e la miscela nitrante, sia nella composizione della miscela nitrante stessa, sia ancora nella durata della reazione, e mutò infine totalmente il sistema di separazione dei prodotti risultanti dalla reazione. Mentre, infatti, l'Hepp aveva sempre cercato di separare la miscela della trinitrobenzina asimmetrica dalla paradinitrobenzina basandosi sulla diversa solubilità delle due sostanze nei varî solventi, il Lobry de Bruyn impiegò come mezzo di separazione la diversa volatilità delle due sostanze stesse. E così egli separò dalla miscela per sublimazione quasi tutta la paradinitrobenzina inalterata, e purificò il residuo mediante trattamento con acido nitrico e successiva cristallizzazione dall'etere o dall'alcool metilico. Egli descrisse la trinitrobenzina dissimmetrica come una sostanza ben cristallizzata, di color giallo chiaro, fusibile a 57°,5. Però nelle determinazioni della solubilità della so-

(¹) Ann. d. Chem., 215, pag. 361.
(²) Recueil d. Trav., 9, pag. 186.

stanza stessa nei varî solventi si accorse che quantunque rispondesse assai bene ai dati analitici, pure essa doveva contenere almeno il quattro per cento di paradinitrobenzina, che non riuscì a separare.

Noi abbiamo ripreso lo studio di questo trinitroderivato cambiando totalmente e il materiale di partenza e il processo di preparazione.

NO_2

Nella dinitroanilina ordinaria (anello benzenico) NO_2 fondente a 180° abbiamo sostituito

NH_2

tuito il gruppo amidico con un gruppo nitrico passando attraverso al nitrato del diazocomposto e seguendo il processo da noi già in altra Nota descritto (1).

Si trattarono gr. 54 di dinitroanilina ordinaria con lo stesso peso di acido nitrico della densità = 1,48; e a 0° la miscela venne fatta attraversare da una corrente di vapori nitrosi fino a completa saturazione, agitando continuamente la massa in modo che il nitrato del diazocomposto, che si andava formando, non dovesse agglomerarsi in un blocco compatto in modo da rendere difficile e pericoloso in seguito il maneggio della sostanza, data la sua grande potenza esplosiva. Scacciati con una corrente d'aria i vapori nitrosi in eccesso, diluito con pochissima acqua a 0° la miscela, raccolto il precipitato su rete di platino e aspirato, il nitrato del diazocomposto venne disciolto in mezzo litro d'acqua fredda, indi a 0° trattato con una soluzione formata da gr. 250 di solfato di rame cristallizzato, gr. 69 di nitrito sodico, disciolti in gr. 1500 di acqua. Lasciato a sè il tutto per qualche ora veniva in seguito riscaldato a b. m. Sul fondo del recipiente si raccoglie un olio bruno che per raffreddamento solidifica. Estratto questo con cloroformio e ripetutamente lavata la soluzione cloroformica con acqua, per evaporazione del solvente si ottennero gr. 45 di un olio bruno che dopo breve riposo si rapprendeva in una massa cristallina. La purificazione venne in seguito eseguita riscaldando il prodotto per parecchie ore con acido nitrico della densità 1, 4; evaporata la massima parte dell'acido, la sostanza risultante venne ripetutamente trattata a b. m. con acqua per togliere l'acido picrico formatosi per il precedente trattamento. Nella reazione di sostituzione del gruppo amidico con quello nitrico una parte piccola del diazocomposto dà luogo alla forma-

NO_2

zione del dinitrofenolo (anello benzenico) NO_2 che viene trattenuto facilmente dalla trini-

OH

tro-benzina, ed in seguito per trattamento con l'acido nitrico si trasforma in acido picrico. La trinitrobenzina, così purificata, veniva nuovamente cristallizzata dall'acido nitrico diluito, indi lavate ed essiccate le laminette lucenti

(1) Rendiconti, R. Acc. Lincei vol. XIII, Serie 5ª, 1° sem., pag. 281.

e incolore ottenute dall'acido nitrico, venivano nuovamente cristallizzate da etere. La parte ancor bruna rimasta indisciolta nell'acido nitrico diluito che non si poteva imbiancare per un nuovo trattamento con acido nitrico d = 1,4, venne estratta con cloroformio, filtrata dalla resina rimasta insolubile e decolorata con nero animale.

Per lenta evaporazione dell'etere la trinitro-benzina 1, 2, 4 si ottiene cristallizzata in sottili lamine quasi incolore, molto solubili nell'etere, fondenti a 61° (termometro n. 21 474 normale).

La determinazione d'azoto ha dato:

Sostanza impiegata gr. 0,2112.

Azoto cc. 36,2 a t = 24° H = 758.

Azoto trovato % 19,69.

Azoto calcolato per $C_6H_3(NO_2)_3$ % 19,7.

La trinitrobenzina riscaldata in tubo chiuso a 140° con ammoniaca alcoolica si trasforma quantitativamente nella dinitroanilina dalla quale si era partiti.

Sono in corso esperienze per ottenere la trinitrobenzina 1, 2, 3 sinora sconosciuta, e speriamo di poter presto riferire in proposito.

Correzione alla Nota: *Benzine nitro-sostituite ottenute dai corrispondenti amino-derivati.*

(Rendiconti, vol. XXIII, serie 5ª, fasc. 5°).

La prima equazione a pag. 283, riga 7, è stampata in modo incompleto e va corretta in:

$$2\,C_6H_5NH_2 \cdot HNO_3 + 2\,Cu(NO_2)_2 = 2\,C_6H_5N \cdot NOH + Cu(NO_3)_2 + Cu(NO_2)_2 + 2\,H_2O\,.$$

Geologia. — *Su una Nota di Steinmann intorno alle rocce di Prato in Toscana.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Lo Steinmann ha recentemente pubblicato una breve Nota sopra i calcari e i Diaspri o Radiolariti concomitanti delle rocce serpentinose dei dintorni di Prato in Toscana, e precisamente di Figline in Val di Ripa [1], e dà pure uno spaccato geologico della regione. Egli deduce che i Diaspri, insieme con le Serpentine formanti una zona periferica, esterna, alla collina, appartengono al Malm medio; i calcari ed i galestri più interni e concordanti con le rocce precedenti, appartengono al Titonico, cioè al Giura più alto, ovvero al Neocomiano, fondato sur una foraminifera, la *Calpionella alpina* Lorenz, che egli vi ha ritrovato, la pietra forte al Cenomaniano; il macigno al Turoniano, Senoniano e incertamente al Terziario inferiore.

[1] G. Steinmann, *Ueber Tiefenabsätze des Oberjura im Apennin.* (Geologische Rundschau, Bd. IV, Heft 7; 13 novembre 1913).

Questa regione fu già oggetto di studio, specialmente per la litologia, — oltre che da Bonney (1879) che riteneva diaspri e fitaniti concotte dal fuoco, e da Sterry Hunt (1883) che riteneva paleozoica la formazione, — da parte del Cossa, di Celso Capacci ([1]), del Lotti ([2]) e del Panichi ([3]), i quali pure accompagnarono le loro Note con alcuni spaccati geologici.

Se si dovesse correr dietro a tutte le discrepanze d'opinione che si manifestano in un argomento così personale e subiettivo come è quello della geologia topografica locale, si farebbe opera il più delle volte vana e si perderebbe il tempo a scapito delle ricerche e degli studî nuovi che ognuno deve sopra tutto curare: ma quando si tratta del parere di uno scienziato della riputazione dello Steinmann, vale la pena d'intrattenervisi. Il nostro A. si fonda sull'alberese a *Calpionella*, e sui Diaspri, anche sulla posizione stratigrafica di essi, come dicevo, esterni al colle e periferici alla pianura, poichè pendono contro questa, cioè verso l'interno del monte. Si tratta di uno di quei rovesciamenti periferici così frequenti all'esterno di un sistema montuoso, che si manifestano specialmente quando sieno a contatto rocce di plasticità così grandemente diversa, come sono appunto quelle della regione di Prato. Il compianto Giordano, per stabilire se vi fosse rovesciamento o no e per determinare la posizione stratigrafica di quelle rocce esterne, aveva fatto la proposta, a vero dire più da ingegnere che da geologo, di aprire un foro per vedere che cosa si trovasse sotto. Ma quelle rocce sono identiche a quei diaspri, calcari, galestri, gabbri, diabasi e serpentine che appaiono poco lontane, in regolare posizione, all'Impruneta presso Firenze ([4]), come pure, regolarmente, nell'Appennino a tutte le parti dell'orizzonte, e fra noi non vi è contestazione che appartengano all'Eocene superiore, non già al Giura rappresentato da ben altre rocce (il Titonico ed il Lias, anche da diaspri), e separato da alta serie di terreni terziarî anche fossiliferi.

I calcari e le argille adiacenti partecipano anch'essi in parte al rovesciamento; perciò lo Steinmann li ritiene sovrastanti ai diaspri, e li attribuisce al Neocomiano: ma in realtà sono sottostanti e relativamente più antichi. Per poco che l'A. avesse seguitato verso N-E, avrebbe veduto la serie regolarmente invertirsi, diventare ampiamente regolare e formare un ampio e regolare anticlinale; ciò vedesi in parte anche negli spaccati, sebbene limitati e locali, del Capacci, del Lotti, del Panichi, i quali tutti ammisero l'esistenza d'inversioni, senza darne completamente ragione, per non avere seguìto tutta la serie più a settentrione. La serie degli strati in quell'anti-

([1]) C. Capacci, *La formazione ofiolitica del Monte Ferrato* (Boll. Comm. geol. 1881).

([2]) B. Lotti, *Rilevamento geologico eseguito in Toscana* (Boll. Comm. geol 1894).

([3]) U. Panichi, *Ricerche petrografiche, chimiche e geologiche sul Monte Ferrato* (Atti Soc. tosc. di sc. nat., Pisa, 1909).

([4]) C. De Stefani, *Carta geologica dei dintorni di Firenze, Osservazioni geologiche sul terremoto di Firenze del 18 maggio 1895*, Roma 1897.

clinale accompagnato da lievi pieghe laterali, è la seguente, cominciando dal basso:

1. Arenaria macigno di Val di Bisenzio. In valle del Mugnone contiene *Nummulites lenticularis* Désm., *N. venosa* Ficht et Moll, *N. sub Beaumonti* De la H., *N. Tchihatcheffi* D'Arch., ed appartiene all'Eocene medio, al Luteziano Superiore. In qualche luogo, p. e. alla Golfolina, si trovano, al di sotto, strati litologicamente simili ai seguenti.

2. Strati, nella regione Pratese non molto alti, in prossimità dell'arenaria, mentre assai più lo sono nell'adiacente Val di Sieve, e verso Firenze, di calcari da cemento, galestri scuri, pietra forte con *Inocerami* indubbiamente eocenici, *Ostrea Cocchii* De St., *Pennatulites, Nummulites subitalica* Tellini, *N. italica* Tell, *N. Guettardi* D'Arch., *N. venosa* Ficht. et Moll., *N. variolaria* Sow., *N. subirregularis* De la H., *N. sub Beaumonti* De la H., etc. etc. Appartengono alla più alta parte dell'Eocene medio, al Bartoniano. Le *Nummuliti* vi sono abbondantissime in lenti speciali. Il calcare è formato da *Globigerinidae* abissali.

3. Calcari marnosi assai alti, specialmente ad Oriente, pure a *Globigerinidae* con *Helminthoidea labyrinthica* H., e nei dintorni di Firenze con *Nummulites Boncheri* De la H., *N. laxispira* De la H., *N. Tournoueri* De la H., *N. bericensis* De la H., *N. budensis* Hant, *N. curvispira* Mgh., *N. subirregularis* De la H., cec. [1]. Rappresentano in Toscana la parte inferiore dell'Eocene superiore, il Priaboniano. In Liguria gl'*Inoceramus* arrivano fino a questo piano entro i calcari di mare profondo.

4. Alberesi, galestri, diaspri, rocce eruttive già detti. Nel Fiorentino, fuori delle alghe e delle solite impronte problematiche, non si trovarono che radiolarie nei diaspri, foraminifere (*Globigerinidae*, ed ora, secondo lo Steinmann, *Calpionella alpina*), nei calcari, tronchi silicizzati di *Alnus* Sp. e di *Cupressoxylon peucinum* Goepp. [2] all'Impruneta, e i denti di *Ptychodus latissimus* Ag. al Poggio al Pino [3]: ma fuori vi si trovarono pure delle nummuliti, e spicule di spugna e radiolarie trasformate spesso in calcite. La posizione stratigrafica sopra tutta la serie, al sommo dell'Eocene superiore, è, per quasi tutti i geologi italiani, omai sicura.

Non vi ha traccia, in quei luoghi, di Giura nè di Creta; le rocce di tali età sono nell'Appennino assai diverse, e ben differente è l'unico lembo più vicino di Creta superiore a Monteripaldi presso Firenze.

(1) M Rivagli, *Nummuliti e orbitoidi eoceniche dei dintorni di Firenze* (Palaeontographia italica, vol. XVI, 1910).

(2) L. Pampaloni, *Sopra alcuni tronchi silicizzati dell'Eocene superiore dell'Impruneta* (Boll. della Soc. geol. it., vol., XXI, 1902, p. 25).

(3) G. Canestrelli, *Denti di Ptychodus Agass, nel terziario dell'Appennino tosco-emiliano* (Atti Soc. tosc. di sc. nat., vol. XXVI, Pisa 1910, p. 102).

Se non che lo Steinmann, oltre che sull'esame stratigrafico e litologico imperfetto di breve spazio, si fonda principalmente sopra un indizio paleontologico dato, secondo lui, dalla *Calpionella alpina* Lorenz, e dai dispri. Già da molti anni il Pantanelli, troppo presto rapitoci (e fu il primo a vedere le radiolarie nei diaspri), aveva descritto radiolarie dell'Eocene superiore [1]. Parmi che, dopo di lui, niun altro ne descrivesse in Italia, attribuendole a quella età. Il Rüst, venuto 5 anni dopo di lui e descrivendo radiolarie giuresi di Germania, si mostrò sorpreso delle determinazioni del suo predecessore; e non prestando fede all'età eocenica, che pure era esattamente determinata, ritenne giuresi anche quelle radiolarie italiane. Da allora in poi, quando si ritrova un diaspro, che non sia di età più antica determinata, pel solo fatto di esser diaspro, si attribuisce al Giura. In realtà, trattandosi di organismi così semplici e microscopici, non si riesce a trovare gran differenze fra radiolarie dei diaspri giuresi, cretacei ed eocenici, ed una cagione dell'incredulità straniera è pur questa: che formazioni eoceniche a diaspri, cioè di mare assai profondo, non rispondenti ai tipi classsici dell'Eocene, fuori dell'Italia e della Balcania non se ne conoscono, e queste perciò non rispondono ai tipi dell'Eocene conosciuto nei manuali, anche in quelli dello Steinmann. Non deve perciò sorprendere se il paleontologo Steinmann, trovando dei diaspri in Italia, propenda a ritenerli giuresi; nè deve sorprendere che nei calcari, da noi ritenuti eocenici, trovi la *Calpionella* indicata altrove nel Giura superiore e nella Creta inferiore; nè che egli si sia contentato di fare troppo breve osservazione stratigrafica; nè che, secondo un costume, per verità troppo poco scientifico, d'oltr'alpe, abbia mancato di meglio informarsi dei lavori nostri.

Tanto meno dovrei sorprendermi delle imperfette osservazioni dell'illustre collega germanico; perchè i nostri colleghi italiani fanno per lo meno altrettanto.

Due valentuomini come Vinassa e Neviani hanno descritto da molto tempo come Titoniani, cioè giuresi, diaspri di Grizzana e Lagàro e di altri luoghi nel Bolognese [2], raccolti da altri ed attribuiti al Titonico solo perchè diaspri, e perchè creduti erratici nelle argille scagliose, senza curarsi di studiarne e determinarne bene la stratigrafia e l'età sul posto. Ma quelli sono puramente e semplicemente appartenenti all'Eocene superiore insieme con le argille galestrine, coi calcari, con le rocce eruttive che li avvicinano e li circondano. E poichè un errore, come le ciliege, tira l'altro, lo Squinabol

[1] D. Pantanelli, *I diaspri della Toscana e i loro fossili* (Mem. Acc. Lincei, vol. VIII, 1879-80).

[2] P. Vinassa De Regny, *Rocce e fossili di Grizzana e di Lagàro nel Bolognese* (Bell. Soc. geol. it., vol. XIX; 1900); A. Neviani, *Supplemento alla fauna a radiolari delle rocce mesozoiche nel Bolognese* (Boll. Soc. geol. it., vol. XIX, 1900).

recentemente, esaminando diaspri del Monginevro nelle Alpi Occidentali ([1]), li attribuiva al Titonico per identità di due specie con altre di Cittiglio e con altre due del Bolognese ritenute pure giuresi. Bensì, se egli dà valore a quel paragone paleontologico, può attribuire anche i diaspri del Monginevro all'Eocene superiore. Che tali sieno in realtà, ne sono persuaso, perchè, nell'ultima Nota che ebbi l'onore di presentare ai Lincei ([2]), ho attribuito precisamente all'Eocene superiore le rocce verdi che accompagnano quei diaspri ([3]).

Lo Steinmann trova la *Calpionella* anche nell'alberese concomitante la formazione serpentinosa al M. Maggiore nei Colli Livornesi, ad occidente di Portoferraio e a Casa Bartoli all'Elba, sempre nella stessa formazione delle rocce verdi; e quegli alberesi pure attribuisce al giura superiore od alla creta inferiore. In questi luoghi, specialmente nei monti Livornesi, si ripete la medesima stratigrafia dei monti di Prato. Presso Montenero e alla Poggia, negli alberesi, nella più alta parte della formazione serpentinosa stanno lenti di calcare nummulitico trovate dal Salle.

Nell'isola d'Elba, oltre il Nummulitico dell'isoletta dei Topi da me trovato, il Lotti lo indica verso l'Acona sopra il calcare ad *Helminthoidea* e sotto calcari rosati e diabasi..

Quanto alla pietraforte cenomaniana, anzi, della creta superiore, essa si trova all'infuori del *Macigno.* Sopra il *Macigno* si trovano bensì, sovente *Iuoceramus* in posto: e se ciò non combina coi trattati di paleontologia, e nemmeno con quelli dello Steinmann, combina però con la realtà, sempre per la solita ragione che le faune eoceniche abissali dell'Appennino non sono prese in considerazione. Il *Macigno,* a sua volta, non contiene mai fossili più antichi dell'Eocene medio. Gli *alberesi,* ed in generale i calcari dell'Eocene appenninico, sono costituiti da foraminifere abissali, per lo più *Globigerinidae,* le quali non sono mai isolate; si comprende che i paleontologi abbiano preferito studiare le *Nummulitidi* ben conservate che talora racchiudono in lenti, piuttosto che le altre foraminifere le quali, in sezioni, sarebbero di incompleta determinazione specifica e di assai dubbia utilità. Non metto in dubbio che vi si trovi una foraminifera, la *Calpionella,* comune altrove nel Giura superiore e nella Creta inferiore: terrà compagnia alle radiolarie che altri attribuisce sempre al Giura ma che si trovano bene e meglio nell'Eocene superiore; e terrà compagnia a qualche altra specie abissale attribuita a terreni alquanto più antichi perchè

([1]) S. Squinabol, *Radiolari della strada nazionale al Monginevro* Boll. R. Comm. geol., vol. XLIII, 1913, p. 282).

([2]) C. De Stefani, *La zona serpentina della Liguria occidentale* (Rend. Acc. Lincei, 18 maggio 1913).

([3]) Debbo soggiungere che alcuni dei calcari creduti triassici in Val di Bormida facenti parte della zona delle rocce verdi credute permiane sono invece calcari nummulitici eocenici.

manca nell'Eocene littorale finora conosciuto. A tali specie *relitti* non si può dare la prevalenza sulle numerose specie eoceniche e specialmente sulle *Nummulitidi* che si trovano dappertutto a tutti i livelli dell'Eocene e non soltanto sotto il *Macigno* o sopra le serpentine, e che sono state ormai discretamente studiate e determinate da noi. Quanto al carreggiamento della zona serpentinosa sulla quale lo Steinmann insiste, io non mi diffonderò: non uno dei geologi italiani o stranieri che abbia studiato la zona sui posti e non sulle carte stampate, può ritenerla ammissibile: il vedere che altri la suppone *carreggiata*, farebbe venire il dubbio sull'esistenza di *carreggiamenti* anche nei luoghi dove veramente esistono.

Terminerò, volgendolo in italiano, con lo stesso epifonema diretto a noi dallo Steinmann. Egli desidera da noi schiarimenti sulle « numerose contradizioni » nelle quali, dice egli, siamo caduti, « se noi non vogliamo rinunziare a fondare le nostre conclusioni coi metodi che si debbono usare nella geologia ». Ma la geologia si fonda sulla conoscenza della stratigrafia, ben inteso studiata sul posto e non sulle carte o soltanto sugli scritti dell'uno piuttosto che dell'altro; e della paleontologia, ben inteso non solo di quella talora schematica di uno o di altro trattato, non di una sola foraminifera o di una radiolaria, ma di tutti i fossili raccolti noti e studiati. Ora se l'illustre collega Steinmann avesse preso a fondamento l'una e l'altra, sarebbe arrivato a conclusioni più semplici e più naturali [1].

[1] Forse lo Steinmann fu alquanto disorientato dalla *Carta geologica d'Italia*, foglio 106 Firenze, pubblicata dall'Ufficio geologico. Prescindendo dalla parte strettamente litologica, nella distribuzione e nella serie dei terreni terziarî si potrebbero rilevare molte imperfezioni. Cominciando dal terreno più antico, l'*Arenaria Macigno* ($e'a$), non devesi confondere con questa il calcare marnoso sulle destra della Sieve, nè l'arenaria di M. Ripaldi. Quest'ultima contiene cefalopodi, non nummuliti, ed appartiene alla Creta superiore. Il calcare marnoso di val di Sieve non è un'arenaria, e contiene nummuliti in quantità, non che strati arenacei con *Inoceramus*. Perciò la spiegazione della *Carta geologica* doveva dire semplicemente « arenaria (*macigno*) con nummuliti », e fermarsi qui: lasciando fuori il sèguito « arenaria calcarifera (pietraforte) con ammoniti, inocerami ed altri fossili probabilmente di trasporto ». Avvertasi pure che il trasporto di questi fossili è supposto nella dicitura, ma non esiste in realtà, ed in ciò sono in parte d'accordo col Lotti che rilevò quei terreni. A questa *Arenaria Macigno* (e^1_a) attribuiscasi invece la così detta « Arenaria superiore » (e^3) che forma qualche lembo a destra della Sieve, senza aggiungere « con strati calcarei e letti marnosi intercalati » L' « Arenaria superiore » (e^3) del versante Fiorentino, nella quale piuttosto prevalgono gli « strati calcarei e letti marnosi intercalati » (e^3), che contiene Inocerami e Nummuliti, invece di essere la roccia Eocenica superiore a tutte, e tolta qualche parte che equivale all'*Arenaria Macigno* (e'_a), succede alla detta *Arenaria Macigno* e andrebbe messa con gli « scisti arenacei ed argillosi rossi e grigi » (e^1_s). Nella spiegazione della carta succedono diaspri e ftaniti a radiolarie che accompagnano le masse ofiolitiche » (e^3_d): e sono i diaspri di Prato; ma questa roccia è la più alta di tutte, e andrebbe messa con parte dell'e^2, cioè coi « calcari (alberesi), scisti argillosi » che formano la più alta serie dell'Eocene intorno a Prato ed all'Impruneta. Invece l'altra parte dell'e^3 a nord e a sud-ovest di Firenze, cioè « cal-

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

4. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA GENERALE. — Le condizioni più generali sotto cui una varietà algebrica può possedere un'infinità (discontinua) di sistemi regolari d'integrali riducibili, sono espresse dal seguente teorema:

I. *Quando sopra una varietà (o curva) algebrica possedente p integrali semplici di 1ª specie, esistono $\mu (\geq 2)$ sistemi regolari indipendenti di $q_1, q_2, \dots, q_\mu$ integrali riducibili (ove $q_1 + \cdots + q_\mu \leq p$), ed un altro sistema regolare ∞^{q-1}, indipendente da ciascuno di essi, ma contenuto nel loro sistema congiungente, la varietà possiede un'infinità discontinua di sistemi regolari di q integrali riducibili.*

Dicendo che i μ sistemi dati, $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, sono *indipendenti*, intendiamo che non esista alcun legame lineare (a coefficienti non tutti nulli) fra i loro integrali, cioè che il loro sistema congiungente (regolare) K, abbia la dimensione $\sum_{i=1}^{\mu} q_i - 1$. L'ulteriore sistema regolare ∞^{q-1}, che si suppone contenuto in K, verrà indicato con A.

Ricorrendo, al solito, alla rappresentazione degli integrali della data varietà, coi punti dello spazio S, a $p-1$ dimensioni, avremo ivi gli spazî $A, A_1, \dots, A_\mu, K$ imagini dei sistemi omonimi. Nelle ipotesi poste, gli spazî $A_1, A_2, \dots, A_\mu$ sono tra loro indipendenti, ed A è indipendente da ciascuno di essi.

Indicato con Σ_h lo spazio, a $\Sigma q_i - q_h - 1$ dimensioni, congiungente i $\mu - 1$ sistemi $A_1, \dots, A_{h-1}, A_{h+1}, \dots, A_\mu$, si prova facilmente, con elemen-

cari *non alberesi*, scisti argillosi e pietra forte in strati alternanti con nummuliti ed inocerami, probabilmente (anzi certamente non) di trasporto », forma una zona immediatamente sovrastante a quella dell'*Arenaria Macigno* insieme con l'e^1_s, ed a questa zona, non a quella e^2_c, dovevasi aggiungere « pietra da calce idraulica e da cementi ». A questa zona rispondono alcuni degli strati più a monte nei dintorni di Prato, confusi con la zona e^2. Finalmente la zona e^2_c è definita come « calcari » (non) « alberesi, con *Helminthoidea labyrinthica* e straterelli di arenaria interposti », Ma non è la più alta dell'Eocene: tali sono invece le zone e^3_d ed in parte la e^2.

Lo Steinmann, forse, in questo ordinamento non si è bene raccapezzato e non ha conosciuto i lavori di quelli che hanno compreso in modo differente la serie geologica dei dintorni di Firenze e dell'Appennino.

tari considerazioni iperspaziali (¹), che gli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$ non hanno punti comuni. È questa un'osservazione che ci gioverà al n. 8.

Dico ora che per dimostrare il teorema I, basta limitarsi a considerare il caso in cui i $\mu+1$ sistemi $A, A_1 \ldots, A_\mu$, sono a μ a μ indipendenti. Supponiamo, perciò, che il teorema sia già stato dimostrato sotto questa condizione, e si consideri il caso in cui la condizione stessa non è soddisfatta. Allora lo spazio A s'appoggerà a qualcuno degli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$. Si appoggi, p. es., a Σ_μ, e sia A' lo spazio a $q'-1$ $(q' \leq q)$ dimensioni, intersezione di A e di Σ_μ. Avremo entro al sistema regolare Σ_μ, congiungente dei sistemi indipendenti $A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1}$, un sistema regolare A', indipendente da ciascuno di essi. Se i μ sistemi $A', A_1, \ldots, A_{\mu-1}$ sono a $\mu-1$ a $\mu-1$ indipendenti, si potrà applicare il teorema I; se no, si proseguirà similmente, passando da μ sistemi a $\mu-1$, e così via.

Si perverrà infine ad un sistema regolare $A^{(j)}$, di dimensione $q^{(j)}-1$, contenuto in A, e a cui sarà applicabile il teorema I, per modo che $A^{(j)}$ apparterrà ad un'infinità discontinua di sistemi analoghi.

Detto $B^{(j)}$ un complementare di $A^{(j)}$ in A, i sistemi che congiungono $B^{(j)}$ con quelli della suddetta infinità discontinua, saranno altrettanti sistemi regolari di dimensione ∞^{q-1}. E il teorema I risulterà pertanto stabilito, anche a prescindere dalla restrizione posta.

Esaminiamo dunque il caso in cui gli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. Da ogni punto di A esce allora (²) uno, ed un solo spazio, $S_{\mu-1}$, appoggiato ulteriormente in un punto ad $A_1, A_2, \ldots A_\mu$. Fissato uno, C, di questi ∞^{q-1} $S_{\mu-1}$, su esso, $A, A_1, \ldots, A_\mu$ segnano rispettivamente $\mu+1$ punti indipendenti $a, a_1, \ldots, a_\mu$, i quali possono assumersi come base di una rete di Möbius di specie $\mu-1$; ed è chiaro che gli spazî dedotti da $A, A_1, \ldots, A_\mu$ con operazioni interne di proiezione e di sezione, restano biunivocamente coordinati alle loro traccie su C, cioè agli spazî $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-2}$, appartenenti alla suddetta rete. Cosicchè quegli spazî risultano in numero infinito come queste traccie. In particolare, agl'infiniti vertici della rete restano coordinati infiniti S_{q-1}, rappresentanti altrettanti sistemi regolari.

Resta così dimostrato il teorema I, e *si vede inoltre come gl'infiniti sistemi regolari* ∞^{q-1}, *deducibili dai* $\mu+1$ *sistemi dati, possan coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie* $\mu-1$.

Ciò dà l'esatta struttura dell'infinità discontinua formata dai sistemi regolari ∞^{q-1}, appartenenti alla nostra varietà: gli elementi di quell'infinità sono infatti assimilabili ai *punti razionali* di uno spazio $S_{\mu-1}$.

(¹) Cfr., p. es., Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 12-13. Qui, veramente, si considera lo spazio comune alle proiezioni di $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\mu$ da un generico punto di K. Ma, nel caso nostro, vale lo stesso ragionamento.

(²) Ved. Bertini, loc. cit.

L'unico caso che sfugge alla dimostrazione precedente, è quello $\mu = 2$, giacchè allora C è una retta. Ma in tal caso si procederà come nell'osservazione alla fine del n. 3. Si comincerà cioè coll'ampliare il sistema K, facendone la proiezione da un sistema B d'integrali riducibili, identico, per esempio, ad A; e si osserverà che il sistema L, ∞^{2q-1}, congiungente A, B, contiene infiniti sistemi analoghi ad A, B, ognuno dei quali si ottiene combinando linearmente, con due prefissati coefficienti intieri, le coppie d'integrali corrispondenti di A, B. Si può pertanto assumere in L un sistema A' — indipendente da A, B — per guisa che i quattro sistemi A', B, A_1, A_2 siano a tre a tre indipendenti. Si ricade allora nel caso $\mu = 3$, e si conclude che nel sistema K esistono infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, biunivocamente coordinati ai vertici di una rete di Möbius di specie 1.

Osservazione. — Se la varietà V possiede almeno due sistemi regolari indipendenti A, B d'integrali riducibili, tali che B sia indipendente anche da un complementare C di A, poichè A, C sono pur essi indipendenti, e, d'altra parte, al loro sistema congiungente S appartiene B, applicando il teorema precedente ($\mu = 2$), si ha che:

Una varietà algebrica, la quale possegga due sistemi regolari indipendenti A, B *d'integrali riducibili, tali che l'uno,* B, *di essi, sia indipendente anche dal sistema complementare di* A, *contiene in conseguenza tutta un'infinità discontinua di sistemi regolari, della stessa dimensione di* A *o di* B.

Da ciò segue che *se il complementare di un dato sistema regolare* A, *non è individuato, la varietà contiene infiniti sistemi regolari, della stessa dimensione di* A. Invero, se B, C son due diversi complementari di A, e se essi son tra loro indipendenti, vale quanto precede. Se invece B, C hanno in comune un sistema (regolare) D, il complementare E di D, p. es., entro C, è indipendente da A e da B, e quindi si ricade ancora nel caso precedente.

5. Configurazioni normali di sistemi d'integrali riducibili. — La costruzione geometrica esposta nel n. 4, si può determinare ulteriormente, qualora si supponga che gli spazî A, A_1, ..., A_μ, a μ a μ indipendenti, abbiano la stessa dimensione $q - 1$

Ma prima di occuparci di ciò, mostriamo come a questo caso ci si possa sempre ridurre, quando V possegga infiniti sistemi regolari d'integrali riducibili.

È invero ben chiaro, anzitutto, che, in tale ipotesi, esisteranno sempre $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) sistemi regolari A, A_1, ..., A_μ nelle condizioni dell'enunciato del teorema I. Si può inoltre ammettere (n. 4) che gli spazî A, A_1, ..., A_μ siano a μ a μ indipendenti, e, quindi (poichè il loro spazio congiungente K ha la dimensione $\Sigma q_i - 1$), che $q \leq q_i$ ($i = 1, 2, ..., \mu$).

Poniamo precisamente $q \leq q_1 \leq q_2 \ldots \leq q_\mu$. Allora lo spazio Σ, congiungente $A, A_1, \ldots, A_{\mu-1}$, incontra A_μ in uno spazio A'_μ di dimensione $q-1$, per modo che entro a Σ si hanno $\mu+1$ sistemi $A, A'_\mu, A_1, \ldots, A_{\mu-1}$, di dimensioni rispettive $q-1, q-1, q_1-1, \ldots, q_{\mu-1}-1$, a μ a μ indipendenti. Lo spazio Σ' congiungente $A, A'_\mu, \ldots, A_{\mu-2}$, incontra similmente $A_{\mu-1}$ secondo uno spazio $A'_{\mu-1}$, di dimensione $q-1$; ecc. *Così proseguendo, si ottengono, entro uno spazio a $\mu q-1$ dimensioni, $\mu+1$ spazî a $q-1$ dimensioni, che indicheremo ancora con $A, A_1, \ldots, A_\mu$, a μ a μ indipendenti, e rappresentanti altrettanti sistemi regolari d'integrali riducibili.*

Gl'infiniti sistemi regolari dedotti da $A, A_1, \ldots, A_\mu$, con operazioni interne di proiezione e di sezione, si diranno costituire una *configurazione normale di sistemi ∞^{q-1} d'integrali riducibili.*

6. Il minimo continuo cui appartengono gl'infiniti sistemi di una configurazione normale. — Nello spazio K, di dimensione $\mu q-1$, sieno $A, A_1, \ldots, A_\mu$ i dati spazî a $q-1$ dimensioni, a μ a μ indipendenti, imagini di altrettanti sistemi regolari.

Vi sono ∞^{q-1} spazî C, a $\mu-1$ dimensioni, i quali s'appoggiano (in un punto) a ciascuno degli A. Essi riempiono una varietà, evidentemente razionale, M, a $\mu+q-2$ dimensioni, di cui vogliamo indicare rapidamente le più importanti proprietà, che si stabiliscono con elementari considerazioni di geometria proiettiva iperspaziale.

Due spazî A sono punteggiati omograficamente dagli spazî C, così che *la varietà M può anche definirsi come il luogo degli spazî congiungenti le μ-ple di punti omologhi tolti da μ spazî S_{q-1} omografici.* Ne deriva che q generici spazî C sono indipendenti, e che ogni S_{q-1}, il quale incontri $q+1$ spazî C generici (vi sono $\infty^{\mu-1}$ spazî S_{q-1} siffatti), incontra ogni altro C, cioè appartiene ad M.

La varietà M viene pertanto a contenere due schiere H_a, H_c, rispettivamente $\infty^{\mu-1}, \infty^{q-1}$ di spazî $S_{q-1}, S_{\mu-1}$: per ogni punto di M passa uno spazio dell'una schiera e uno spazio dell'altra; μ o, rispettivamente, q spazî generici della 1ª o della 2ª schiera, sono tra loro indipendenti; due spazî di una schiera sono punteggiati omograficamente da quelli dell'altra. Alla schiera H_a appartengono evidentemente gli spazî A dati.

Indichiamo, al solito, con Σ_i $(i=1, 2, \ldots, \mu)$ lo spazio che congiunge $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_\mu$. Per Σ_i passa un sistema lineare L_i, ∞^{q-1} di spazî $S_{(\mu-1)q}$ e, preso uno spazio di ciascuno degli L, resta individuato, come intersezione dei μ spazî scelti, un $S_{\mu-1}$, il quale appoggiasi ad A_1, $A_2, \ldots, A_\mu$ (¹). Ne deriva che *gli spazî generatori della schiera H_c possono tutti ottenersi come intersezioni di μ $S_{(\mu-1)q}$ omologhi in una pro-*

(¹) Bertini, loc. cit., pp. 12-13.

spettività, che nasce tra i sistemi L, prendendo per corrispondenti due spazî uscenti da un medesimo punto di A. *In maniera analoga si potrebbero ottenere gli spazî della schiera* H_a, a partire da $q+1$ spazî generatori di H_c.

Se indichiamo con

$$\nu_1 f_1^{(i)} + \cdots + \nu_q f_q^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

le equazioni dei sistemi lineari di iperpiani passanti per $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$, e supponiamo le f scelte in modo che nella prospettività d'asse A sieno omologhi μ iperpiani corrispondenti agli stessi valori delle ν, la M viene rappresentata dall'annullare i minori di secondo ordine della matrice delle f, ed ha quindi (¹) l'ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

È chiaro che uno spazio S_{q-1}, il quale sia deducibile con operazioni interne di proiezione e di sezione (in particolare, mediante costruzioni di quarti armonici), dagli spazî $A, A_1, \ldots, A_\mu$, appoggiasi in un punto a ciascuno dei C e quindi giace nella schiera H_a. Gl'infiniti spazî generatori di H_a, che si ottengono con tali operazioni, si può dire che formano una rete R di Möbius, la quale ha come « base » $\mu+1$ spazî S_{q-1} a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu q-1}$ (mentre quella considerata al n. 3, aveva come base un gruppo di $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$).

Ogni varietà *continua*, che, entro allo spazio ambiente S_{p-1}, contenga tutti gli S_{q-1} di R, dovrà contenere anche gli *spazî-limiti* di quelli, cioè *tutti* gli spazî generatori di H_a.

Si conclude pertanto:

II. *Quando una varietà (o curva) algebrica* V *contiene* $\mu+1$ *sistemi regolari* $A, A_1, \ldots, A_\mu$ $(\mu \geq 2)$, ∞^{q-1}, *a* μ *a* μ *indipendenti, ma congiunti da un sistema* K, $\infty^{\mu q-1}$, *d'integrali riducibili di 1ª specie, essa contiene in conseguenza infiniti altri sistemi regolari* ∞^{q-1}, *i quali costituiscono la rete di Möbius, di specie* $\mu-1$, *che ha come base* $A, A_1, \ldots, A_\mu$. *Il minimo continuo contenente quest' infiniti sistemi, entro alla totalità degl'integrali semplici di 1ª specie di* V, *è una varietà razionale* M, *di dimensione* $\mu+q-2$ *e di ordine* $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

Ogni varietà algebrica con infiniti sistemi d'integrali riducibili, possiede, per convenienti valori degl'interi μ, q, *una siffatta configurazione di sistemi regolari.*

7. Esistenza effettiva di varietà algebriche soddisfacenti alle ipotesi dei precedenti teoremi. — I teoremi fin qui dimostrati

(¹) Cfr. Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei (5), tomo IX, 1900, pag. 253.

lasciano in sospeso la questione d'esistenza di varietà, godenti delle proprietà indicate.

Fissato il numero p degl'integrali semplici, indipendenti di 1ª specie, d'una varietà algebrica — cioè la dimensione della relativa varietà di Picard — e scelti $\mu+1$ interi positivi, non nulli, $q, q_1, \dots, q_\mu$ $(q \leq q_1 \leq \leq q_\mu)$, tali che $q_1 + \dots + q_\mu \leq p$, si può costruire una varietà di Picard V_p, per la quale sieno soddisfatte le ipotesi del teorema I, e per conseguenza anche quelle del II?

Veramente, al n. 4 non si supponeva che q fosse il più piccolo dei $\mu+1$ interi fissati: ma, come abbiamo avvertito al n. 5, tale condizione, in realtà, non è restrittiva. La questione di ricercare se possa esistere una V_p contenente $\mu+1$ sistemi regolari, rispettivamente di $q, q_1, \dots, q_\mu$, integrali riducibili, a μ a μ indipendenti fra loro, ma congiunti da un sistema di dimensione $\Sigma q_i - 1$, in sostanza riducesi a esaminare se le equazioni lineari omogenee, a coefficienti interi, che, in virtù delle ipotesi poste, vengono a legare i periodi normali degl'integrali di V_p, sieno compatibili colle note disuguaglianze esprimenti appunto le condizioni di esistenza di V_p (1).

Noi verificheremo *a priori* tale compatibilità, mostrando come si possa costruire un particolare modello di V_p, soddisfacente alle suddette ipotesi.

A tal uopo si consideri anzitutto la varietà picardiana W, di dimensione μq, i cui elementi sono la μ-ple di punti tolti rispettivamente da μ varietà picardiane di dimensione q, *birazionalmente identiche* fra loro, ma, del resto, affatto qualunque. A W appartengono μ sistemi regolari D_1, $D_2, \dots, D_\mu$:

$$u'_1, \dots, u'_q ; u''_1, \dots, u''_q ; \dots ; u^{(\mu)}_1, \dots, u^{(\mu)}_q ,$$

identici fra loro (n. 2). Si verifica subito che il sistema D, individuato dagl'integrali

$$v_1 = u'_1 + \dots + u^{(\mu)}_1, \dots, v_q = u'_q + \dots + u^{(\mu)}_q$$

ha la dimensione $q-1$, è regolare ed identico ai D_i. Inoltre è chiaro che $D, D_1, \dots, D_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. La W è insomma nelle condizioni contemplate dal teorema II, e contiene pertanto una configurazione normale di sistemi regolari ∞^{q-1}.

Ciò posto, fissiamo $\mu+1$ picardiane $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(\mu)}$, di dimensioni rispettive $p - \Sigma q_i$, $q_1 - q, \dots, q_\mu - q$; e consideriamo la picardiana Φ delle $(\mu+2)$-ple di punti tolti da esse e da W. Avremo in Φ $\mu+1$ sistemi regolari $D, D_1, \dots, D_\mu$, imagini dei sistemi omonimi di W, e altri $\mu+1$ sistemi regolari $C, C_1, \dots, C_\mu$ imagini dei sistemi d'integrali appartenenti

(1) Ved. p. es. Krazer, op. cit., pag. 17.

rispettivamente a $V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(\mu)}$. Indichiamo con $A_1, \ldots, A_\mu$ i sistemi congiungenti rispettivamente di $C_1, D_1; \ldots; C_\mu, D_\mu$. Allora i $\mu+1$ sistemi $A(=D), A_1, \ldots, A_\mu$ saranno a μ a μ indipendenti, ed il loro sistema congiungente, il cui complementare è C, avrà la dimensione $\Sigma q_i - 1$. La Φ soddisfa pertanto alle ipotesi del teorema I. Si conclude che *se $q, q_1, \ldots, q_\mu$ sono $\mu+1$ interi positivi, non nulli ($q \leq q_1 \leq \cdots \leq q_\mu$), soddisfacenti alla disuguaglianza $q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu \leq p$, esiste sempre una varietà algebrica possedente p (e soltanto p) integrali semplici di 1ª specie, per la quale si verificano tutte le condizioni del teorema I.*

È superfluo di avvertire che questa conclusione non è senz'altro applicabile alle *curve* di genere $p > 3$, perchè i periodi normali dei loro integrali di 1ª specie, sono legati da $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni, delle quali non si può *a priori* affermare la compatibilità colle condizioni suddette. È però certo che, una volta scelti gl'interi $q, q_1, \ldots, q_\mu$, si può sempre costruire una curva di genere $\pi (\geq p)$, abbastanza alto, soddisfacente al teorema I. Basterà all'uopo considerare una curva generica tracciata sopra una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, che soddisfaccia al teorema suddetto.

Per le superficie (o varietà algebriche superiori) non havvi invece alcune limitazione, perchè, come hanno dimostrato Castelnuovo-Enriques ([1]), i periodi normali degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie (o varietà) possono scegliersi del tutto ad arbitrio, compatibilmente colle già ricordate disuguaglianze.

Si può in conseguenza affermare p. es. che:

Dati ad arbitrio gl'interi positivi p, μ ($\mu \leq p$), esiste sempre una superficie algebrica F, *d'irregolarità p, contenente un'infinità discontinua di fasci ellittici di curve, tale che gli elementi (fasci) di quest'infinità possano rappresentarsi biunivocamente coi punti razionali di uno spazio a $\mu - 1$ dimensioni.*

In particolare, *nel caso $\mu = p$, su* F *esistono infiniti integrali ellittici infinitamente vicini ad ogni integrale semplice di 1ª specie della superficie.*

8. Dimostrazione analitica del teorema I. — Poniamoci ora nuovamente nelle ipotesi del teorema I, e conserviamo le notazioni del n. 4.

Siano $u_1^{(i)}, \ldots, u_{q_i}^{(i)}$ q_i integrali indipendenti di $A_i (i = 1, 2, \ldots, \mu)$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ $2p$ cicli lineari primitivi della data varietà V, ed $\omega_{l1}^{(i)}, \ldots, \omega_{l.2q_i}^{(i)}$ $(l = 1, 2, \ldots, q_i)$ i periodi ridotti di $u_l^{(i)}$, talchè il periodo di $u_l^{(i)}$ al ciclo

([1]) *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions,* Annales scientifiques de l'École normale supérieure de Paris, (3), tomo XXIII, 1906, pp. 339-366.

σ_h $(h=1\,,2\,,\ldots,2p)$ si potrà scrivere sotto la forma $\sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$, ove le m sono interi non tutti nulli, *indipendenti, per un dato i, dall'indice l.* Allora l'integrale generico

$$(1)\qquad u=\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,u_l^{(i)}$$

di K, avrà lungo σ_h il periodo

$$\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)}\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}\,,$$

sicchè i suoi $2(q_1+\cdots+q_\mu)$ periodi ridotti, ulteriormente irriducibili (n. 1), saranno $\sum_{l=1}^{q_i}\lambda_l^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$ $(s=1\,,2\,,\ldots,2q_i\,;\,i=1\,,2\,,\ldots,\mu)$; e la matrice della sostituzione lineare esprimente i $2p$ periodi fondamentali pei periodi ridotti, sarà:

$$(2)\qquad \left\| m'_{h1}\,,m'_{h2}\,,\ldots,m'_{h.2q_1}\,,\ldots\ldots,m_{h1}^{(\mu)}\,,m_{h2}^{(\mu)}\,,\ldots,m_{h\,2q_\mu}^{(\mu)}\right\| \quad (h=1\,,2\,,\ldots 2p).$$

Questa matrice è diversa da zero, cioè non sono nulli tutti i suoi minori d'ordine $2(q_1+\cdots+q_\mu)$, perchè altrimenti il numero dei periodi degl'integrali di K si ridurrebbe ulteriormente.

Suppongasi ora che al sistema K appartenga un altro sistema regolare A, ∞^{q-1}, il quale sia indipendente da $A_1\,,A_2\,,\ldots,A_\mu$. Sieno $\lambda_{lr}^{(i)}$ $(r=1\,,2\,,\ldots,q)$ i valori che vanno attribuiti alle $\lambda_l^{(i)}$ nella (1), per ottenere q integrali indipendenti di A e $\theta_{r1}\,,\theta_{r2}\,,\ldots,\theta_{r,2q}$ i periodi ridotti dell'integrale r-esimo $(r=1\,,2\,,\ldots,q)$. Sussisteranno allora le relazioni

$$(3)\qquad \sum_i\sum_s m_{hs}^{(i)}\sum_l\lambda_{lr}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}=\sum_{j=1}^{2q} n_{hj}\,\theta_{rj}\,,$$
$$(r=1\,,\ldots,q\;;\;h=1\,,2\,,\ldots,2p)\,,$$

le n essendo interi non tutti nulli, indipendenti dall'indice r. Considerando queste relazioni, per un r fissato, come equazioni lineari nelle $2(q_1+\cdots+q_\mu)$ quantità $\sum_l\lambda_{lr}^{(i)}\,\omega_{ls}^{(i)}$, poichè esse son soddisfatte per valori non tutti nulli di queste quantità (chè altrimenti l'r-esimo integrale di A si ridurrebbe ad una costante, in quanto avrebbe nulli tutti i suoi periodi ridotti), la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti delle suddette equazioni, dovrà essere nulla.

Se ora si tien conto che fra le θ_{rj} non può sussistere alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi (indipendenti dall'indice r), perchè altrimenti gl'integrali di A avrebbero meno di $2q$ periodi ridotti, si conclude che è nulla la matrice

$$(4)\qquad \left\| m'_h, m'_{h2}, \dots, m'_{h.2q_1}, \dots\dots, m^{(\mu)}_{h1}, \dots, m^{(\mu)}_{h.2q_\mu}, n_{hj} \right\| \quad (h = 1, 2, \dots, 2p),$$

per qualunque indice j ($j = 1, 2, \dots 2q$).

Ciò posto, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$, μ *interi arbitrarî tutti diversi da zero,* e con δ il loro minimo comune multiplo. Le (3) possono anche scriversi sotto la forma

$$(5)\qquad \sum_i \sum_s \overline{m}^{(i)}_{hs} \sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} \omega^{(i)}_{ls} = \sum_j \overline{n}_{hj} \theta_{rj},$$

ove si è posto

$$\overline{m}^{(i)}_{hs} = \frac{m^{(i)}_{hs} \delta}{\alpha_i}, \quad \overline{n}_{hj} = n_{hj} \delta.$$

Nelle (5), i determinanti d'ordine $2(q_1 + \dots + q_\mu)$ estratti dalla matrice dei coefficienti $\overline{m}$, uguagliamo evidentemente i corrispondenti determinanti della matrice (2), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta = \dfrac{\delta^{2(q_1+\dots+q_\mu)}}{\alpha_1^{2q_1} \alpha_2^{2q_2} \dots \alpha_\mu^{2q_\mu}}$; e quindi anche la matrice degl'interi $\overline{m}$ è diversa da zero. Similmente, i determinanti d'ordine $2(q_1 + \dots + q_\mu) + 1$ estratti dalla matrice delle $\overline{m}$ e delle $\overline{n}$ (per un fissato j), uguagliano i determinanti corrispondenti estratti dalle (4), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta\delta$; laonde la matrice delle $\overline{m}, \overline{n}$ è nulla, come la (4).

Ne segue che dalle (5), per r fissato, si possono ricavare le $2(q_1 + \dots + q_\mu)$ quantità $\sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} \omega^{(i)}_{ls}$ come combinazioni lineari *a coefficienti razionali indipendenti dall'indice* r, delle θ_{rj}. Ponendo $r = 1, 2, \dots, q$, si hanno pertanto q integrali $v_r = \sum_i \sum_l \alpha_i \lambda^{(i)}_{lr} u^{(i)}_l$ coi $2q$ periodi ridotti — ma non generalmente primitivi — θ. Affinchè si possa però affermare che il sistema B individuato dagl'integrali v_r, è regolare, occorre provare che i q integrali stessi sono indipendenti, giacchè allora, e solo allora, ne seguirà che i $2q$ periodi θ sono ulteriormente irriducibili.

Non essendovi alcun legame lineare fra gl'integrali $u^{(i)}_l$, se vi fosse un legame lineare fra gl'integrali v_r, sussisterebbero, per valori non tutti nulli delle ν, le relazioni lineari

$$\sum_{r=1}^{q} \nu_r \lambda^{(i)}_{lr} = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, q_i \;;\; i = 1, 2, \dots \mu),$$

ed allora sarebbero dipendenti anche gl'integrali scelti entro A. Pertanto il sistema B è regolare e ∞^{q-1}, qualunque sieno gl'interi non nulli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$.

Ma per poter da ciò dedurre che la varietà possiede infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, occorre provare che a due gruppi generici di valori delle α — e sieno $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\mu)$; $(\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots, \alpha''_\mu)$ — corrispondono due sistemi regolari distinti B', B''.

Si ammetta, se è possibile, che B', B'' coincidano. Allora la matrice che ha per orizzontale r^{esima} $(r = 1, \ldots, q)$

$$(6) \qquad \alpha'_1 \lambda'_{1r}, \alpha'_1 \lambda'_{2r}, \ldots, \alpha'_1 \lambda_{q_1 r}, \ldots\ldots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{1r}, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{2r}, \ldots, \alpha'_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu r},$$

e per orizzontale $(q+1)^{esima}$

$$(7) \qquad \alpha''_1 \lambda'_{1s}, \alpha''_1 \lambda'_{2s}, \ldots, \alpha''_1 \lambda'_{q_1 s}, \ldots\ldots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{1s}, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{2s}, \ldots, \alpha''_\mu \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s},$$

ove s è un intero fissato nella successione $1, 2, \ldots, q$, dovrà esser nulla, giacchè il suo annullarsi esprime appunto che l'integrale di B'', corrispondente ai valori (7) dei parametri, è contenuto in B'. Sottraendo dall'orizzontale (7) la s^{esima} delle (6) moltiplicata per $\frac{\alpha''_i}{\alpha'_i}$ (ove i è fissato), la nuova matrice, pure nulla, che così si ottiene, viene ad esprimere, col suo annullarsi, che B' ha un integrale comune col sistema Σ_i, definito al n. 4. Questo integrale comune corrisponde ai valori

$$(8) \qquad \frac{\alpha''_1 \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_1}{\alpha'_i} \lambda'_{1s}, \ldots, \frac{\alpha''_1 \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_1}{\alpha'_i} \lambda'_{q_1 s}, \ldots\ldots,$$
$$0, \ldots, 0, \ldots, \frac{\alpha''_\mu \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_\mu}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{1s}, \ldots, \frac{\alpha''_\mu \alpha'_i - \alpha''_i \alpha'_\mu}{\alpha'_i} \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}$$

dei parametri. Facendo $s = 1, 2, \ldots, q$, si ottengono così q integrali comuni a B' ed a Σ_i, ed è facile vedere che sono integrali indipendenti. Infatti, qualora essi fossero dipendenti, sarebbe nulla la matrice di cui (8) è la orizzontale s^{esima} $(s = 1, \ldots, q)$, la qual matrice, previa la soppressione dei fattori *non nulli* (per la genericità delle α', α'') comuni alle sue singole verticali, riducesi a quella che ha per orizzontale s^{esima}

$$\lambda'_{1s}, \ldots, \lambda'_{q_1 s}, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots \lambda^{(\mu)}_{1s}, \ldots, \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}.$$

L'annullarsi di questa matrice porterebbe a ciò: che l'integrale di A, $\sum_{r=1}^{q} \varepsilon_r \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{q_j} \lambda^{(j)}_{lr} u^{(j)}_l$, ove le ε son costanti convenienti non tutte nulle, si

ridurrebbe ad una combinazione lineare dei soli integrali $u_1^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$ di A_i, ed esisterebbe perciò un integrale comune ad A, A_i; contro il supposto.

Si può pertanto affermare che, se B' coincide con B'', il sistema B' ha in comune con Σ_i, qualunque sia $i (= 1, 2, \dots, q)$, q integrali indipendenti, cioè che B' è contenuto in Σ_i. I sistemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$ vengono pertanto ad avere in comune (almeno) un sistema B' di dimensione $q - 1 (> 0)$. Ora, come abbiamo già osservato al n. 4, ciò non può accadere, se i sistemi $A_1, \dots, A_\mu$ dati son tra loro indipendenti. Resta così dimostrato, anche per via analitica, il teorema I.

Meccanica. — *Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti.* Nota del Corrispondente E. Almansi.

1. Una massa fluida, omogenea, incompressibile, ruoti intorno ad un asse con velocità angolare costante ω.

Assumiamo l'asse di rotazione come asse delle z; gli assi delle x e delle y siano collegati colla massa in movimento.

Denotando con V il potenziale newtoniano della massa fluida, in tutti i punti della superficie σ che limita lo spazio S da essa occupato, deve aversi:

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{cost.}$$

Diciamo ϱ la densità del fluido, k la costante dell'attrazione, e poniamo:

$$U = k\varrho u \quad , \quad V = k\varrho v \, ,$$
$$\omega^2 = 2\alpha k \varrho \, .$$

Nei punti di σ dovrà essere:

$$u = v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}, \quad \alpha = \text{cost} > 0 \, . \tag{1}$$

Poichè v è il potenziale, per $k = 1$, di una massa di densità 1 che occupi lo spazio limitato da σ, le formule (1) ci dànno una condizione *di natura puramente geometrica*, necessaria affinchè la superficie σ possa rappresentare una figura d'equilibrio.

Denoterò con (a) questa condizione: la condizione, cioè, che nei punti di σ si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost.}$, α essendo una costante positiva.

Ad una superficie σ che verifichi la condizione (a) corrisponde un determinato valore della velocità angolare ω, dato dalla formula $\omega^2 = 2\alpha k \varrho$.

Alla condizione (a) se ne aggiunge ordinariamente una seconda, la quale viene formulata scrivendo che in tutti i punti di σ deve aversi:

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0 \quad (n_i = \text{normale int.}).$$

Se diciamo p la pressione, U_0 il valore costante di U sopra σ, si ha, in un punto qualunque della massa fluida:

$$p = \varrho(u - u_0).$$

La condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$ significa dunque che la pressione, supposta nulla nei punti di σ, deve risultare positiva nei punti infinitamente vicini.

Consideriamo la condizione più generale che in tutto la spazio S occupato dalla massa fluida, ad eccezione della superficie, ove si suppone $p = 0$, sia $p > 0$. Diremo (b) questa seconda condizione.

L'osservazione, oggetto della Nota, è la seguente: *che la condizione* (b) *non aggiunge niente alla condizione* (a); che, in altre parole, per tutte quelle superficie per cui è verificata la condizione (a), è verificata anche la (b). La condizione (a) è dunque necessaria *e sufficiente* affinchè σ possa rappresentare una figura d'equilibrio. Il quadrato della velocità angolare dovrà essere uguale a $2\alpha k\varrho$. E quei limiti superiori che, per determinati valori di k e ϱ, si possono assegnare ad ω, o nel caso generale. o per classi speciali di superficie (limiti che per solito vengono messi in rapporto colla condizione $\frac{\partial U}{\partial n_i} > 0$), non dipendono se non da limiti entro i quali è contenuta, nei diversi casi, la costante (di natura geometrica) α.

2. Poichè $U = k\varrho u$, ed $U_0 = k\varrho u_0$ (se u_0 denota il valore costante di u sopra σ), avremo:

$$p = k\varrho^2(u - u_0).$$

Dobbiamo dunque dimostrare che in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S, *u è maggiore di u_0*.

Consideriamo sopra σ un punto P_0 tale che rispetto al piano normale all'asse della z, passante per P_0, la superficie σ si trovi tutta dalla stessa parte; e tale inoltre che, supponendo di aver assegnato all'asse delle z un verso positivo, la retta $P_0 z$, avendo la direzione e il verso dell'asse, sia rivolta verso la parte in cui si trova σ. Noi supporremo che la retta $P_0 z$ penetri nell'interno dello spazio S, come avverrà, per esempio, se σ ammette in P_0 un piano tangente determinato.

Nel punto P_0 l'attrazione sarà rivolta dalla parte di σ: sarà cioè $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$. Ma per la (1) $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$; quindi $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$. Ora nel punto P_0 u è

uguale ad u_0, dunque nell'interno dello spazio S, in cui penetra la retta $P_0 z$, dovranno esservi dei punti nei quali u è maggiore di u_0. E la funzione u avrà nello spazio S un valore massimo u' *maggiore di* u_0.

Sia τ una sfera di centro P, di raggio R, tutta contenuta nello spazio S. Essendo $\Delta^2 u = \Delta^2 v + 4\alpha = -4(\pi - \alpha)$, sussisterà la relazione (che si ottiene applicando il *teorema della media* di Gauss alla funzione *armonica* $u + \frac{2}{3}(\pi - \alpha)(r^2 - R^2)$, ove r denota la distanza di un punto qualunque dal centro P della sfera):

$$u(P) = \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau + \tfrac{2}{3}R^2(\pi - \alpha).$$

Se ne deduce che non può essere $\pi - \alpha \leqq 0$: altrimenti sarebbe

$$u(P) \leqq \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau,$$

mentre questa relazione non risulterà verificata se si suppone che P sia un punto in cui la funzione u abbia il valore massimo u', ma che almeno in una parte di τ, u sia diversa da u', quindi minore di u'.

Sarà pertanto $\pi - \alpha > 0$, ossia

$$\alpha < \pi.$$

E la formula (2) darà:

$$u(P) > \frac{1}{\tau}\int_\tau u\, d\tau.$$

Di qui vediamo che se u'' è il *minimo* valore di u nell'intero spazio S, non può essere $u = u''$ in nessun punto P situato nell'interno di S. Vale a dire: il minimo valore di u è il valore u_0 che u assume sulle superficie; e in nessun punto situato nell'interno di S u può essere uguale ad u_0, ma dovrà essere ovunque $u > 0$; c. v. d..

Rimane così provato che se la pressione è nulla in superficie, essa è positiva in tutti i punti situati nell'interno dello spazio S. Ciò avverrà a maggior ragione se la pressione ha, in una superficie, un valore (costante) positivo.

Dalla formula $\alpha < \pi$, che è verificata per qualunque superficie σ sulla quale si abbia $v + \alpha(x^2 + y^2) = \text{cost}$, deriva, per il quadrato della velocità angolare, il limite $2\pi k\varrho$ stabilito dal Poincaré [1].

[1] *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, pag. 11. Il dott. Crudeli ha poi dimostrato che se la superficie σ è convessa in ogni suo punto, deve essere $\omega^2 < \pi k \varrho$ $\left(\text{ossia } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$: *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei*, ecc., Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1910, pag. 666.

3. Possiamo riassumere le cose dette, nel modo seguente:

O la condizione (a), per una data superficie σ e per un dato asse di rotazione, è verificata; e la superficie σ è una figura d'equilibrio, purchè la velocità angolare di rotazione sia uguale a $\sqrt{2\alpha k\varrho}$, e la pressione superficiale abbia un valore costante, nullo o positivo.

O la condizione (a) non è verificata; e l'equilibrio non può aver luogo per nessun valore della velocità di rotazione, e per nessun valore (costante) della pressione in superficie.

Non vi è dunque nessun caso in cui l'equilibrio non sussista quando la pressione in superficie è nulla, e sussista invece se la pressione stessa ha un valore sufficientemente grande.

Chimica. — *Sulla tribenzoina.* Nota del Corrisp. L. Balbiano [1].

Una Memoria di A. Lipp e P. Miller [2] pubblicata nell'Agosto passato, di cui ebbi notizia soltanto al principio di quest'anno dal sunto del Chem. Zentralblatt. [3], mi obbligò a ripetere alcune esperienze sulla formazione e saponificazione della tribenzoina delle quali rendo conto in questa breve Nota.

Nel 1902 in una Memoria *Sulla saponificazione della tribenzoina* [4] ho cercato di dimostrare che le deduzioni chimico-fisiche del Geitel [5] e quelle chimiche alle quali era pervenuto il Lewkowitsch [6] dall'aumento *del numero di acetile* nei grassi insaponificati, e le variazioni *del numero di Hener*, si potevano spiegare in altro modo senza ricorrere all'ipotesi della saponificazione graduale, come supponevano i due chimici sucitati.

Le esperienze, instituite allora, mi dimostrarono che nella saponificazione parziale della tribenzoina con una quantità minima di alcoolato sodico in presenza di alcool *assoluto* (*alcoolyse di Haller 1906*) si aveva glicerina, benzoato di etile e tribenzoina inalterata, e nella saponificazione in mezzo eterogeneo, cioè colla soluziono acquosa al 10 °/₀ di idrato sodico, si aveva benzoato sodico, glicerina e tribenzoina. D'altra parte l'eterificazione della glicerina mediante il cloruro di benzoile col processo del Baumann mi dava *esclusivamente* la tribenzoina solida, cristallizzata, quantunque le quan-

(1) Dal laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.
(2) I., pr. *88* (1913), 361.
(3) C., (1913), II, 1560.
(4) G. (1902), 265; (1903) 312.
(5) I., pr. *55* (1897), 429.
(6) B., *33* (1900), 89.

tità rispettive di glicerina e cloro-anidride fossero nei rapporti stechiometrici di numero eguale di molecole.

Qneste due serie di fatti mi autorizzavano allora ad appoggiare l'idea che tanto la saponificazione quanto l'eterificazione della glicerina non avveniva per gradi come altri chimici supponevano.

Il lavorîo fatto in questi ultimi dieci anni in difesa delle due ipotesi, riassunto fedelmente nella Memoria di A. Lipp e P. Miller, dimostra all'evidenza quanto fosse fantastica l'asserzione del compianto Lewkowitch nella interessante conferenza alla società chimica francese nel 1909 « on a demontré d'une manière presque irréfutable que l'hydrolyse s'opère en trois phases » e potrei incominciare questa Nota colle precise parole adoperate nel mio scritto del 1902. « Il meccanismo della saponificazione delle sostanze grasse è un problema sempre discusso, e le ricerche per dilucidare questa questione, che ha una notevole importanza teorica e tecnica, sono ancora fra quelle messe all'ordine del giorno ».

La Memoria di A. Lipp e P. Miller dà ora un notevole impulso alla risoluzione del problema nel senso della reazione graduale, ed è perciò che ho ritenuto necessario ripetere quella parte sperimentale che non collima colle mie antiche esperienze, introducendo la modificazione della determinazione del *numero di saponificazione* all'analisi elementare dei prodotti dell'eterificazione ed al residuo inalterato dell'idrolisi parziale.

Benzoilazione della glicerina.

Gr. 9 glicerina Kahlbaum. dep. dist. 1,26 sciolti in 110 gr. di soluzione acquosa di NaOH, contenenti 10 gr. di idrato, si addizionarono di cm^3 0,5 pari a gr. 0,6 di cloruro di benzoile provvisto dalla casa Erba e che distillava fra 194-195°. Si agitò fortemente la massa raffreddando con acqua. Si separano tosto dei fiocchi cristallini che, dopo tre ore, vennero estratti con benzolo.

Lo strato benzolico, separato dallo strato acquoso-glicerico alcalino, si lavò ripetutamente con acqua fino a reazione neutra, indi si filtrò su filtro di carta asciutto e si distillò il solvente. Il residuo, col raffreddamento, si rapprese in massa solida e venne disseccato in stufa ad acqua a pressione diminuita fino a costanza di peso, poi triturato finamente si lasciò soggiornare, rimanendo costante il peso, per qualche giorno in essiccatore ad acido solforico nel vuoto. Questo residuo pesa gr. 0,46 e fonde con riscaldamento rapido del bagno fra 71° e 72°. La determinazione del numero di saponificazione dette il seguente risultato:

Gr. 0,365 sostanza richiesero gr. 0,1514 di KOH.

N. di sapon. trovato 414,8	Calc. per	tribenzoina	416,7
	» »	dibenzoina	373,8
	» »	monobenzoina	286,1

Giova far notare che adoperando soluz. $\frac{N}{2}$ di KOH e HCl, l'errore di cm^3. 0,05 nella lettura dei volumi delle soluzioni titolate basta far variare di 2,1 il numero di saponificazione per tale quantità di sostanza.

Lo strato acquoso-glicerico si addizionò di cm^3. 1 di cloruro di benzoile agitando fortemente e raffreddando con acqua. Si ottenne una nuova quantità di precipitato fioccoso cristallino che estratto con benzolo e lavorato come il precedente pesava gr. 0,78. e fondeva fra 71° e 72°.

Gr. 0,6561 richiesero gr. 0,2717 KOH.

N. di sapon. 414,1 tribenzoina 416,4.

Nelle seconde acque-alcaline-gliceriche si versò poco a poco cm^3. 2 di cloruro di benzoile. Si raccolse gr. 1,53 di etere benzoilico, il cui punto fusione è situato fra 71-72°.

Gr. 0,8711 richiesero gr. 0,3619 KOH.

N. di saponif. 415,4 tribenzoina 416,4

Le terze acque-alcaline-gliceriche dettero coll'addizione di cm^3. 5 di cloruro di benzoile gr. 2,5 di etere fus. 71-72°.

Gr. 0,7897 richiesero gr. 0,3299 KOH.

N. di saponif. 417,7 tribenzoina 416,4

Finalmente le ultime acque glicero-alcaline vennero addizionate di un eccesso di liscivia di NaOH (100 cm^3 di NaOH al 50 %) e si versò goccia a goccia, raffreddando ed agitando fortemente, cm^3. 25,5 di cloruro di benzoile. Il residuo dell'estrazione col benzolo, disseccato nel vuoto a bagnomaria, pesa gr. 12 e fonde fra 70° e 72°. Nelle diverse fasi di benzoilazione si adoperò come somma la quantità di cloruro di benzoile e di glicerina corrispondenti ad 1 p. mol. dell'ultima per 3 p. mol. del primo.

Gr. 0,9584 richiesero gr. 0,3965 KOH.

N. di sapon. 413,7 cal. tribenzoina 416,4

Le diverse frazioni residue, esclusa la I^a, di cui non rimaneva più sostanza disponibile, si riunirono e vennero cristallizzate dal benzolo bollente. I primi cristalli depositatosi dettero alla determinazione del N. di saponificazione il seguente risultato.

Gr. 0,5566 richiesero gr. 0.2315 KOH.

N. di saponif. 415,9 calc. tribenzoina 416,4

Sulla seconda frazione di cristalli depositatosi per concentrazione a metà volume circa delle acque madri benzoliche non si fece la determinazione del N. di saponificazione. Le ultime acque madri benzoliche si eva-

porarono a costanza di peso, prima a bagno-maria ed infine nel vuoto sull'acido solforico. Devo avvertire che il benzolo, come anche l'alcool, si separa difficilmente dai cristalli di tribenzoina e che bisogna insistere più giorni di permanenza nel vuoto su acido solforico per ottenere l'eliminazione completa del solvente.

Gr. 0,6051 richiesero gr. 0,2509 KOH.

N. di saponif. 414,5 tribenzoina 416,4

Ho determinato con qualche cura il punto di fusione delle due frazioni, prima ed ultima riscaldando il bagno lentamente (1° in 10″ a 12″). La I^a frazione riscaldata in tubicino di vetro a pareti sottili comincia a dare segno di rammollimento a 75°,5, ed è fusa completamente in liquido scolorito a 76°,5. La III^a frazione dà segno di rammollimento a 71°, ed è fusa completamente in liquido scolorito a 72°. Tutte e due le frazioni rimangono per molto tempo allo stato di surfusione alla temperatura ambiente. La I^a frazione dopo 36 ore accenna a cristallizzare alla superficie, mentre la III^a frazione rimane ancora limpida e solo dopo 48 ore accenna alla formazione di pochi germi cristallini. Ho lasciato le due sostanze alla temperatura ambiente per 8 giorni; trascorso il qual tempo esse erano completamente solidificate. Il punto di fusione determinato comparativamente collo stesso lento riscaldamento del bagno (1° in 10″ a 12″) dette per la I^a sostanza limpidità perfetta a 74°, per la III^a a 72°. Il p. f. della I^a era disceso di 2°,5. Ho lasciato risolidificare le due sostanze, e dopo 15 giorni ho trovato che la I^a era fusa completamente a 74°, la III^a a 72°.5.

Saponificazione della tribenzoina.

Gr. 5,5 di tribenzoina (p. f. 75°,5-76°,5 N. di sap. 415,9) vennero fatti bollire a ricadere per 2 ore con 15 cm^3. di soluzione acquosa al 10 °/$_0$ di NaOH. Dopo raffreddamento il liquido e la massa solidificata si agitò con due volumi di etere. Si separò la parte acquosa, e lo strato etereo si lavò con acqua fino a reazione neutra. L'etere filtrato lasciò alla distillazione un residuo che alla temperatura ambiente si rapprese in aghi raggiati che vennero disseccati nel vuoto sull'acido solforico fino a costanza di peso. Il residuo pesa gr. 3,6.

I° Gr. 0,8323 richiesero gr. 0,3466 KOH.
II° Gr. 1,181 » » 0,4894 »

	I	II	Calc. tribenzoina
N. di saponif.	416,3	414,4	416,4

Il punto di fusione delle due porzioni venne determinato comparativamente; il bagno si riscaldò lentamente 1° in 10″-12″.

La tribenzoina primitiva fusa completamente 76°,5.
Il residuo della saponificazione fusa » 72°.

Le due sostanze si mantengono soprafuse in liquido scolorito: la tribenzoina dopo 24 ore è parzialmente solidificata, mentre il residuo è ancora completamente liquido. Dopo altre 24 ore la tribenzoina è rappresa in massa solida, mentre il residuo conserva ancora una parte liquida. Dopo altre 48 ore sono tutte e due solidificate ed i punti di fusione sono, 76°,5 fusione completa della massa per la tribenzoina — 74° fusione completa della massa pel residuo non saponificato.

Ciò dimostra che il punto di fusione della sostanza, che il *numero di saponificazione* mi caratterizza come tribenzoina, può anche variare in limiti ristretti di temperatura, come già venne verificato per molti altri gliceridi completi di acidi organici ed inorganici che presentano il così detto *doppio punto di fusione*, e di questo fatto importante Lipp e Miller non tennero il dovuto conto nelle deduzioni delle loro esperienze sulla tribenzoina.

Le esperienze descritte servono a confermare quanto scriveva nel 1902, cioè che *praticamente* l'eterificazione della glicerina col cloruro di benzoile non avviene per gradi, ma la prima goccia di cloruro di benzoile, che viene a contatto della soluzione alcalina di glicerina, dà subito la tribenzoina che venne in quest'ultima serie di esperienze controllata colla determinazione del *N. di saponificazione.*

La sensibilità di tale determinazione, adoperando come hanno fatto Lipp e Miller, soluz. $\frac{N}{2}$ di base e di acido e che io ho seguito, non permette di decidere la quistione se la tribenzoina sia o no accompagnata di piccole quantità di dibenzoina, perchè le variazioni di cm³. 0,05 di lettura nel volume delle soluzioni titolate fanno variare di unità 1,5 a 2 (adoperando gr. 0,5 a 1 gr. di sostanza) questa costante, e le determinazioni fatte oscillano nei limiti di tale errore.

La saponificazione parziale della tribenzoina colla soluzione acquosa al 10 °/₀ NaOH lascia un residuo inattaccato pel quale la determinazione del N. di saponificazione dà risultati concordanti con quello teorico della tribenzoina, almeno nei limiti dell'errore sperimentale.

Con ciò non si può escludere in modo assoluto che, tanto nella eterificazione quanto nella saponificazione, le due reazioni avvengano gradatamente, e che piccole cause come l'intensità di raffreddamento delle masse reagenti od il modo di agitare la mescolanza, possano far deviare le reazioni graduali concomittanti bimolecolari in senso quantitativo, e far apparire l'insieme dei processi praticamente come reazioni tetramolecolari. La determinazione quantitativa non serve a risolvere in modo esauriente il problema, ed anche la determinazione del punto di fusione non serve allo scopo, ma queste piccole differenze di condizioni sperimentali possono però servire a spiegare le piccole divergenze fra i risultati dei due chimici tedeschi ed i miei.

Geologia. — *Lembi fossiliferi quaternarî e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato.* Nota del Corrispondente A. Issel.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri.* Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. È noto (¹) che, essendo α una omografia vettoriale, ed $\mathbf{u}$ un vettore funzione del punto P, l'omografia

$$\frac{d(\alpha \mathbf{u})}{d\mathrm{P}}$$

non si sa attualmente esprimere mediante gli operatori differenziali, *non binari*, finora introdotti (*A. V. G.*, I, pp. 63-107) (²). È per tale ragione

(¹) Ved. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*: I, *Transformations linéaires* (1912); II, *Applications à la mécanique et à la physique* (1913), Pavia, Mattei e C. In tutto il sèguito, questi due volumi verranno, per brevità, indicati con *A. V. G.*

(²) Anche del quadrato dell'operatore di Laplace per le omografie, cioè di $\Delta^2\alpha$, è stata notata la mancanza (*A. V. G.*, I, pag. 105); esso però risulta, in sostanza, contenuto nella [7] di pag. 104 (*A. V. G.*, I). Sostituendo infatti in questa formula $\Delta\alpha$ ad α, si ha (*A. V. G.*, pag. 104 [9], pag. 105 [19]):

$$\Delta^2\alpha = \mathrm{K}\frac{d(\mathrm{grad}\,\Delta\,\mathrm{K}\alpha)}{d\mathrm{P}} - \mathrm{Rot}^2\Delta\alpha = \mathrm{K}\frac{d(\mathrm{grad}\,\Delta\,\mathrm{K}\alpha)}{d\mathrm{P}} + \mathrm{Rot}^4\alpha$$

$$= \mathrm{K}\frac{d(\Delta'\,\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha)}{d\mathrm{P}} - \mathrm{Rot}\,\Delta\,\mathrm{Rot}\,\alpha\,.$$

Da questa si deduce facilmente, se α si riduce ad un numero m, la nota formula (*A. V. G.*, I, pag. 105 [12]):

$$\Delta^2 m = \mathrm{div}\,\Delta'\,\mathrm{grad}\,m\,.$$

Invero, si ha (*A. V. G.*, I, pag. 105 [11], pag. 102 [2]):

$$\mathrm{Rot}\,m = \mathrm{grad}\,m\wedge\ ,\ \Delta\,\mathrm{Rot}\,m = (\Delta'\,\mathrm{grad}\,m)\wedge\ ,$$

$$\mathrm{Rot}\,\Delta\,\mathrm{Rot}\,m = -\,\mathrm{div}\,\Delta'\,\mathrm{grad}\,m + \frac{d(\Delta'\,\mathrm{grad}\,m)}{d\mathrm{P}}\ ;$$

e poichè è (*A. V. G.*, I, pag. 105 [11], pag. 102 [1]):

$$\Delta'\,\mathrm{grad}\,m = \mathrm{grad}\,\Delta m = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,m)\,,$$

la $\frac{d(\Delta'\,\mathrm{grad}\,m)}{d\mathrm{P}}$ è una dilatazione (*A. V. G.*, I, pag. 77 [3]), e, in conseguenza, l'ultima forma scritta per $\Delta^2\alpha$ dà subito l'espressione di $\Delta^2 m$.

che il compianto M. Pieri credè opportuno di introdurre l'operatore binario $S(\alpha, \mathbf{u})$, tale che:

$$(1) \qquad \frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} + S(\alpha, \mathbf{u}),$$

cioè definito dall'eguaglianza (per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario):

$$(2) \qquad S(\alpha, \mathbf{u})\mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{u},$$

e svilupparne le numerose e notevoli proprietà (*A. V. G.*, I, pp. 95-97; II, pag. 138).

Avendo io notato che fra queste formule manca quella che dà la coniugata di $S(\alpha, \mathbf{u})$, cioè la $KS(\alpha, \mathbf{u})$, in funzione di α (o di $K\alpha$), e di $\mathbf{u}$, mi son proposto di calcolarla: ma il calcolo svolto mi ha condotto appunto ad esprimere l'*operatore binario* $S(\alpha, \mathbf{u})$ mediante i già noti operatori differenziali *non binari*. Ciò non toglie, naturalmente, importanza all'operatore binario S, che, per le sue molteplici e semplici proprietà (fra queste, notevolissime: la seconda [7] a pag. 96 sull'espressione della derivata di un prodotto vettoriale, e la definizione di grad e Rot a pag. 150 di *A. V. G.*, I), deve essere ancora conservato; ma è pure importante il fatto che l'operatore S possa essere eliminato, poichè in molti casi i calcoli riescono più spediti.

Così, oltre ad esprimere con la (II), n. 3, la derivata di $\alpha\mathbf{u}$, indicata nella (1), senza l'operatore S, si è ottenuta l'espressione [(III), (IV), (V), nn. 4, 6, 8] della derivata sia del prodotto di quante si vogliano omografie, sia di una arbitraria potenza, intera e positiva, d'una omografia; considerando, in particolare, il caso in cui le date omografie sono delle derivate.

2. Sviluppo il calcolo tal quale come mi si è presentato.

Essendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due vettori costanti, dalla definizione (2) di S si ha:

$$S(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{a}\right)\mathbf{u} \times \mathbf{b},$$

e, per il teorema di commutazione (*A. V. G.*, I, pag. 32; pag. 67 [4], pag. 69 [1'']):

$$\mathbf{a} \times KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \left(\frac{dK\alpha}{dP}\mathbf{a}\right)\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\mathbf{a} = \mathbf{a} \times K\frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\mathbf{u};$$

e, poiche $\mathbf{a}$ è arbitrario:

$$KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = K\frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\mathbf{u}.$$

Ricordando che (*A. V. G.*, I, pag. 25; pag 70 [1]):

$$K\beta = \beta - 2V\beta\wedge \quad , \quad 2V\frac{d\mathbf{v}}{dP} = \operatorname{rot}\mathbf{v},$$

ne segue:

$$KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = \frac{d(K\alpha\mathbf{b})}{dP}\mathbf{u} - \operatorname{rot}(K\alpha\mathbf{b})\wedge\mathbf{u},$$

ossia (*A. V. G.*, I, pag. 69 [1″], pag. 74 [4]):

$$KS(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{b} = \left(\frac{dK\alpha}{dP}\mathbf{u}\right)\mathbf{b} + \mathbf{u}\wedge(\operatorname{Rot} K\alpha)\,\mathbf{b};$$

e siccome questa vale per $\mathbf{b}$ arbitrario, si ha:

$$KS(\alpha, \mathbf{u}) = \frac{dK\alpha}{dP}\mathbf{u} + \mathbf{u}\wedge\operatorname{Rot} K\alpha,$$

da cui, operando con K nei due membri (*A. V. G.*, I, pag. 67 [4]):

$$\text{(I)} \qquad S(\alpha, \mathbf{u}) = \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u} - K\operatorname{Rot} K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge.$$

Osservazione. — Questa formula si può anche dedurre facilmente dalla [4] di pag. 74 (*A. V. G.*, I), cioè dalla:

$$K\operatorname{Rot} K\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}) = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u}\right)\mathbf{x} - \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{u}.$$

Basta osservare che il secondo termine del secondo membro di questa eguaglianza, per la (2), è $S(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{x}$, per ottenere subito la (I), poichè $\mathbf{x}$ è un vettore arbitrario.

3. La (I) permette ora di mettere subito la (1) sotto la forma:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u} - K\operatorname{Rot} K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge.$$

Questa ci mostra che, *per il prodotto funzionale* $\alpha\mathbf{u}$, *non vale (in generale) la ordinaria regola di derivazione del prodotto di funzioni numeriche*; poichè all'espressione che ne risulterobbe per la derivata del primo membro, eseguita applicando la legge indicata, *occorre aggiungere un terzo termine*, come è indicato nel secondo membro della (II).

Questo secondo membro si riduce, come è noto (*A. V. G.*, I, pag. 130), ai soli due primi termini *quando α è una derivata* (e solo allora); il che subito risulta anche dalla nostra (II). Invero, perchè si verifichi la condizione indicata, occorre e basta sia:

$$K\operatorname{Rot} K\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge = 0;$$

e siccome $\mathbf{u}$ è arbitrario, scegliendo opportunamente $\mathbf{x}$, il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$ può identificarsi con qualsivoglia vettore dello spazio; perciò la condizione scritta equivale alla:

$$\mathrm{K\,Rot\,K}\alpha = 0\,, \quad \text{ossia:} \quad \mathrm{Rot\,K}\alpha = 0\,,$$

la quale è appunto (*A. V. G.*, I, pag. 118) la condizione necessaria e sufficiente perchè α sia una derivata.

Derivata del prodotto di due o più omografie.

4. Se nella (II) si pone $\mathbf{u} = \beta \mathbf{a}$, essendo β una seconda omografia ed $\mathbf{a}$ un vettore costante, si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta\mathrm{a})}{d\mathrm{P}} = \alpha \frac{d(\beta\mathrm{a})}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}} \beta\mathrm{a} - \mathrm{K\,Rot\,K}\alpha \,.\, (\beta\mathrm{a})\wedge\,. \tag{3}$$

Se introduciamo ora, con il Burali-Forti [1], l'operatore A (*assiale*), simbolo iperomografico il cui campo d'applicazione è formato dai vettori, se cioè poniamo:

$$\mathrm{a}\wedge = \mathrm{Aa} \quad , \quad (\beta\mathrm{a})\wedge = \mathrm{A}(\beta\mathrm{a}) = \mathrm{A}\beta\mathrm{a}\,, \tag{4}$$

[essendo priva di significato l'espressione $(\mathrm{A}\beta)\mathrm{a}$], applicando la (II), si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta\mathrm{a})}{d\mathrm{P}} = \frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}}\mathrm{a} - \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)\,.\,\mathrm{a}\wedge = \frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}}\mathrm{a} - \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)\,.\,\mathrm{Aa}\,,$$

$$\alpha\frac{d\beta\mathrm{a}}{d\mathrm{P}} = \alpha\left[\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\mathrm{a} - \mathrm{K\,Rot\,K}\beta\,.\,\mathrm{a}\wedge\right] = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}}\mathrm{a} - \alpha\,\mathrm{K\,Rot\,K}\beta\,.\,\mathrm{Aa}\,;$$

ed allora dalle (3) e (4) segue subito:

$$\frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}} = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\beta + \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)\,.\,\mathrm{A} - \alpha\,.\,\mathrm{K\,Rot\,K}\beta\,.\,\mathrm{A} - \mathrm{K\,Rot\,K}\alpha\,.\,\mathrm{A}\beta \tag{III}$$ [2].

Se α *e* β *sono derivate*, cioè (cfr. n. 3) $\mathrm{Rot\,K}\alpha = 0$, $\mathrm{Rot\,K}\beta = 0$, si ha:

$$\frac{d(\alpha\beta)}{d\mathrm{P}} = \alpha\frac{d\beta}{d\mathrm{P}} + \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\beta + \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)\,.\,\mathrm{A}\,; \tag{III'}$$

[1] C. Burali-Forti. *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali*, Atti del R. Istituto Veneto, tom. LXXII, parte seconda, 1912-1913, pp. 265-276.

[2] In certi casi, per il prodotto funzionale può essere necessario — a scanso di dannose ambiguità — il segno O. Cfr., per questo, C. Burali-Forti, *Sopra alcuni operatori* ecc., cit.

e se anche il prodotto $\alpha\beta$ è una derivata, si ottiene:

$$(\text{III}'')\qquad \frac{d(\alpha\beta)}{dP} = \alpha\,\frac{d\beta}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\,\beta\,;$$

la quale formula, supposto che α, β siano delle derivate, vale quando, e soltanto quando [come mostra la (III')], anche $\alpha\beta$ è una derivata.

Sarebbe quindi interessante di vedere la condizione a cui debbono soddisfare le omografie α, β perchè, essendo esse derivate, sia pure $\alpha\beta$ una derivata.

5. Una delle forme sotto la quale può esprimersi detta condizione è la seguente:

In virtù di una formula ottenuta dal Pensa ([1]), cioè dalla:

$$2V\left(\alpha K\,\frac{d\beta\mathbf{a}}{dP}\right) = [\mathrm{Rot}(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\beta - CK\alpha\,.\,\mathrm{Rot}\,\beta]\,\mathbf{a}\,,$$

la quale può sciversi:

$$2V\left(K\beta K\,\frac{dK\alpha\mathbf{a}}{dP}\right) = \mathrm{Rot}\,K(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,K\beta\,.\,K\alpha - C\beta\,.\,\mathrm{Rot}\,K\alpha]\,\mathbf{a}\,,$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante, perchè si abbia: $\mathrm{Rot}\,K(\alpha\beta) = \mathrm{Rot}(K\beta\,K\alpha) = 0$, quando si supponga essere $\mathrm{Rot}\,K\alpha = 0$, $\mathrm{Rot}\,K\beta = 0$, occorre e basta risulti:

$$V\left(K\beta\,K\,\frac{dK\alpha\mathbf{a}}{dP}\right) = 0\,,$$

od anche:

$$V\left(\frac{dK\alpha\mathbf{a}}{dP}\,\beta\right) = 0\,,$$

qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$.

In altri termini: *Se α e β sono derivate, il prodotto $\alpha\beta$ risulterà pure una derivata quando e solo quando l'omografia:*

$$K\beta K\,\frac{dK\alpha\mathbf{a}}{dP}\,,\quad \textit{ovvero la:}\quad \frac{dK\alpha\mathbf{a}}{dP}\,\beta\,,$$

sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$.

6. La (III) può estendersi facilmente al prodotto di un numero qualunque di omografie; e si ha che:

([1]) A. Pensa, *Sopra alcuni operatori differenziali omografici*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomo XLVIII, 1912-13, pp. 149-155; pag. 150 (6).

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sono delle omografie funzioni del punto* P, *vale la relazione:*

$$\text{(IV)} \quad \frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \frac{d\alpha_n}{dP} + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \frac{d\alpha_{n-1}}{dP} \alpha_n + \cdots$$

$$\cdots + \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \dots \alpha_n + \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \,.\, \mathrm{A} -$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \,.\, \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_n \,.\, \mathrm{A} - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \,.\, \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{n-1} \,.\, \mathrm{A}\alpha_n -$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-3}\, \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{n-2} \,.\, \mathrm{A}\alpha_{n-1} \alpha_n - \cdots - \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_1 \,.\, \mathrm{A}\alpha_2 \dots \alpha_n .$$

Questa formula si dimostra senza difficoltà per induzione. Supposto infatti sia vera per un certo valore intero e positivo m, di n, sostituiamo in essa, ad α_m (per $n = m$), il prodotto $\alpha_m \alpha_{m+1}$; applicando la (III), si ottiene:

$$\frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1})}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \Big[\alpha_m \frac{d\alpha_{m+1}}{dP} + \frac{d\alpha_m}{dP} \alpha_{m+1} +$$

$$+ \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m \alpha_{m+1}) \,.\, \mathrm{A} - \alpha_m \mathrm{K\,Rot\,K}\alpha_{m+1} \,.\, \mathrm{A} - \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_m \,.\, \mathrm{A}\alpha_{m+1} \Big] +$$

$$+ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-2} \frac{d\alpha_{m-1}}{dP} \alpha_m \alpha_{m+1} + \cdots + \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} +$$

$$+ \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m+1}) \,.\, \mathrm{A} - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m \alpha_{m+1}) \,.\, \mathrm{A} -$$

$$- \alpha_1 \dots \alpha_{m-2} \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_{m-1} \,.\, \mathrm{A}\alpha_m \alpha_{m+1} - \cdots - \mathrm{K\,Rot\,K}\,\alpha_1 \,.\, \mathrm{A}\,\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+1} ,$$

nella quale si elidono i termini in $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha_m \alpha_{m+1}) \,.\, \mathrm{A}$; dopo ciò, risulta provato che la (IV) vale pure per $n = m + 1$. E siccome essa coincide con la (III) per $n = 2$, si conclude che essa vale per ogni valore intero e positivo di n, cioè è vera in ogni caso.

7. Come nel n. 4, possiamo osservare che, *se le omografie* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sono delle derivate, allora: quando, e solo quando, è pure una derivata il loro prodotto* $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n$, si ha:

$$\text{(IV')} \quad \frac{d(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{dP} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \frac{d\alpha_n}{dP} + \cdots + \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dP} \alpha_3 \dots \alpha_n +$$

$$+ \frac{d\alpha_1}{dP} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n ;$$

e mi sembra degno di nota il fatto che, fra le condizioni ora indicate come sufficienti perchè valga la (IV′), non compaiono affatto i prodotti formati con una parte soltanto delle n omografie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Similmente a quanto si è fatto nel n. 5, dalla formula (2) del Pensa (loc. cit., pag. 150):

$$2\mathrm{V}\left(\alpha \frac{d\beta \mathbf{a}}{dP}\right) = [\mathrm{Rot}(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,\alpha \,.\, \beta]\,\mathbf{a} ,$$

per **a** vettore costante, si deduce:

$$2V\left[K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP}\right] =$$

$$= [\mathrm{Rot}\,K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n) - \mathrm{Rot}\,K\alpha_n \,.\, K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n)]\,\mathbf{a}\,;$$

quindi, essendo $\mathrm{Rot}\,K\alpha_n = 0$, affinchè risulti pure $\mathrm{Rot}\,K(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n) = 0$, orcorre e basta che l'omografia $K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP}$ sia una dilatazione, qualunque sia il vettore costante **a**.

Dunque: *se* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sono delle derivate, la* (IV′) *sussiste quando e solo quando l'omografia:*

$$K\alpha_n \frac{dK(\alpha_1\,\alpha_2 \,.\,.\, \alpha_{n-1})\,\mathbf{a}}{dP}\,,$$

per **a** *vettore costante arbitrario, è una dilatazione.*

8. Dalla (IV), in particolare, si ricava quale *espressione della derivata di una qualsivoglia potenza intera e positiva n-esima d'una omografia:*

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1} +$$

$$+ K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha^n \,.\, A - \alpha^{n-1}K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A -$$

$$- \alpha^{n-2}K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A\alpha - \cdots - K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha \,.\, A\alpha^{n-1}\,;$$

la quale, *quando* α *è una derivata*, si riduce a:

$$(\mathrm{V}') \qquad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} +$$

$$+ \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1} + K\,\mathrm{Rot}\,K\alpha^n \,.\, A\,;$$

e, *se anche* α^n *è una derivata*, si ha:

$$(\mathrm{V}'') \qquad \frac{d\alpha^n}{dP} = \alpha^{n-1}\frac{d\alpha}{dP} + \alpha^{n-2}\frac{d\alpha}{dP}\alpha + \cdots + \alpha\frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-2} + \frac{d\alpha}{dP}\alpha^{n-1}\,.$$

Per quanto si è detto nel n. 7, *se* α *è una derivata la* (V″) *sussiste quando e solo quando* $K\alpha\frac{dK\alpha^{n-1}\mathbf{a}}{dP}$ *è una dilatazione, qualunque sia il vettore costante* **a**.

Geometria. — *Sopra una questione di geometria cinematica.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Una curva C_1 si dice *trasformata asintotica* di un'altra curva C, quando quella e questa sono asintotiche curvilinee di una medesima superficie rigata. Nella trasformazione si fa corrispondere ad ogni punto M di C il punto M_1 di C_1 che si trova sulla generatrice passante per M [1].

Il problema della costruzione di tutte le trasformate asintotiche C_1 di una curva C si risolve con quadrature. Vi si giunge per parecchie vie, e in una Memoria in corso di stampa [2], ho seguito quella che qui riassumo: Designamo con x, y, z le coordinate del punto M di C, in funzione dell'arco v della curva, con

$$\alpha, \beta, \gamma \quad ; \quad \xi, \eta, \zeta \quad ; \quad \lambda, \mu, \nu ,$$

i coseni direttori, rispettivamente, della tangente, della normale principale, della binormale, con $\frac{1}{\varrho}$ e $\frac{1}{T}$ la flessione e la torsione della curva e con le medesime lettere, munite dell'indice 1, gli elementi corrispondenti per la curva trasformata C_1. Indichiamo con $\theta(v)$ la funzione dell'arco v di C che misura l'angolo di inclinazione del raggio MM_1 sulla tangente alla C in M, con $t(v)$ la lunghezza del tratto MM_1, con $\sigma(v)$ l'angolo (fra 0 e π) delle binormali in M e in M_1 alle due curve C e C_1. Si ha il teorema (cfr. la mia citata Memoria):

Se θ, t, σ sono tali funzioni dell'arco v di C da soddisfare alle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dv} + \dfrac{1}{\varrho} = \left(\dfrac{T}{t} + \cot\sigma\right)\dfrac{\cos\theta}{T} , \\[2ex] \dfrac{d\cot\sigma}{dv} + \dfrac{T}{t}\dfrac{d\log t}{dv} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \dfrac{T^2}{t^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{T} , \end{cases}$$

le formole

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = x + t(\alpha\cos\theta + \xi\operatorname{sen}\theta) , \\ y_1 = y + t(\beta\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta) , \\ z_1 = z + t(\gamma\cos\theta + \zeta\operatorname{sen}\theta) , \end{cases}$$

[1] Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXV, 1° sem., 1908.

[2] Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria: Sulle congruenze rettilinee* W [in corso di stampa nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo].

rappresentano le coordinate del punto M_1, *corrispondente al punto* M *di* C, *nella più generale trasformazione asintotica di* C.

Di questo teorema ho fatto diverse applicazioni nella Memoria citata; in questa breve Nota mi permetto di mostrare come esso fornisca la completa risoluzione della seguente questione di *geometria cinematica*:

Determinare tutti i movimenti di una retta in cui la traiettoria di ogni punto è un'asintotica sulla rigata generata della retta.

La questione può trattarsi per altre vie, specialmente quando si pensi ch'essa può anche così formularsi:

Costruire tutte le superficie rigate (le diremo rigate R) *sulle quali le punteggiate proiettive, secondo cui le asintotiche curvilinee segano le generatrici, risultano identiche.*

La trattazione che vado ad esporre ha il merito di una grandissima semplicità nei calcoli.

2. Alla classe delle rigate R, le cui asintotiche segano le generatrici in punteggiate identiche, appartiene l'*elicoide rigata d'area minima*. Vedremo che l'elicoide rigata d'area minima fornisce un esempio particolarissimo di tali rigate, nonostante possiamo fin da ora rilevare una proprietà comune a tutte, è la seguente:

Le rigate R *sono a piano direttore.*

Ed infatti la linea nel piano all'infinito di ogni rigata R deve risultare un'asintotica, e perciò sarà una retta.

3. Per la trattazione analitica del nostro problema, domandiamoci, come prima cosa, se esistono trasformazioni asintotiche per una curva C nelle quali il tratto $MM_1 = t(v)$, congiungente due punti corrispondenti, ha lunghezza costante $= u$. Ponendo $t = u$ nelle (1), si vede che θ e σ devono soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dv} + \dfrac{1}{\varrho} = \left(\dfrac{T}{u} + \cot\sigma\right)\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{T}, \\[2mm] \dfrac{d\cot\sigma}{dv} = \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \dfrac{T^2}{u^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{T}. \end{cases}$$

Ne segue che: *Per ogni curva* C *esistono* ∞^3 *sue trasformate asintotiche tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante; ciascuna trasformata risulta individuata coll'assegnarle, sopra un determinato piano, osculante in* M *la* C, *un punto* M_1 *per cui deve passare, e un piano per* MM_1 *dal quale deve essere osculata.*

Se consideriamo ora una rigata R, le sue asintotiche sono trasformate asintotiche di una fissata C fra esse, tali che la distanza fra due punti corrispondenti è costante. Designamo con C_u l'asintotica di R che stacca sulle generatrici, a partire dai punti di C, un segmento di lunghezza u. Le funzioni θ e σ relative alla coppia C e C_u di trasformate asintotiche devono

soddisfare al sistema (3), ne segue l'esistenza di due soluzioni θ e σ del detto sistema *di cui la prima non dipende da u*. Se pertanto con $\tau(v)$ indichiamo una funzione della sola v, dovremo avere

$$\frac{T}{u} + \cot\sigma = \tau(v), \tag{4}$$

e quindi, se si tien conto della seconda delle (3),

$$\frac{\partial \cot\sigma}{\partial u} = \frac{T}{u^2},$$

$$\frac{\partial \cot\sigma}{\partial v} = \left(1 + \cot^2\sigma - \frac{T^2}{u^2}\right)\frac{\cos\theta}{T}.$$

Eguagliando le due espressioni che queste equazioni forniscono per $\frac{\partial^2 \cot\sigma}{\partial u\, \partial v}$, si ottiene

$$\frac{dT}{dv} = 2\tau\cos\theta. \tag{5}$$

Se infine scriviamo che il valore di $\cot\sigma$ fornito dalla (4) soddisfa alla seconda equazione delle (3), si ricava, tenendo conto della (5),

$$\frac{d\tau}{dv} = (1 + \tau^2)\,\frac{\cos\theta}{T}.$$

Troviamo dunque che la torsione e la flessione della C devono essere tali funzioni dell'arco v, che esistano *due* funzioni τ e θ di v verificanti le *tre* equazioni:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dT}{dv} = 2\tau\cos\theta, && 1^a \\ &\frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{\varrho} = \tau\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}, && 2^a \\ &\frac{d\tau}{dv} = (1 + \tau^2)\,\frac{\cos\theta}{T}. && 3^a \end{aligned}\right.$$

E viceversa, riesce evidente che se una curva C possiede l'indicata particolarità, la rigata che si ottiene conducendo per ogni punto di C e nel relativo piano osculatore un raggio inclinato sulla tangente di un angolo misurato dalla funzione $\theta(v)$, soddisfacente, colla $\tau(v)$, alle (5), è la più generale rigata R.

Per la costruzione delle curve C, asintotiche di una rigata R, procediamo al modo seguente. Osserviamo che dalla 1ª e dalla 3ª delle (5) si ricava

$$\frac{2\tau}{1+\tau^2}\,\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{T}\,\frac{dT}{dv},$$

e quindi, designando con a una costante arbitraria,

$$\mathrm{T} = a(1 + \tau^2) . \tag{6}$$

Ad una curva C si può dunque assegnare ad arbitrio la flessione $\frac{1}{\varrho}$ in funzione dell'arco v; la torsione sarà poi fornita dalla (6), dove $\tau(v)$ si ricava dall'integrazione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle *due* funzioni incognite θ e τ:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau}{dv} &= \frac{\cos\theta}{a} , \\ \frac{d\theta}{dv} &= -\frac{1}{\varrho} + \frac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)} . \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Meglio conviene però enunciare il risultato a cui siamo giunti nella forma seguente:

La torsione e la flessione, in funzione dell'arco v, di un'asintotica C *per la piu generale rifiata* R, *sono definiti dalle seguenti eguaglianze:*

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{a(1+\tau^2)} \quad , \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)} - \frac{d\theta}{dv} , \tag{8}$$

dove θ è una funzione di v assegnata arbitrariamente, esprimente l'angolo secondo cui la C *taglia le generatrici della rigata* R, *a è una costante arbitraria, e τ si ricava con una quadratura dall'equazione*

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos\theta}{a} .$$

Costruita la curva C, *siano $x = \overline{x}(v)$, $y = \overline{y}(v)$, $z = \overline{z}(v)$ le sue equazioni, le equazioni della rigata* R *che possiede questa curva fra le sue asintotiche, sono*

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \overline{x}(v) + u(\alpha\cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta) , \\ y &= \overline{y}(v) + u(\beta\cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta) , \\ z &= \overline{z}(v) + u(\gamma\cos\theta + \zeta \operatorname{sen}\theta) , \end{aligned} \right. \tag{9}$$

ove u e v designano i parametri delle asintotiche.

Già sappiamo che ogni rigata R è a piano direttore. Lo possiamo verificare analiticamente, calcolando il wronsckiano delle *tre* funzioni di v:

$$\alpha\cos\theta + \xi\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \beta\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \gamma\cos\theta + \zeta\operatorname{sen}\theta ,$$

si trova, con un facile calcolo, tenendo presente le equazioni (5), ch'esso è

identicamente nullo. Segue l'esistenza di tre determinati e costanti coseni direttori l, m, n pei quali è identicamente

$$(10) \qquad l(\alpha \cos\theta + \xi \operatorname{sen}\theta) + m(\beta\cos\theta + \eta\operatorname{sen}\theta) + \\ + n(\gamma\cos\theta + \zeta\operatorname{sen}\theta) = 0 .$$

Per individuare la giacitura del piano direttore della rigata R, calcoliamo i coseni direttori della direzione fissa (l, m, n) rispetto al triedro mobile determinato dalla tangente, dalla normale principale e dalla binormale alla C. A tale scopo disponiamo la rigata R in modo che il suo piano direttore sia il piano (x, y), la (10) ci darà

$$(11) \qquad \cot\theta = -\frac{\zeta}{\gamma} ,$$

mentre γ, ζ, ν rappresenteranno i coseni direttori ultimamente menzionati. Dalla (11), se si tien conto della seconda delle (5), si trae

$$-\frac{\nu\gamma}{\gamma^2+\zeta^2} = \tau\operatorname{sen}\theta ,$$

e quindi, poichè $\zeta = -\gamma\cot\theta$,

$$\nu = -\frac{\tau\gamma}{\operatorname{sen}\theta} ,$$

ne segue

$$\gamma = \varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad , \quad \zeta = -\varepsilon\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad , \quad \nu = -\varepsilon\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} ,$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Si ha pertanto che i coseni direttori l, m, n della direzione fissa, alla quale le generatrici della rigata R si mantengono normali, sono

$$(12) \qquad \begin{cases} l = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\alpha\operatorname{sen}\theta - \xi\cos\theta - \lambda\tau) , \\ m = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\beta\operatorname{sen}\theta - \eta\cos\theta - \mu\tau) , \\ n = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\tau^2}}(\gamma\operatorname{sen}\theta - \zeta\cos\theta - \nu\tau) . \end{cases}$$

Si verifica subito, tenendo conto delle (5), che l, m, n sono costanti.

I risultati della precedente breve ricerca conducono dunque al seguente teorema di geometria cinematica:

Si costruisca una curva C *per la quale la torsione e la flessione, in funzione dell'arco* v, *siano date dalle eguaglianze*:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a(1+\tau^2)} \quad , \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\tau\operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)} - \frac{d\theta}{dv} ,$$

dove θ è una funzione arbitraria di v, a è una costante arbitraria e τ si ricava dall'equazione

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos\theta}{a};$$

i coseni direttori l, m, n forniti dalle (12) *risulteranno costanti. Si imprima ora ad un piano π un movimento traslatorio nel quale mantenga la giacitura normale alla direzione l, m, n, ed un suo punto* M *descriva la curva* C; *la retta comune al piano π e al piano osculatore in* M *alla* C *si muoverà secondo il più generale movimento in cui ogni punto descrive un'asintotica della rigata generata della retta.*

4. Notevolmente semplice è la generazione del movimento della retta, quando ad un suo punto M si assegni una traiettoria rettilinea. Bisognerà allora integrare il seguente sistema di equazioni

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\tau}{dv} &= \frac{\cos\theta}{a}, \\ \frac{d\theta}{dv} &= \frac{\tau \operatorname{sen}\theta}{a(1+\tau^2)}, \end{aligned}\right.$$

che si deduce dal sistema (7), per $\frac{1}{\varrho} = 0$. Segue dalle (7'):

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\frac{d\theta}{dv} = \frac{\tau}{1+\tau^2}\frac{d\tau}{dv},$$

e quindi, se b designa una seconda costante arbitraria,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} b \,.\, \sqrt{1+\tau^2}\,.$$

Dalla prima delle (7') seguirà

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\varepsilon}{a}\sqrt{\cos^2 b - \tau^2 \operatorname{sen}^2 b} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'onde

$$\tau = \cot b \,.\, \operatorname{sen}\left\{\varepsilon \frac{\operatorname{sen} b}{a}(v-c)\right\}.$$

Possiamo supporre $c = 0$, e indicare con k la costante $\varepsilon\frac{\operatorname{sen} b}{a}$, si avrà

$$\tau = \cot b \,.\, \operatorname{sen} kv\,,$$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} b \,.\, \sqrt{1+\cot^2 b \operatorname{sen}^2 kv}\,, \qquad \cos\theta = \varepsilon \cos b \cos kv\,.$$

$$\mathrm{T} = \varepsilon\frac{\operatorname{sen} b}{k}(1+\cot^2 b \operatorname{sen}^2 kv)\,.$$

Se ora supponiamo che la traiettoria rettilinea C del punto M sia l'asse delle z, bisognerà porre nelle (9), $\overline{x} = \overline{y} = 0$, $\overline{z} = v$ e quindi $\alpha = \beta = \zeta = \nu = 0$, $\gamma = 1$. Si hanno subito le espressioni di $\xi , \eta ; \lambda , \mu$ e le equazioni della rigata R generata dalla retta mobile risulteranno

$$x = u \operatorname{sen} b \cos kv \,,$$

$$y = - u \operatorname{sen} kv \,,$$

$$z = v \pm u \cos b \cos kv \,.$$

La giacitura del piano direttore della R è normale alla direzione $\cos b$, o, $\mp \operatorname{sen} b$.

Concludiamo pertanto che:

Il più generale movimento di una retta m nel quale ogni punto descrive un'asintotica della rigata descritta dalla retta, colla condizione che la traiettoria di un suo punto M *sia una retta assegnata r si genera al modo seguente: Si consideri un piano per la retta mobile m, e ad esso si imprima un movimento traslatorio rettilineo, nella direzione della r, seco trascinando la retta m che contemporaneamente si muove nel piano di moto rotatorio attorno al punto* M *con una velocità in rapporto costante rispetto a quella di* M.

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota II di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Mantenendo le denominazioni adottate nella Nota I, poniamo

$$\sigma = \int_t^{t+\tau} \sqrt{\mathfrak{T}}\, dt$$

$$\mathfrak{A} = \int_t^{t+\tau} \mathfrak{T}\, dt \,,$$

cioè rappresentiamo con σ il valore dell'arco di traiettoria percorso da S nell'intervallo $(t \,, t + \tau)$ e con $\mathfrak{A}$ il valore dell'azione delle forze attive su S relativo allo stesso intervallo. Dal risultato ottenuto in fine alla Nota I, segue, in particolare, che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S si riduca (a meno di un sistema di forze perpendicolare alla velocità) ad un sistema di forze derivante da una resi-

stenza di mezzo per la quale (indicando con h, k, l delle costanti positive arbitrarie) la funzione caratteristica abbia la forma

$$f(\mathfrak{T}) = \begin{cases} h & \text{(resistenza viscosa)} \\ k\sqrt{\mathfrak{T}} & \text{(resistenza idraulica)} \\ l\mathfrak{T}, \end{cases}$$

è che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $\begin{cases} \tau \\ \sigma \\ \mathfrak{a} \end{cases}$ solamente, positiva per $\begin{cases} \tau \\ \sigma \\ \mathfrak{a} \end{cases} > 0$.

Dal risultato medesimo segue che tutte le volte che il sistema di forze attive su S si riduca (sempre a meno di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento) ad un sistema di forze derivante da una resistenza di mezzo di funzione caratteristica

$$f(\mathfrak{T}) = h + k\sqrt{\mathfrak{T}}$$

(cioè composta di una resistenza viscosa e di una resistenza idraulica). $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di τ e σ soltanto, positiva per τ e σ positivi. La proprietà inversa è pure vera, e si dimostra senza difficoltà osservando che, dall'essere

$$P_{t,\tau} = \varphi(\tau, \sigma),$$

segue

$$-\frac{1}{\mathfrak{T}_t}\frac{d\mathfrak{T}_{t+\tau}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\sqrt{\mathfrak{T}_{t+\tau}},$$

ed anche — indicati con h e k i valori positivi (¹) di $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\log\mathfrak{T} = -(h + k\sqrt{\mathfrak{T}}),$$

(¹) Che $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0}$ e $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}$ sono necessariamente positivi, è immediata conseguenza

1°) della diseguaglianza

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\tau=\sigma=0} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}\sqrt{\mathfrak{T}} \geqq 0$$

che, indipendentemente dal valore di $\mathfrak{T}$, deve essere verificata perchè si suppone $\varphi(\tau, \sigma)$ positiva per τ e σ positivi, mentre è

$$\varphi(0, 0) = P_{t,0} = 0;$$

2°) della (1) che fa escludere che anche uno solo dei valori in questione possa essere nullo.

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)_{\tau=\sigma=0}$ — :

e infine

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-\int_t^{t+\tau} (h + k\sqrt{\mathfrak{T}})\, dt}.$$

2. Sia P un punto materiale libero, $\mathbf{v}$ la sua velocità, $\mathbf{F}_T$ ed $\mathbf{F}_N$ i componenti tangenziale e normale della forza totale agente sopra di esso, δ la distanza delle sue posizioni all'inizio e al termine dell'intervallo di tempo qualunque $(t, t + \tau)$.

Avendo presenti le conclusioni della Nota I e più specialmente le loro conseguenze poste in evidenza al § 1, può sembrare anche superfluo di rilevare esplicitamente che, come abbiamo enunciato fin dal principio della Nota I, allora, e allora solamente, che sia

$$\mathbf{F}_T = -h\mathbf{v} \qquad \text{(resistenza viscosa)}$$

ovvero

$$\mathbf{F}_T = -kv\mathbf{v} \qquad \text{(resistenza idraulica)},$$

$P_{t,\tau}$ sarà una funzione di τ soltanto, ovvero di σ soltanto, positiva pei valori positivi del suo argomento.

Nel secondo caso, quando ulteriormente $\mathbf{F}_N$ sia tale [1] che la traiettoria

[1] È opportuno di rilevare, specialmente a giustificazione di quanto è asserito nella nota (6), che condizione necessaria e sufficiente affinchè la traiettoria di P sia un'elica circolare (in particolare un cerchio o una retta) è che sia

$$(\alpha) \qquad \mathbf{F}_N = v\mathbf{v} \wedge \mathbf{H},$$

$\mathbf{H}$ essendo un vettore costante non nullo parallelo all'asse del cilindro sede dell'elica.

La proprietà diretta risulta immediatamente dall'espressione generale di $\mathbf{F}_N$ in funzione di v e del raggio di curvatura della traiettoria. Per dimostrare poi la proprietà inversa, basterà che prendiamo in esame i moti delle proiezioni P_1, P_2 di P sopra un piano perpendicolare ad H e sopra una retta parallela ad H. Indicando con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ le velocità di P_1, P_2, se vale la (α), evidentemente sarà

$$(\beta) \qquad \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{F_T}{v}\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{H}$$

$$(\gamma) \qquad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{F_T}{v}\mathbf{v}_2,$$

donde si deduce [moltiplicando scalarmente (β) e (γ) per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$]

$$\frac{d}{dt}\log v_1^2 = \frac{F_T}{v} = \frac{d}{dt}\log v_2^2.$$

Ne segue

$$\frac{v_2}{v_1} = \text{cost},$$

ed anche

$$\frac{v_2}{v} = \text{cost}.$$

Ciò prova che $\mathbf{v}$ forma un angolo costante con H, e al tempo stesso (sempre in base

di P risulti un'elica circolare (in particolare una circonferenza o una retta), $P_{t,\tau}$ si potrà considerare anche come una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$.

Invero le eliche circolari godono la proprietà, sufficiente ad individuarle, che in esse, ad archi di lunghezza eguale, corrispondono corde eguali ([1]).

Si può domandare se non si presenti anche in altri casi la circostanza che $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$:

$$P_{t,\tau} = \psi(\delta) . \tag{2}$$

Alla conclusione che ciò non si verifica, facilmente si perviene nel modo seguente.

Derivando la (2) rispetto a τ, poichè δ è funzione di τ soltanto per il tramite di σ, si ottiene, qualunque sia τ,

$$-\frac{1}{\mathfrak{S}_t}\frac{d\mathfrak{S}_{t+\tau}}{dt} = \psi'(\delta)\frac{d\delta}{d\sigma}\sqrt{\mathfrak{S}_{t+\tau}} ,$$

ed anche, per $\tau = 0$,

$$\frac{1}{\mathfrak{S}}\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -\psi'(0)\sqrt{\mathfrak{S}} , \tag{3}$$

perchè, evidentemente,

$$\left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = 1 .$$

Indicando con k il valore positivo ([2]) di $\psi'(0)$ dalla (3) si deduce

$$P_{t,\tau} = 1 - e^{-k\sigma} , \tag{4}$$

---

all'espressione generale della componente normale della forza applicata ad un punto materiale in funzione della velocità e del raggio di curvatura della traiettoria) permette di dedurre dalla (β) che la flessione della traiettoria di P_1 (se non è identicamente $v_1 = 0$) è costante e $\neq 0$, così che la traiettoria stessa è una circonferenza (eventualmente degenere in un punto). La traiettoria di P sarà dunque un'elica di un cilindro circolare retto, avente l'asse parallelo al vettore **H**.

([1]) Le eliche circolari sono caratterizzate (cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1902) dall'essere in ogni parte sovrapponibili a sè stesse. In una elica cilindrica a due archi di eguale lunghezza, corrisponderanno dunque corde eguali. Viceversa, se in una curva si verifica questa proprietà, qualunque sia la lunghezza comune dei due archi considerati, risulterà possibile, fissati ad arbitrio due punti P′, P″ della curva, stabilire una corrispondenza della curva in sè, in cui i punti P′, P″ siano omologhi e che conservi le lunghezze degli archi e, al tempo stesso, le distanze. Vuol dire che in tale ipotesi la curva sarà necessariamente sovrapponibile a sè stessa in ogni sua parte, e quindi sarà un'elica circolare, c. d. d.

([2]) Cfr. la (3) della Nota I.

ciò che prova che, se vale la (2), il moto di P è dovuto all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica. Di più, confrontando la (4) colla (2) [quando si tenga presente che è $\psi'(0) \neq 0$] si arriva (senza escludere che la ψ possa essere una funzione multiforme di δ) [1] alla conclusione che, sempre valendo la (2), nella traiettoria di P, a due archi di lunghezza eguale (almeno se tale comune lunghezza non è troppo grande), corrispondono corde eguali. Ciò basta (evidentemente) per potere asserire che la traiettoria di P è un'elica cilindrica.

Possiamo dunque concludere che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ solamente, positiva per $\delta > 0$, caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità, quelli che hanno per traiettoria un'elica circolare (in particolare, una circonferenza o una retta) [2].

Il risultato ottenuto si presta evidentemente ad essere esteso al caso di un sistema olonomo qualunque, in base alla già menzionata rappresentazione del moto di un tale sistema mediante il moto di un punto di un S_n: ma su ciò non insisteremo, non presentando la cosa un effettivo interesse.

Soltanto osserveremo che, se si considera un punto materiale P vincolato a restare sopra un piano fisso (e privo di attrito), le considerazioni ora svolte sono sufficienti a concludere che, l'essere $P_{t,\tau}$ funzione di δ (cioè, se si vuole, della distanza geodetica delle due posizioni occupate da P agli istanti t e $t+\tau$ sulla superficie che rappresenta il vincolo), caratterizza, tra i moti di P dovuti all'azione di una forza perpendicolare alla velocità e di una resistenza idraulica, quelli che hanno per traiettoria una circonferenza (in particolare una retta).

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

Il prof. Almansi, in una Memoria *Sopra una delle esperienze di Plateau* [3] è stato condotto ad enunciare e a dimostrare la seguente proposizione:

Se $f(x)$: 1°) *è una funzione finita e continua insieme alla sua derivata* $f'(x)$ *in tutto l'intervallo* (a, b);

2°) *assume lo stesso valore negli estremi* a e b;

3°) *soddisfa all'uguaglianza* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$;

(1) Ciò che necessariamente accadrà nel caso, effettivamente possibile, che la traiettoria di P sia una circonferenza.

(2) Ciò equivale a dire che l'essere $P_{t,\tau}$ una funzione di δ soltanto, positiva per $\delta > 0$, caratterizza i moti di P che si svolgono sotto l'azione di una resistenza idraulica e di una forza normale alla velocità del tipo $\mathbf{F}_N = v\mathbf{v}\,\Delta \mathrm{H}$ [cfr. la nota (2)].

(3) Annali di Matematica, 1906.

allora è anche

$$\int_a^b [f'(x)]^2\,dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b [f(x)]^2\,dx \text{ »}.$$

La dimostrazione che ne dà il chm̃o Autore procede per gradi, comincia cioè a rivolgersi a funzioni che soddisfano a certe peculiari condizioni, che va poi via via allargando fino a giungere alla classe delle funzioni per cui il teorema stesso è enunciato.

In questa breve Nota, ci proponiamo di giungere direttamente alla proposizione detta nella sua forma più generale, enunciandola per la classe delle funzioni *assolutamente continue* (funzioni integrali), che è più estesa di quella considerata dall'Almansi, facendo anche vedere che, abbandonando l'*assoluta continuità*, si hanno funzioni per le quali la proposizione stessa non è più valida, pur essendo tali funzioni a *variazione limitata*.

Dimostriamo anzi quest'altro teorema, che contiene il precedente come caso particolare:

« *Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua nell' intervallo* (a, b) (¹), *nei cui estremi assume lo stesso valore, e se esiste l'integrale* $\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$, *è*

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx - \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\,dx \leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \quad (^2)$$

Avvertiamo che noi, come l'Almansi, ci fondiamo sulla formula di Parseval, relativa alle serie di Fourier.

La Nota termina con una proposizione relativa al rapporto fra l'integrale di f^2 e quello di f'^2.

1. Facciamo un cambiamento di variabile mediante la posizione

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi}\theta,$$

che fa corrispondere all' intervallo (a, b), l'altro $(0, 2\pi)$. La funzione $f(x)$ viene così mutata in

$$f\left(a + \frac{b-a}{2\pi}\theta\right) = F(\theta),$$

e questa $F(\theta)$ risulterà ancora assolutamente continua, ed assumerà lo stesso

(¹) $b > a$.

(²) Relativamente dai due termini della differenza qui considerata, si sa già che il loro rapporto è sempre ≤ 4, se è $f(a) = f(b) = 0$ (ved. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, Paris, Hermann, 1910, pag. 335).

valore negli estremi 0 e 2π. La disuguaglianza da dimostrare diventerà poi

$$\int_0^{2\pi}[F(\theta)]^2\,d\theta - \int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}F(\theta)\,d\theta\right]^2 .$$

La funzione $F(\theta)$, essendo assolutamente continua è *a fortiori* continua e a variazione limitata. Il *criterio di Jordan* ci assicura allora (avendosi $F(0) = F(2\pi)$) che tale funzione è sviluppabile in serie di Fourier, uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}(a_p \cos px + b_p \operatorname{sen} px) ,$$

Inoltre, sempre per l'assoluta continuità, esiste la dernata $F'(\theta)$ in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, ad eccezione di più di un insieme di misura nulla, ed è

$$\int_0^{\theta}F'(\theta)\,d\theta = F(\theta) - F(0) .$$

Ricordando ancora l'uguaglianza $F(0) = F(2\pi)$, abbiamo [1] che la serie di Fourier della derivata $F'(\theta)$ si ottiene derivando termine a termine quella di $F(\theta)$. Possiamo scrivere così (adottando una notazione dovuta a Hurwitz)

$$F'(\theta) \sim \sum_{1}^{\infty} p(-a_p \operatorname{sen} px + b_p \cos px) .$$

Dalla formula di Parseval, estesa da Fatou [2] alle funzioni di quadrato integrabile, deduciamo allora,

$$\int_0^{2\pi}F^2(\theta)\,d\theta = \pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty}(a_p^2 + b_p^2)\right\}$$

$$\int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta = \pi\left\{\sum_{p=1}^{\infty}p^2(a_p^2 + b_p^2)\right\} ,$$

$$\int_0^{2\pi}[F(\theta)]^2\,d\theta - \int_0^{2\pi}[F'(\theta)]^2\,d\theta \leq \frac{\pi}{2}a_0^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}F(\theta)\,d\theta\right]^2 ,$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. Si vede anche che il segno di uguaglianza sta solo quando sia

$$a_p = b_p = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots),$$

[1] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonometriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, pag. 104.

[2] P. Fatou, *Séries trigonometriques de séries de Taylor*, Acta math., 1906.

vale a dire,

$$F(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta$$

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\left(2\pi \frac{x-a}{b-a}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x-a}{b-a}\right).$$

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita nel modo seguente. Per ogni

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots, \tag{1}$$

dove i numeratori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono uguali a zero oppure a 2, si abbia

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right\}.$$

Per definire $f(x)$ sui punti rimanenti dell' intervallo $(0, 1)$, facciamo così. Consideriamo l'insieme I dei punti di $(0, 1)$; dati dalla (1): questo insieme è *perfetto* e si ottiene asportando dall' intervallo detto tutti i punti *interni* agli intervalli:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{0}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{0}{3} + \frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{0}{3} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\right).$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\right),$$

. . . .

Negli estremi di uno qualunque di questi intervalli (che diconsi *intervalli contigui ad* I) la funzione $f(x)$ ha il medesimo valore: per esempio in $\frac{1}{3}$ si ha:

$$x = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{0}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots\right\} = \frac{1}{2},$$

e in $\frac{2}{3}$

$$x = \frac{2}{3}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{2}.$$

Definiamo, allora, la $f(x)$ in ciascuno degli intervalli contigui ad I, ponendola uguale al valore che essa stessa assume negli estremi dell'intervallo considerato.

La funzione così definita è continua su tutto $(0, 1)$ e non mai decrescente: essa è quindi anche a variazione limitata. In ogni intervallo contiguo a I (esclusi gli estremi) esiste la derivata $f'(x)$, che è uguale a zero. E poichè la somma delle lunghezze di questi intervalli è uguale ad 1 (tale somma è, infatti,

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right\}=1,$$

si ha

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=0.$$

Ma è

$$f(0)=0 \quad . \quad f(1)=1,$$

dunque, essendo,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \neq f(1)-f(0),$$

la $f(x)$ non è assolutamente continua.

Definiamo ora la $f(x)$ in $(1, 2)$ mediante la scrittura

$$f(x)=f(2-x),$$

e in $(2, 4)$ mediante

$$f(x)=-f(4-x).$$

Per la funzione così definita si ha: $f(0)=f(4)$

$$\int_0^4 f(x)\,dx=0$$

$$\int_0^4 [f'(x)]^2\,dx=0$$

$$\int_0^4 [f(x)]^2\,dx>0.$$

e non può dunque essere verificata la disuguaglianza da noi dimostrata per le funzioni assolutamente continue.

3. Vogliamo aggiungere qualche considerazione sul rapporto fra gli integrali di f^2 e f'^2. Abbiamo già ricordato che, nell'ipotesi $f(a)=f(b)=0$, è

$$\int_a^b f^2\,dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'^2 dx.$$

Se fosse solamente $f(a)=0$, quale sarebbe il massimo del rapporto dei due integrali considerati?

Si ponga

$$J_p = \int_a^b (p^2 f'^2 - f^2)\,dx\,,$$

e si cerchi il minimo di quest'integrale fra tutte le funzioni che soddisfano alla condizione $f(a)=0$.

Le *estremali* dell'integrale detto si ottengono integrando l'equazione differenziale

$$f + p^2 f'' = 0\,,$$

e sono date da

$$f = c_1 \cdot \cos\frac{x}{p} + c_2 \operatorname{sen}\frac{x}{p}\,.$$

Per due punti qualunque di ascisse x_1 e x_2, passa sempre una di queste estremali, ed una sola, tutte le volte che è $|x_1 - x_2| < p\,\pi$; dunque se è

$$p > \frac{b-a}{\pi} > 0\,;$$

è sempre possibile circondare l'estremale che congiunge i punti $(a\,,0)\,,(b\,,h)$, dove h è qualunque, con un fascio di estremali che ricopra tutta la striscia compresa fra le rette $x=a\,,x=b$. E poichè qui la derivata seconda rispetto a f' di $p^2 f'^2 - f^2$ è sempre positiva, l'estremale detta dà il minimo assoluto fra tutte le funzioni che assumono in a e in b rispettivamente i valori 0 e h.

Indichiamo con $J_p(h)$ il valore minimo di J_p corrispondente ad h. L'estremale che congiunge $(a\,,0)$ con $(b\,,h)$ è

$$f = \frac{h}{\sin\dfrac{b-a}{p}} \operatorname{sen}\frac{x-a}{p}\,,$$

e si ha perciò

$$J_p(h) = ph^2 \operatorname{cotg}\frac{b-a}{p}\,.$$

È dunque

$$J_p(h) \geq 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} \leq \frac{\pi}{2}$$

$\left(\text{con } J_p(h) = 0 \text{ solo se è } \frac{b-a}{p} = \frac{\pi}{2}\right)$,

$$J_p(h) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{b-a}{p} > \frac{\pi}{2} .$$

Se ne conclude che

Se $f(x)$ è una funzione assolutamente continua che si annulla in a, e tale che il quadrato della sua derivata — considerato là dove questa derivata esiste — sia integrabile, è

$$\int_a^b f^2\,dx \leq 4\,\frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2\,dx ,$$

potendo aversi effettivamente il segno di uguaglianza (¹).

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrispondente F. Enriques.

Lorsque M. Enriques introduisit, dans la théorie des surfaces algébriques, la notion de plurigenre, il remarqua que la surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, avait les genres arithmétique et géométrique nuls ($p_a = p_g = 0$), mais le bigenre égal à l'unité ($P_2 = 1$) (²). Plus tard, M. Enriques démontra que toute surface algébrique régulière, dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à cette surface du sixième ordre (³). M. Enriques fit, de plus, une étude très

(¹) Considerande delle funzioni a derivata limitata e nulle in a, E. E. Levi (*Sui criterî sufficienti per il massimo e per il minimo nel calcolo delle variazioni*, Annali di matematica, tomo XXI, ser. III, Lemma I) aveva già trovato che l'integrale di f^2, non può superare quello di f'^2 moltiplicato per $\frac{(b-a)^2}{2}$.

(²) F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Chap. VI, n. 39), Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), 1896, ser. 3ª, tom. X. On sait que M. Castelnuovo a, vers la même époque, démontré que les conditions de rationnalité d'une surface sont $p_a = P_2 = 0$.

(³) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, idem., 1906, ser. 3ª, tom. XIV. Au sujet des surfaces de genres zéro et de bigenre un, voir aussi: G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, Rendiconti

complète de cette surface, et démontra qu'elle est caractérisée soit par les conditions $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, soit par les conditions équivalentes $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [1], MM. Enriques et Severi ont remarqué qu'il pouvait exister, sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), des involutions d'ordre deux, dépourvues de points unis, représentables sur des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Ensuite, M. Enriques a fait voir qu'inversement une surface de genres zéro et de bigenre un peut toujours être considérée comme représentant une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un [2].

En d'autres termes, si l'on considère la surface Φ, d'ordre six, passant doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0 \ , \ v \equiv ay + by + cz + d = 0 ,$$

cette surface a pour équation [3]

$$\varphi_2(xyz \, , yzv \, , zvx \, , vxy) + xyzv \, f_2(x \, , y \, , z \, , v) = 0 , \tag{1}$$

φ_2 et f_2 étant des polynômes du deuxième degré, et la surface F, représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv ,$$

est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). De plus, M. Enriques a montré que cette surface F, de genres un, peut se ramener (par une transformation birationnelle) à une quadrique double Q.

Il existe donc, sur la surface F, deux involutions d'ordre deux, l'une représentable sur Φ, l'autre sur Q. Chacune de ces involutions détermine une transformation birationnelle de F en elle-même. Je me propose de démontrer, dans cette Note, que les deux transformations ainsi définies sont permutables, et que leur produit engendre une involution d'ordre deux et de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

En joignant ces résultats à ceux de M. Enriques, on pourra donc énoncer le théorème suivant:

---

del Circ. Matem. di Palermo, 1910, tom. XXIX: L. Godeaux, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1913, tom. XLI; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$*, Bulletin de l'Académie roumaine, 1913, tom. II.

[1] Acta Mathematica, vol. XXXII, XXXIII (XXXII, n. 38).

[2] Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere 1*, Rend della R. Accad. di Bologna, 13 genn. 1908.

[3] Enriques, *Introduzione...*, loc. cit. (note au n. 39).

Toute surface algébrique Φ, *de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). *représente une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, appartenant a une surface* F *de genres un* ($p_a = p_4 = 1$). *Cette surface* F *possède trois transformations birationnelles involutives permutables en elle-même:*

La première engendre l'involution de genres zéro et de bigenre un représentée par Φ.

La deuxième engendre une involution rationnelle qui permet de représenter F *sur une quadrique double (ayant une courbe de diramation d'ordre huit).*

La troisième engendre une involution de genres un ($p_a = P_3 = 1$).

1. Soit Φ la surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), représentée par l'équation

$$(1) \qquad \varphi_2(xyz\,,\, yzv\,,\, zvx\,,\, vxy) + xyzv\, f_2(x\,,y\,,z\,,v) = 0\,,$$

dans laquelle φ_2 et f_2 désignent des polynômes du deuxième degré et v une fonction linéaire $ax + by + cz + d$. La surface Φ passe doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0\ ,\ v \equiv ax + by + cz + d = 0\,.$$

De plus, c'est *une surface générale de sa classe* (Enriques).

Considérons la surface F représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv\,.$$

Elle est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), et la transformation T_1, d'équations

$$x' = x\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ u' = -u\,,$$

engendre, sur F, une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, représentable sur Φ (Enriques).

Considérons, sur la surface Φ, un système complet $|\Gamma|$, de genre $\pi > 1$, et son adjoint $|\Gamma'|$. Ces systèmes ont le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. En général, ils sont dépourvus de points-base. Si $|\Gamma|$ a des points-base, ils sont au nombre de deux et les courbes Γ sont hyperelliptiques. Il est aisé de voir que les Γ' sont également hyperelliptiques et que $|\Gamma'|$ a, par suite, deux points-base [1].

Désignons par $\overline{C}, \overline{C}'$ les courbes de F qui correspondent respectivement aux courbes Γ, Γ'. Soit $|C|$ le système complet contenant les courbes $\overline{C}$. Le système $|C|$ a le degré $4\pi - 4$, le genre et la dimension $2\pi - 1$,

[1] Enriques, *Sopra le superficie*.., loc. cit. (n. 7).

Entre une courbe $\boldsymbol{\Gamma}$ et une courbe $\bar{C}$. nous avons une correspondance (1 , 2) dépourvue de points de diramation. Par suite, un groupe canonique de $\boldsymbol{\Gamma}$ a pour correspondant un groupe canonique de $\bar{C}$. Or, les $\boldsymbol{\Gamma}'$ découpent, par définition, des groupes canoniques sur les $\boldsymbol{\Gamma}$; les courbes correspondantes $\bar{C}'$ découpent donc des groupes canoniques sur les courbes $\bar{C}$. Or, les courbes C découpent également des groupes canoniques sur les $\bar{C}$. Par suite, le système $|C|$ comprend les courbes $\bar{C}'$.

Les courbes de F *qui correspondent à des courbes de genre supérieur à l'unité, de* $\boldsymbol{\Phi}$ *et à leurs adjointes, sont équivalentes.*

2. Supposons actuellement que $|\boldsymbol{\Gamma}|$ soit un faisceau de genre deux ($\pi = 2$). De pareils faisceaux existent certainement sur $\boldsymbol{\Phi}$; l'un d'eux est, par exemple, découpé sur la surface (1) par les plans $\lambda x + \mu y = 0$.

Les courbes $\boldsymbol{\Gamma}'$ sont également de genre deux et forment un faisceau. Les faisceaux $|\boldsymbol{\Gamma}|, |\boldsymbol{\Gamma}'|$ ont, de plus, chacun, deux points-base.

Le système $|C|$ a maintenant le degré quatre, le genre et la dimension trois.

On sait qu'une courbe de genre trois possédant une involution (∞^1) d'ordre et de genre deux, est hyperelliptique ([1]). Les courbes $\bar{C}$ et $\bar{C}'$ sont dans ce cas. Sur chaque courbe $\bar{C}$ se trouve donc une g_2^1, et les ∞^2 groupes de ces ∞^1 g_2^1 forment une involution I_2 sur F. Mais les courbes C découpant sur les $\bar{C}$ des groupes canoniques, chacune d'elles contient ∞^1 groupes de I_2 et, par conséquent, $|C|$ est composé avec I_2. Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un S_3; F se transforme en une quadrique double Q qui a, nécessairement, une courbe de diramation d'ordre huit ([2]). Il en résulte que toutes les courbes C sont hyperelliptiques et que les groupes de I_2 situés sur une courbe $\bar{C}'$, y forment la g_2^1 dont nous avons reconnu l'existence plus haut (une courbe de genre trois ne peut en effet contenir plus d'une g_2^1).

Nous désignerons par T_2 la trasformation birationnelle involutive de F engendrant I_2.

3. Sur une courbe C, hyperelliptique, de genre trois, T_1 change un groupe de la g_2^1 en un groupe de cette série. À deux groupes de la g_2^1 conjugués par rapport à T_1, correspondent deux points de Q, c'est-à-dire qu'à T_1 correspond une transformation birationnelle Θ de Q en elle-même. De plus, T_1 étant involutive, il en est de même de Θ.

D'autre part, à deux points de F conjugués par rapport à la transformation $T_3 = T_1 T_2$, correspondent deux points de Q conjugués par rapport à Θ. On en conclut que T_3 est involutive, c'est-à-dire que T_1, T_2 sont per-

([1]) Voir par exemple: R. Torelli, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1914, tom. XXXVII (n. 32, note 33).

([2]) Enriques, *Sui piani doppî di genere uno*, Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), ser. 3a, tom. X, 1896.

mutables ($T_1 T_2 = T_3 T_1$). On sait d'ailleurs que T_3 engendre, sur les courbes $\overline{C}$ ou $\overline{C}'$, des γ_2' elliptiques [1].

Dans le système $|C|$, il y a deux faisceaux $|\overline{C}|, |\overline{C}'|$, dont les courbes sont invariantes pour T_1 e T_3, et aucune courbe C n'appartenant pas à ces faisceaux ne jouit de cette propriété. Par conséquent, la transformation Θ laisse invariantes des sections planes de Q appartenant à deux faisceaux. En d'autres termes, Θ est une homographie involutive bi-axiale.

Les axes de Θ ne sont pas des génératrices de Q, car les courbes $\overline{C}$, $\overline{C}'$ sont des courbes de genre trois et non des courbes elliptiques. Par suite, Θ laisse invariants quatre points de Q. Il y aura donc, ces quatre points n'étant pas en général sur la courbe de diramation de Q, huit points de F invariants pour une des transformations T_1, T_3. Or, par construction, T_1 ne laisse aucun point de F invariant: donc T_3 engendre une involution d'ordre deux possédant huit points unis; et cette involution est, par conséquent, de genres un ($p_a = P_4 = 1$) [2].

Meccanica. — *Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta.* Nota dell'ing. dott. G. Armellini, presentata dal Socio V. Volterra.

Meccanica. — *Potenziali Newtoniani dell'elasticità.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Corrisp. E. Marcolongo.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Torelli, loc. cit.

[2] L. Godeaux, *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un*, Bull. Acad. roy. de Belgique, 1913; *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un*, Annales de l'École Normale (en cours de publication).

Astronomia pratica. — *Sulla costruzione delle tavole per la correzione del passo dei microscopî micrometrici.* Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Per ricavare la misura degli angoli dai cerchi divisi forniti di microscopî micrometrici (¹), si sogliono fare le due letture micrometriche l ed l' rispettivamemente alle divisioni a ed $a+1$ fra le quali viene a trovarsi lo zero micrometrico (²). La somma e la differenza delle due letture, quest'ultima presa sempre nel senso $l'-l$, servono a dare la lettura corretta.

Il prof. Lorenzoni nella sua Memoria: *Determinazioni di Azimut eseguite nel R. Osservatorio di Padova in giugno e luglio 1874 con un Altazimut di Repsold, ed in luglio 1890 con un Altazimut di Pistor, Padova 1891,* ci offre, in fine di pag. 11, la correzione seguente della somma delle due letture:

$$(1) \qquad \Delta(l+l') = -(l'-l) + \frac{l'-l}{\mathrm{I}} \cdot (l+l') ,$$

qualora si avverta che qui in luogo del valore particolare 1200 che compete al Repsold, si è posto I per indicare il numero di parti dell'ordine infimo stimabile, equivalente alle rivoluzioni r occorrenti per far percorrere al filo mobile la distanza tra due divisioni consecutive del cerchio (³). In questa

(¹) L'applicazione dei microscopî micrometrici ai cerchi divisi è di origine inglese, e già nel 1789 il celebre strumento di Ramsden, ordinato dal Piazzi a Londra, aveva i microscopî micrometrici per leggere i due cerchi azimutale e verticale. G. Piazzi, *Della Specola di Palermo*, Palermo, 1792, pp. 20 e 25.

(²) Già nel 1814 Bessel insegnava che il risultato era più attendibile qualora venissero sempre puntati ambedue i segni di divisione del cerchio fra cui si trova lo zero del micrometro; e dichiarava che egli seguiva tal regola senza eccezione: *Astr. Beob. Königsberg*, I, Abth, 1815, pag. VII (Auch wird das Resultat noch dadurch zuverlässiger etc....).

(³) La (1) si ricava dalla formola esatta seguente:

$$\Delta(l+l') = -(l'-l) + \frac{l'-l}{\mathrm{I}} \left\{ (l+l') - (l'-l) \right\} \left\{ 1 - \frac{l'-l}{\mathrm{I}} \right\}^{-1}$$

abbandonando nel secondo membro i termini in $l'-l$ d'ordine superiore al primo. Cfr. Lorenzoni, loc. cit., pag. 11, nonchè A. Abetti, *Il Piccolo Meridiano di Arcetri.* Fasc. num. 7, pag. 34, formola (4).

Le formole date dal Weineck, A. N. vol. 109, pag. 201 (*a*) e (*b*), e quella dell'Albrecht, *Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, vierte Auflage*, Leipzig 1908, pag. 49, sono parimente formole esatte. Il passaggio di esse a quella di Lorenzoni può farsi facilmente, tenendo conto delle rispettive notazioni.

formola intenderemo non soltanto I, ma altresì la somma $l + l'$ e la differenza $l' - l$ espresse in parti dell'ordine infimo, cioè in quei decimi che si stimano a vista sul tamburo che muove la vite del microscopio micrometrico; ed essi sono dunque decimi delle parti p in cui il tamburo medesimo si trova diviso.

2. La (1) può scriversi come segue:

$$\Delta(l + l') = \frac{(l + l') - I}{I} \cdot (l' - l),$$

e ponendo:

$$\frac{(l + l') - I}{I} = C, \tag{2}$$

sarà

$$\Delta(l + l') = C(l' - l) \tag{3}$$

Questa formola dice che la correzione $\Delta(l + l')$ è data dal prodotto di due fattori, il primo dei quali dipende dalla somma $l + l'$ delle due letture, e l'altro è la differenza delle medesime. In luogo di un valore particolare della differenza $l' - l$ si può assumere un valore R che sia la media aritmetica di singoli valori $l' - l$ ottenuti da una serie di osservazioni (¹).

Il calcolo della correzione $\Delta(l + l')$ potrà farsi rapidamente, anche col sussidio delle tavole di moltiplicazione, quando si abbia una tavoletta che dia per interpolazione a vista il valore di C corrispondente al particolare valore della variabile $l + l'$ (²).

Questa tavoletta può costruirsi come segue. I valori minimo e massimo di $l + l'$ sono 0 e $2I$, ed i corrispondenti valori di C sono, per la formola (2), rispettivamente $-1,00$ e $+1,00$. Se ora poniamo (³)

$$K = \frac{I}{10} \tag{4}$$

(¹) « Correction for Runs » nelle: Greenwich, *Astronomical observations in the Year*, 1837. Introduction, pag. XVI.

(²) A. Abetti, fasc. cit., pag. 36.

(³) Non è strettamente necessario che sia $K = \frac{I}{10}$, per cui in generale porremo

$$K = \frac{I}{m}$$

Allora sarà $I = mK$, e posto $l + l' = nK$, si avrà

$$C = \frac{nK - mK}{mK} = \frac{n - m}{m}$$

sarà $I = 10K$ e quindi $2I = 20K$, e posto ancora

$$l + l' = nK$$

dove $n = 0\ 1\ 2 \ldots 20$, avremo dalla (2):

$$C = \frac{nK - 10K}{10K} = \frac{n - 10}{10}. \quad (5)$$

Facendo variare n da 0 a 20, si avranno i seguenti argomenti $l + l'$:

$$0\ K\ 2K \ldots 9K\ 10K\ 11K \ldots 20K,$$

a cui corrisponderanno rispettivamente i valori di C:

$$-1.00\ -0.90\ -0.80 \ldots -0.10\ 0.00\ +0.10 \ldots +1.00,$$

laonde si ha la seguente *tabella dei valori del coefficiente* C:

$nK = l + l'$	C	$nK = l + l'$
0 . K	— 1.00 +	20 . K
1	— 0.90 +	19
2	— 0.80 +	18
3	— 0.70 +	17
4	— 0.60 +	16
5	— 0.50 +	15
6	— 0.40 +	14
7	— 0.30 +	13
8	— 0.20 +	12
9	— 0.10 +	11
10	0.00	10

Il C è negativo per gli argomenti di sinistra,
ed è positivo per quelli di destra.

Questa tavola è generale, e nei casi particolari dei varî strumenti, converrà per ciascun I calcolare il rispettivo K.

3. Consideriamo ora diversi strumenti per i quali I, espresso in decimi delle parti del tamburo, sia 1200 1500 1800 2400 ed avremo la seguente *tabella degli argomenti*:

n K	I			
	1200	1500	1800	2400
0 . K	0	0	0	
1	120	150	180	240
2	240	300	360	480
3	360	450	540	720
4	480	600	720	960
5	600	750	900	1200
6	720	900	1080	1440
7	840	1050	1260	1680
8	960	1200	1440	1920
9	1080	1350	1620	2160
10	1200	1500	1800	2400
11	1320	1650	1980	2640
12	1440	1800	2160	2880
13	1560	1950	2340	3120
14	1680	2100	2520	3360
15	1800	2250	2700	3600
16	1920	2400	2880	3840
17	2040	2550	3060	4080
18	2160	2700	3240	4320
19	2280	2850	3420	4560
20	2400	3000	3600	4800

S'intuisce subito come questi argomenti siano prontamente convertibili in rivoluzioni intere e parti di rivoluzione. Le due prime colonne dànno gli argomenti per i due strumenti adoperati dal prof. Lorenzoni nelle due determinazioni di azimut trattate nella Memoria citata fin da principio. Le caratteristiche di questi strumenti sono:

A) Altazimut di Repsold adoperato nel 1874. L'intervallo sul cerchio è $4' = 240''$, percorsi dal filo mobile del micrometro con 2 rivoluzioni. Il tamburo è diviso in 60 parti, quindi il valore di una rivoluzione e quello di una parte, sono: $r = 2'$, $p = 2''$, ed $\mathrm{I} = 2^r\ 0^p = 1200$ decimi di parte.

B) Altazimut di Pistor adoperato nel 1890: intervallo sul cerchio $5' = 300''$, percorsi dal filo mobile del micrometro con 2 rivoluzioni e mezza. Tamburo diviso in 60 parti, $r = 2'$, $p = 2''$, $\mathrm{I} = 2^r\ 30^p = 1500$.

La terza colonna della tavola dà gli argomenti per il Cerchio Meridiano di Reichenbach di Torino, nonchè per quello di Starke di Padova, e le caratteristiche comuni sono:

C) Intervallo sul cerchio $3' = 180''$, percorsi dal filo mobile del mi-

crometro con 3 rivoluzioni; tamburo diviso in 60 parti, $r = 1'$, $p = 1''$, $\mathrm{I} = 3^r\, 0^p = 1800$.

Finalmente la quarta colonna dà gli argomenti per i due Cerchi Meridiani Bamberg di Arcetri e di Torino, le cui caratteristiche sono:

D) Intervallo sul cerchio $4' = 240''$, percorsi dal filo mobile con 2 rivoluzioni; tamburo diviso in 120 parti, $r = 2'$, $p = 1''$, $\mathrm{I} = 2^r\;\, 0^p = 2400$.

4. Applicando la formola (3), cioè moltiplicando i valori di C per i seguenti valori assoluti di $l' - l$ 2 4 6 8 10 12 14 16 ... 30, scelti nell' ipotesi che l'aggiustamento del microscopio micrometrico sia tale per cui il limite superiore della differenza $l' - l$ sia 30, si ottiene la seguente *tavola base* a due argomenti $l + l'$ ed $l' - l$, da cui si hanno le correzioni $\Delta(l + l')$ per qualsiasi strumento.

$l+l'$	$l'-l$															$l+l'$
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	
10.K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.K
9	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	11
8	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	12
7	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	13
6	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	14
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	15
4	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	16
3	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	17
2	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	18
1	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	19
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	20

Le correzioni date da questa tavola sono espresse in centesimi di parti del tamburo, mentre l'argomento $l' - l$ è espresso in decimi. Per un valore particolare della somma $l + l'$ appartenente agli argomenti della prima colonna a sinistra il segno della correzione $\Delta(l + l')$ è opposto al segno della differenza delle due letture presa nel senso $l' - l$; ed è uguale per gli argomenti dell'ultima colonna che sta a destra.

Per rendere praticamente adoperabile questa tavola per uno strumento qualsiasi, non occorre altro che sostituire al luogo degli argomenti generali delle due colonne prima ed ultima, i valori particolari calcolati col relativo I. Tali valori per i sei strumenti considerati sono i seguenti:

A		B		C		D	
sinistra	destra	sinistra	destra	sinistra	destra	sinistra	destra
2^r 0^p	2^r 0^p	2^r 30^p	2^r 30^p	3^r 0^p	3^r 0^p	2^r 0^p	2^r 0^p
1 48	2 12	2 15	2 45	2 42	3 18	1 96	2 24
1 36	2 24	2 0	3 0	2 24	3 36	1 72	2 48
1 24	2 36	1 45	3 15	2 6	3 54	1 48	2 72
1 12	2 48	1 30	3 30	1 48	4 12	1 24	2 96
1 0	3 0	1 15	3 45	1 30	4 30	1 0	3 0
0 48	3 12	1 0	4 0	1 12	4 48	0 96	3 24
0 36	3 24	0 45	4 15	0 54	5 6	0 72	3 48
0 24	3 36	0 30	4 30	0 36	5 24	0 48	3 72
0 12	3 48	0 15	4 45	0 18	5 42	0 24	3 96
0 0	4 0	0 0	5 0	0 0	6 0	0 0	4 0

Operando la sostituzione per gli strumenti A e B otterremo le tavole del prof. Lorenzoni inserite a pag. 12 ed a pag. 45 della sua Memoria. Infatti scegliamo, per esempio, per lo strumento A, l'argomento di riga sesta cioè $l + l' = 1^r\ 0^p$ e scegliamo nelle colonne $l' - l$ della tavola immediatamente precedente quella che corrisponde al valore 8, troveremo nella stessa tavola la correzione 40, come si ha per gli stessi argomenti dalla tavola Lorenzoni, pag. 12. E per lo strumento B, cogli stessi argomenti $l + l' = 1^r\ 0^p$, $l' - l = 8$, avvertito che il primo trovasi in riga settima, troveremo nella tavola base la correzione 48, come si ha dalla tavola Lorenzoni di pag. 45.

5. Esempio per il caso del Piccolo Meridiano di Arcetri, tipo D. Il 13 marzo 1914, in una delle mie ultime osservazioni al Piccolo Meridiano di Arcetri, puntando in distanza zenitale la stella BD + 13° 1655 $8^m.4$ = Lpz I 2882 (¹), feci le seguenti letture ai due microscopi micrometrici:

$$\begin{array}{llll} \text{Micr. I} & 30°32'\ 0^r 798 & \text{Micr. II} & 0^r 556 \\ & \ \underline{0\ 808^{+10}} & & \underline{0\ 540^{-16}} \\ l + l' = & \ 1606 & & 1096 \end{array}$$

in decimi di parti del tamburo.

Ricordando che in questo strumento una rivoluzione è uguale a 120^p, avremo gli argomenti:

$$l + l' \begin{cases} 1^r\ 40^p 6 \\ 0\ 109\ 6 \end{cases} \qquad l' - l \begin{cases} +10 \\ -16 . \end{cases}$$

(¹) Cfr. Astr. Nachr. 4726.

Ora nella tavola precedente troveremo gli argomenti $l + l'$ più prossimi a questi, nelle righe quarta e sesta; con questa cognizione e cogli argomenti $l' - l$ avremo dalla *tavola base* le correzioni -30 e $+80$ in centesimi, quindi sarà:

$$\text{Micr. I } 1606 - 3.0 = 1603 \quad \text{e} \quad \text{Micr. II } 1096 + 8.0 = 1104 .$$

Per avere i secondi della distanza zenitale dovremo dividere la somma di questi due numeri per 4 e per 10 ed avremo:

$$67''.7 = 1' \, 7''.7 \text{ e finalmente}$$
$$z = 30^\circ \, 33' \, 7''.7 .$$

Lo stesso risultato è stato da me ottenuto colla tavola dei coefficienti C che tengo sempre in uso.

Astronomia pratica. — *Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico.* Nota di G. Silva, presentata dal Socio Millosevich.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica-chimica. — *Sul punto di fusione dell'arsenico* (1). Nota di Luigi Rolla, presentata dal Corrisp. A. Garbasso.

Lo studio delle leghe di arsenico e di antimonio, fatto recentemente da Parravano e De Cesaris (2), ha stabilito che, conformemente alla regola generale enunciata da Tammann, l'esistenza di un supposto arseniuro di formola Sb_3As è senz'altro da escludersi, perchè i due elementi, invece, dànno luogo a una serie continua di cristalli misti. Quanto all'altro arseniuro, al quale spetterebbe la formola $SbAs_3$, la cui esistenza pareva che le ricerche anteriori rendessero assai probabile, il diagramma di fusione non permette di affermar nulla, perchè la volatilità dell'arsenico impedisce di aver leghe contenenti più del 40 % in peso di questo elemento.

Ora, Landolt (3) e Mallet (4) credettero di potér fissare il punto di fusione dell'arsenico (a pressione ordinaria) fra 630° e 970°; e Crookes (5)

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Genova

(2) Gazz. chim. it. (1912), I, 341.

(3) Chem. Jahrb. (1859), 181.

(4) Ibid., 1872, pag. 210.

(5) Nature (1905), 595.

credette di poter dimostrare che esso avrebbe dovuto essere a 615°. Questo valore è, certamente, troppo basso.

Jonker [1], scaldando l'arsenico cristallino, in un tubo chiuso, fino a 800°, non osservò alcuna traccia di fusione; ma recentemente Goubau [2] trovò 817°; e prima di lui, con metodo eguale, Jolibois [3], 850° [± 10°].

L'esistenza delle *curve di frequenza atomica* [4] dà modo di avere un criterio per stabilire, almeno approssimativamente, quale sarebbe, alla pressione ordinaria, il grado di temperatura al quale l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi dell'arsenico diventa dello stesso ordine di grandezza della distanza interatomica. E, per la definizione di Lindemann [5], coincide col punto di fusione.

Consideriamo, per esempio, le leghe:

[I]	Sb:	79,40 %	P. F. 615°
	As:	29,60 »	
[II]	Sb:	83,25 »	P. F. 612°
	As:	16,75 »	
[III]	Sb:	94,44 »	P. F. 623°
	As:	5,56 »	

La [I] corrisponde, approssimativamente, alla composizione del composto Sb_2As; la [II] corrisponde al punto di minimo della curva di fusione; la [III] rappresenta una soluzione solida *diluita* di arsenico nell'antimonio.

Si avrà, per tutte, una differenza tra il calore specifico trovato e quello calcolato colla regola del miscuglio: e, precisamente, si troverà per tutte un calore specifico più grande di quello che si calcola.

Col calorimetro a blocco di rame di Koref [6], ebbi i seguenti numeri [7]:

(1) Zeit. f. anorg. ch., *62*, 89 (1909).
(2) Compt. rend., *158*, 121 (1914).
(3) Compt. rend., *152*, 1767 (1907).
(4) Rend. dei Lincei, seduta del 5 aprile 1914.
(5) Phys. Zeit., IV (1909), 609.
(6) Ann. d. Phys., *36* (1911), 49.
(7) Nella tabella, t_0 significa la temperatura iniziale, in gradi centigradi, della sostanza; t la temperatura finale, corretta, del blocco di rame; g il peso in grammi; E l'effetto calorifico.

Le leghe sono quelle stesse che servirono a Parravano e De Cesaris per tracciare il diagramma di fusione.

LEGA [I].

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 191°,2	— 88°,3	25,02	1,313	0,0525	
— 189 ,6	— 88 ,2	"	1,296	0,0518	media: 0,0520
— 189 ,4	— 88 ,6	"	1,288	0,0515	
— 189 ,8	— 88 ,2	"	1,306	0,0522	
0	— 75 ,1	"	1,338	0,0535	
0	— 74 ,9	"	1,371	0,9548	media: 0,0541
0	— 74 ,2	"	1,351	0,0540	

LEGA [II].

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 190°,4	— 87°,4	24,36	1,181	0,0485	
— 190 ,6	— 88 ,2	"	1,213	0,0498	media: 0,0492
— 191 ,1	— 88 ,4	"	1,201	0,0493	
0	— 75 ,3	"	1,340	0,0550	
0	— 75 ,6	"	1,301	0,0534	media: 0,0541
0	— 76 ,1	"	1,313	0,0539	

LEGA [III].

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 189°,9	— 89°,2	28,1	1,259	0,0448	
— 188 ,7	— 88 ,7	"	1,323	0,0471	media: 0,0463
— 190 ,3	— 88 ,1	"	1,320	0,0470	
0	— 77 ,1	"	1,394	0,0496	
0	— 76 ,8	"	1,441	0,0513	media: 0,0501
0	— 77 ,3	"	1,388	0,0494	

Per i metalli puri che servirono per preparare le leghe, si ebbero, in buon accordo con quelli di Richards e Jakson [1], i seguenti valori:

Antimonio.

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 188°,7	— 84°,5	23,25	1,023	0,0440	
— 189 ,1	— 85 ,0	"	1.048	0,0451	media: 0,0446
— 190 ,5	— 88 ,4	"	1,039	0,0447	
0	— 76 ,4	"	1,128	0,0485	
0	— 75 ,9	"	1,097	0,0472	media: 0,0480
0	— 76 ,6	"	1,123	0,0483	

[1] Zeit. für phys. Chemie, *70*, 414 (1910).

Arsenico (cristallino).

t_0	t_1	g	E	Cal. spec.	
— 190°,6	— 84°,6	22,42	1,569	0,0700	
— 191 ,2	— 83 ,9	"	1,589	0,0709	media: 0,0701
— 188 ,1	— 85 ,2	"	1,586	0,0694	
0	— 75 ,1	"	1,699	0,0758	
0	— 75 ,9	"	1,675	0,0747	media: 0,0756
0	— 74 ,3	"	1,711	0,0763	

Col calorimetro a toluolo, tipo Fabre e Silbermann, descritto da Schottky [1], fra le temperature di 25°,0 [± 0,1] e 0°, ebbi i seguenti risultati (valori medî):

	g	E	Cal. spec.
Lega [I]	14,32	0,825	0,0576
Lega [II]	16,17	0,900	0,0557
Lega [III]	15,43	0,805	0,0522
Antimonio	18,1	0,898	0,0496
Arsenico	19,41	1,578	0,0813

Quando con C_{sp} si indichi il calore specifico della lega; con g_1, g_2 il peso dei componenti; e con c_1, c_2 i loro calori specifici; con la formola

$$C_{sp} = \frac{c_1 g_1 + c_2 g_2}{g_1 + g_2}$$

si calcola:

	Temperatura assoluta media	Cal. specifico
Lega [I]	137	0,0514
	234	0,0538
	285	0,0561
Lega [II]	137	0,0489
	134	0,0526
	285	0,0549
Lega [III]	137	0,0460
	234	0,0495
	285	0,0514

Se ora ammettiamo la relazione

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{\theta'}{T_1}} : \qquad (1)$$

[1] Phys. Zeit., X (1909), 634.

dove ν' è la frequenza atomica dell'arsenico nella lega di punto di fusione assoluto θ', e ν ne è la frequenza atomica allo stato puro, in cui fonde a T_1 gradi (assoluti), possiamo, coi dati sperimentali, ricavare T_1.

Si ha

$$C_{as} = \frac{C_{sp}(g_1 + g_2) - g_1 C_{sb}}{g_2},$$

dove con C_{as}, C_{sb} si indica il calore specifico dell'arsenico e dall'antimonio nella lega, e con C_{sp} il calore specifico, sempre a pressione costante, della lega.

Senonchè, il calore specifico dell'antimonio, nelle leghe considerate, è praticamente eguale a quello dell'antimonio puro, perchè il punto di fusione del metallo e delle leghe differisce assai poco. Allora, moltiplicando C_{as} per il peso atomico dell'arsenico, si ha il calore atomico C dell'arsenico, e, da questo, il valore di ν' con l'equazione

$$C = \frac{3}{2} R \left[\frac{\left(\frac{\beta\nu'}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu'}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu'}{T}} - 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu'}{2T}\right)^2 e^{\left(\frac{\beta\nu'}{2T}\right)}}{\left(e^{\frac{\beta\nu'}{2T}} - 1\right)^2} \right],$$

quando si supponga che il calore specifico a pressione costante non differisca apprezzabilmente da quello a volume costante. Questo fatto si verifica con migliore approsssimazione a temperatura bassa. Dal calore specifico del metallo puro, alla stessa temperatura, si calcola ν: e così, nella (1), è tutto noto, meno che T_1.

Per la lega [I], alla temperatura assoluta media di 137 gradi, si calcola

$$T_1 = 1250\,;$$

e per la lega [II], alla stessa temperatura,

$$T_1 = 1154\,.$$

Come media, dunque, $T_1 = 1202$. Il valore così calcolato non differisce molto da quelli trovati da Goubau e Jolibois, e, data l'approssimazione delle ipotesi accettate, il risultato presenta un notevole interesse. Tanto più che anche le considerazioni di Biltz [1], sopra la classificazione degli elementi in base alla variazione periodica delle frequenze atomiche, sembrano confermarlo.

[1] Zeit. für Elektr., XVII (1911), 670.

Fisica. — *Sull'esperienza di Clément e Desormes e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Il calcolo dell' esperienza di Clément e Desormes, viene di solito eseguito in modo indiretto e piuttosto illogico, poichè viene basato sulla legge di Poisson (o Laplace) sulla variazione adiabatica di pressione dei gaz, la quale a sua volta viene dedotta dal 1° principio di Termodinamica e cesserebbe d'esser vera se questo non lo fosse.

Quindi il valore che si ottiene pel rapporto dei calori specifici dell'aria a pressione o a volume costante, pare vero solo se si ammette l'esattezza di esso principio, e la celebre dimostrazione che di questo diede Roberto Mayer pare fondata sopra una petizione di principio.

Invece è possibile dedurre dall'esperienza di Clément e Desormes il suddetto rapporto senza far uso nè della legge di Poisson, nè del 1° principio di Termodinamica, ma bensì direttamente con calcolo e ragionamento così semplice e diretto, che forse è quello stesso che era nell'intenzione degli autori, reso oscuro dalle idee, dalle tendenze e dalla fraseologia di quel tempo.

Sebbene l'esperienza ed il modo solito di calcolarla siano ben noti, credo necessario ripeterli, per maggior chiarezza, per confronto, ed anche perchè occorreranno in seguito i dati relativi.

1°) Si ha un grosso pallone con aria, che nella prima fase dell'esperienza ha la pressione, il volume e la temperatura assoluta indicati da p_1, v_1, T_1. La pressione p_1 è un po' minore di quella esterna p e sarà dunque $p_1 = p - h$, essendo h piccolo e dato da un apposito manometro; la temperatura sia la stessa di quella ambiente T contradistinta coll'indice 1 solo per omogeneità d'indicazioni.

2°) Si apre e si richiude rapidamente il grosso rubinetto di cui è munito il pallone; l'aria esterna vi penetra stabilendo l'uguaglianza di pressione coll'esterno, e l'aria del pallone si riscalda un poco per effetto di questa compressione. Alla fine di questa seconda fase dell'esperienza, cioè appena richiuso completamente il rubinetto, la pressione il volume e la temperatura siano p_2, v_2, T_2 essendo da notare che $p_2 = p$ pressione esterna e che $T_2 = T + \delta T$.

3°) Lasciando il pallone a sè, e supponendo invariate la pressione e la temperatura esterna, il calore prodotto dalla compressione si disperde e l'aria del pallone ritorna alla temperatura ambiente, mentre la pressione decresce perchè il volume è costante.

Indicando con p_3, v_3, T_3 le condizioni dell'aria del pallone alla fine di questa 3ª fase, sarà $p_3 = p - h'$, essendo h' dato dal manometro, $v_3 = v_2$ e $T_3 = T$.

Il passaggio dalla 1ª alla 2ª fase è rapidissimo quindi adiabatico, e per esso vale la legge di Poisson:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k , \tag{1}$$

essendo k il rapporto cercato dei calori specifici.

Inoltre nella 1ª e nella 3ª fase, la temperatura è la stessa, quella dell'ambiente, quindi vale la legge di Boyle:

$$p_1 v_1 = p_3 v_3 , \quad \text{ossia} \quad p_1^k v_1^k = p_3^k v_3^k . \tag{2}$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze (1) e (2), ed osservando che $v_2 = v_3$ si ha:

$$p_1^{k-1} = p_3^k / p_2 \quad , \quad (k-1) \log p_1 = k \log p_3 - \log p_2$$

$$k = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_3} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_3} = \frac{h}{h - h'} .$$

Van der Waals (Lehrbuch der Thermodynamik Bd. I) fa notare che nella dimostrazione della legge di Poisson deve essersi introdotto il 1° principio di Termodinamica che essa legge presuppone. Questa dimostrazione riferita dal Gehler (*Physikalisches Wörterbuch)* e dal Mach (*Die Wärme*) mi riesce poco chiara (direi anzi poco persuasiva) e non vi trovo traccia del suddetto principio.

Forse Poisson ha cercato d'ottenere con un procedimento (o con un artifizio) analitico una legge della compressibilità adiabatica dell'aria, tale da metter d'accordo i valori sperimentali della velocità del suono nell'aria colla formula di Newton, dimodochè in fondo la legge di Poisson sarebbe basata sull'esperienza e solo perciò d'accordo col 1° principio di Termodinamica mentre questo non era conosciuto.

Ecco ora come si può ottenere il suddetto valore di k, senza far uso della legge di Poisson, nel modo che deriva naturalmente dall'esperienza stessa.

Ai tempi di Clément e Desormes, in seguito alla costruzione e diffusione dell'acciarino pneumatico, era ben noto che l'aria si riscalda per effetto d'una compressione e si raffredda per effetto d'una rarefazione,

Senza tener conto della causa, allora sconosciuta, di queste variazioni di temperatura era dunque, anche allora, chiaro che per riscaldare di 1° un chilogramma d'aria, lasciando che si dilati a pressione costante, si richiede maggior quantità di calore che per riscaldarla di 1°, in vaso chiuso a vo-

lume costante, perchè nel 1° caso occorre compensare il raffreddamento prodotto dalla dilatazione suddetta.

Se si misura la diminuzione di temperatura prodotta nell'aria da una uguale dilatazione, avremo di quanto meno di 1° si riscalda 1 kgr. d'aria a pressione costante quando riceva la quantità di calore che la riscalderebbe di 1° a volume costante, e si potrà agevolmente dedurne il rapporto dei due calori specifici.

Il semplice calcolo può esser condotto nel modo seguente:

1°) Si abbia in un recipiente impermeabile al calore 1 kgr. d'aria, e siano p, v, T, le sue condizioni; lo si riscaldi di 1° a volume costante, ciò richiederà una quantità di calore c_v e farà aumentare la pressione di $p\,(1/T)$.

2°) Lo si lasci dilatare adiabaticamente finchè la sua pressione è ritornata quella iniziale (p. es. la pressione esterna), esso si raffredderà, per effetto di questa dilatazione, di $\delta_1 T$ incognito, il suo volume crescerà e diverrà $v' = v\,(T + 1 - \delta_1 T)\,T$ [poichè essendo p costante si ha $v/T = v'/(T + 1 - \delta_1 T)$] pure incognito ma che non occorre determinare.

3°) Si può ottenere lo stesso risultato, cioè di far passare l'aria dallo stato $p_1\, v_1\, T$ allo stato p, v', $T + 1° - \delta_1 T$ (essendo v' determinato dai valori della pressione e della temperatura) riscaldando l'aria di $1° - \delta_1 T$ a pressione costante ciò che richiederebbe una quantità di calore $c_p(1° - \delta_1 T)$.

Siccome non è concepibile che l'aria in condizioni uguali possieda diverse quantità di calore, quelle che in definitiva avrà guadagnato l'aria nel passare dalle condizioni iniziali alle finali, nei due casi saranno uguali e sarà:

$$c_v \,.\, 1° = c_p(1 - \delta_1 T) \qquad k = c_p/c_v = 1/(1 - \delta_1 T)\,. \tag{3}$$

Se invece si riscalda 1 kgr. d'aria di 1° a pressione costante, ciò che richiederà una quantità di calore c_p e farà aumentare il volume di $(1/T)v$, e poi la si comprime adiabaticamente fino al volume iniziale, essa per effetto di questa compressione si riscalderà di $\delta_2 T$, la sua temperatura sarà dunque cresciuta a partire dallo stato iniziale, di $1° + \delta_2 T$ e la sua pressione sarà divenuta $p' = p + p\,(1 + \delta_2 T)/T$ pure incognita, ma che non occorre conoscere.

Lo stesso risultato, cioè d'aver fatto passare 1 kgr. d'aria da T a $T + 1 + \delta_2 T$ a volume costante ed alla pressione corrispondente, si può ottenere riscaldando direttamente 1 kgr. d'aria di $1° + \delta_2 T$ a volume costante, ciò che richiederà una quantità di calore $c_v\,(1 + \delta_2 T)$, e poichè le quantità di calore ricevute dall'aria nei due casi devono essere uguali, sarà:

$$c_p \,.\, 1° = c_v(1° + \delta_2 T) \qquad k = c_p/c_v = 1 + \delta_2 T\,. \tag{4}$$

Le stesse relazioni si ottengono procedendo per raffreddamento, cioè uguagliando la quantità di calore che in definitiva perde 1 kgr. d'aria che viene raffreddato di 1° a volume costante, e poi compresso fino alla pressione iniziale con quella che perderebbe la stessa aria se fosse raffreddata d'altrettanto, $(1 + \delta_1 T)$, a pressione costante, oppure uguagliando la quantità di calore che essa perde quando venga raffreddata di 1° a pressione costante e poi ridotta al volume iniziale, con quella che perderebbe se fosse raffreddata d'altrettanto $(1° + \delta_2 T)$ a volume costante.

Il valore di k sarà dunque noto se si determina sperimentalmente di quanto si riscalda o raffredda l'aria che subisce una determinata variazione istantanea di pressione, oppure di volume.

Questa determinazione evidentemente non potrebbe esser fatta con un termometro a mercurio; esso tarda troppo a mettersi in equilibrio di temperatura coll'aria, mentre invece la temperatura che si vuol misurare varia rapidamente; inoltre la sua massa è troppo grande.

Maggiore probabilità di un buon risultato in questa misura s'avrebbe usando uno speciale bolometro, di massa piccolissima, di gran superficie estesa per tutto il volume dell'aria, dimodochè della temperatura, certo non uniforme, di questa si potesse avere molto rapidamente (e con opportune correzioni per il calore ceduto nel brevissimo tempo alle pareti) il valore medio.

Clément e Desormes hanno evitato le suddette difficoltà: 1° usando come termometro la stessa aria che viene dilatata o compressa; 2° evitando di misurare direttamente la temperatura prodottasi e rapidamente variabile, e misurando invece di quanto ne differisce la temperatura ambiente. Mi pare anche molto opportuna la compressione dell'aria effettuata senza ricorrere a uno stantuffo, il quale produce calore per attrito e ne sottrae per conduzione e forse anche nel meccanismo stesso della compressione. 3° Evitando di misurare direttamente la temperatura prodottasi e molto rapidamente variabile, e misurando invece di quanto ne differisce la temperatura ambiente.

La pressione h' osservata nel manometro, nella 3ª fase dell'esperienza, misura dunque la variazione di temperatura prodotta dalla rapida variazione di pressione. Poichè la variazione di temperatura di 1° fa variare la pressione di $(1/T)\,p$, la variazione di pressione h' corrisponderà ad una variazione di temperatura $h'\,T/p$. Lo stesso risultato s'ottiene osservando che nella 2ª e 3ª fase dell'esperienza il volume dell'aria è lo stesso, quindi:

$$p_2/p_3 = T_2/T_3 \text{, ossia } p/(p - h') = (T + \delta T)/T \,,$$

quindi, con molta approssimazione trascurando h' rispetto a p si ha:

$$\delta T = h'\,T/p \,.$$

La variazione di temperatura δT è stata prodotta nell'esperienza da una variazione di pressione h qualsiasi, ma nella formula (3), $\delta_1 T$ si riferisce

ad una variazione di pressione $(1/T)\,p$, dunque in questo caso $h = p/T$, quindi $\delta_1 T = h'/h$.

Quindi la formula (3) dà:

$$k = c_p/c_v = 1/(1 - h'/h) = h/(h - h')$$

come si ottiene facendo uso della legge di Poisson.

È possibile variare l'esperienza di Clément e Desormes in modo da ricavarne direttamente il riscaldamento prodotto nell'aria da una determinata diminuzione di volume $\delta v = (1/T)\,v$; ma non mi pare che ciò rechi nessun utile, perchè l'esperienza riuscirebbe più complicata e darebbe probabilmente valori meno esatti, ed inoltre questo riscaldamento $\delta_2 T$ può esser dedotto, con un calcolo molto breve, dall'esperienza solita.

Difatti il riscaldamento $\delta_1 T = h'/h$ è ottenuto mediante un aumento di pressione p/T, mentre il riscaldamento $\delta_2 T$ s'otterrebbe, come s'è visto, mediante un aumento di pressione $p\,(1 + \delta_2 T)/T$, quindi per la proporzionalità fra le piccole variazioni di pressione e di temperatura s'avrà:

$$\frac{\delta_2 T}{p(1 + \delta_2 T)/T} = \frac{\delta_1 T}{p/T} = \frac{h'/h}{p/T} \quad , \quad \delta_2 T = \frac{h'}{h - h'} \, .$$

Sostituendo questo valore di $\delta_2 T$ nella (4) si ottiene:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{h'}{h - h'} = \frac{h}{h - h'}$$

come s'era trovato colla formula (3).

I valori ottenuti per $\delta_1 T$ e $\delta_2 T$, cioè h'/h ed $h'/(h - h')$ si riferiscono alle variazioni di pressione o di volume $(1/T)v$, $(1/T)p$ rispettivamente; se invece queste fossero qualsiasi, purchè molto piccole e vengono indicate con δp, δv, le corrispondenti variazioni di temperatura saranno ad esse proporzionali, ed indicandole ancora con $\delta_1 T$, $\delta_2 T$ sarà:

$$\frac{\delta_1 T}{\delta p} = \frac{h'/h}{p/T} \qquad \frac{\delta_2 T}{\delta v} = \frac{h'/(h - h')}{v/T} \, ,$$

cioè:

$$(5) \qquad \delta_1 T = \frac{h'}{h} \frac{T}{p} \delta_p \qquad\qquad (6) \quad \delta_2 T = \frac{h'}{h - h'} \frac{v}{T} \delta_v \, ,$$

dove h'/h ed $h'/(h - h')$ sono due costanti numeriche ottenibili coll'esperienza per un valore particolare qualsiasi di δp o di δv, uguali approssimativamente (per l'aria) a 0,29 e 0,4, ed esprimibili anche come s'è visto da:

$$\frac{h'}{h} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \quad , \quad \frac{h'}{h - h'} = \frac{c_p - c_v}{c_v}$$

Per $\delta p = (1/T)\,p$ oppure $\delta v = (1/T)\,v$, le formule (5) e (6) dànno $\delta_1 T = h'/h$, $\delta_2 T = h'/(h - h')$, e per $\delta p = h$ sarebbe $\delta_1 T = h' \, . \, T/p$ come s'era già trovato.

Rimane così dimostrato che sebbene nell'esperienza di Clément e Desormes la variazione adiabatica dalla 1ª alla 2ª fase sia indispensabile per ottenere il rapporto k dei due suddetti calori specifici dell'aria, tuttavia non è necessario conoscere le leggi di questa variazione (se essa è sufficientemente piccola), e basta la conoscenza della variazione di temperatura che essa ha prodotto e che è data direttamente dall'esperienza.

È chiaro che il semplice apparechio di Clément e Desormes può servire utilmente: 1° per mostrare la trasformazione del lavoro in calore producendo la solita rapida compressione, accompagnata da riscaldamento, dell'aria del pallone; 2° per la trasformazione inversa di calore in lavoro producendo invece nell'aria del pallone una rapida dilatazione accompagnata da raffreddamento cioè da consumo di calore; 3° per dedurre da queste esperienze l'equivalente meccanico della caloria, calcolando il lavoro impiegato oppure ottenuto, ed il calore che è stato prodotto o consumato, in modo essenzialmente uguale, ma praticamente più semplice, d'una celebre esperienza di Joule.

Si eseguisca nel modo solito l'esperienza di Clément e Desormes, e siano $p - h$, v, T le condizioni iniziali dell'aria del pallone, e p . v', $T + \delta_1 T$ quelle subito dopo aperto e chiuso il rubinetto $p - h'$, v', T quelle finali.

Il lavoro fatto dalla pressione atmosferica nel comprimer l'aria del pallone sarà $p(v - v')$, e siccome la legge di Boyle per la 1ª e 3ª fase dà: $(p - h)v = (p - h')v'$, si avrà per esso lavoro con molta approssimazione $p(v - v') = v(h - h')$ (cioè $pdv = -vdp$) che è molto facilmente calcolabile in chilogrammetri, avvertendo che la pressione dovrà essere espressa in chilogrammi per cm² ed il volume in metri cubi.

Il calore prodotto da questo lavoro sarà $P . c_v \delta_1 T$, se $P = vD$ è il peso dell'aria del pallone e D la sua densità. Siccome l'aumento di temperatura $\delta_1 T$ è uguale ad $h'T/p$, ed il calore specifico c_v a $(h - h')c_p/h$ esso calore sarà:

$$Pc_v \delta_1 T = \frac{(h - h')/h'}{hp} c_p . T . P$$

che potrà anch'esso essere calcolato numericamente; dividendo il suddetto lavoro per questo calore s'avrà l'equivalente meccanico cercato.

Non sostituendo i valori numerici, ed indicando con E l'equivalente meccanico della caloria, s'avrà:

$$p(v - v') = v(h - h') = vD \frac{(h - h')/h'}{hp} c_p T . E ,$$

ossia poichè $h'/h = (c_p - c_v)/c_p$, rimarrà la nota relazione:

$$E = \frac{p}{D(c_p - c_v) T} .$$

Fisica. — *La durata minima di un suono sufficiente per individuarlo.* Nota del dott. G. Gianfranceschi, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nello studio analitico di suoni importa molto sapere quale sia la durata del periodo più lungo che in essi si verifica, per essere sicuri di tener conto nell'analisi di tutti i suoni componenti. Poichè spesso il periodo più lungo non è quello che corrisponde alla nota fondamentale in cui il suono è stato prodotto: il suono può essere accompagnato per es. da rumori molto bassi, i quali hanno ancora grande importanza nel timbro, oppure può comprendere note superiori il cui numero di vibrazioni non sia un multiplo intero delle vibrazioni del fondamentale.

Quando si possiede un tratto abbastanza lungo della curva sonora scritta si può sempre riconoscere qual'è il periodo più lungo; ma quando non si abbia a propria disposizione che qualche vibrazione scritta, importa molto sapere se quel piccolo tratto di curva sia capace di individuare completamente il suono che si vuole studiare.

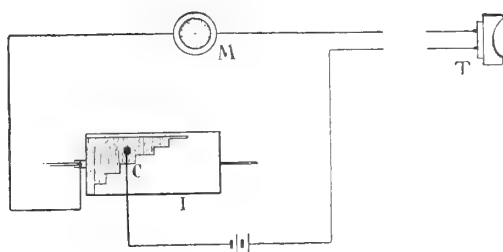
Un problema analogo a questo è quello di determinare il numero minimo di vibrazioni necessario per riconoscere un suono. Questo problema non è nuovo. Già il Savart nel 1830 si era occupato della questione, e dopo lui se ne occuparono Villari e Marangoni, l'Exner, Cross e Maltby, ed il Meyer. I risultati non sono concordanti; secondo alcuni si richiede un buon numero di vibrazioni, secondo altri basta anche una sola, anzi anche una frazione di vibrazione. Il Nagel conclude, dalla critica de' varî sperimentatori, che ordinariamente bastano due vibrazioni di un suono ascoltato per riconoscerlo completamente.

Nel mio studio sulle vocali mi importava conoscere questo numero minimo per giudicare sulla sufficienza di un piccolo numero di vibrazioni scritte.

Adoperavo l'interruttore differenziale del Blaserna. Questo, come è noto, consiste in un cilindro ruotante I la cui superficie laterale è in parte metallica, ad ampiezza variabile a scaglioni. Il circuito elettrico si chiude dal perno su cui gira il cilindro, alla superficie metallica sulla quale si appoggia un leggero contatto a molla C, che si può spostare parallelamente ad una generatrice del cilindro. Il circuito include un microfono M dinnanzi al quale si produce il suono voluto e, a lunga distanza, un telefono.

Davanti al microfono si produce con continuità per un certo tempo il suono. In un'altra camera è posto il telefono. Si mette in rotazione il cilindro interruttore e si sposta il contatto mobile C verso le durate minori di contatto fino a che al telefono è possibile riconoscere il suono. La velocità di

rotazione del cilindro si può conoscere determinando la nota che si ottiene soffiando attraverso un disco forato che gira con quello. La frazione di giro che costituisce la durata del contatto si legge direttamente sul cilindro. Così si può calcolare la frazione di secondo che rappresenta la durata minima necessaria per riconoscere il suono.

Il contatto strisciante turba leggermente il suono, ma non impedisce di riconoscerlo; anzi quando avanti al microfono si produce un suono, il rumore dovuto allo strisciamento diminuisce sensibilmente. Si può anche evitarlo in parte, facendo in modo che l'interruttore differenziale chiuda un circuito secondario, il quale includa un relais che a sua volta chiuda il circuito principale.

Ecco i risultati di alcune esperienze. La durata minima percettibile è rappresentata con τ in frazione di secondo.

Suoni	Altezza	Valore di τ	Numero corrispondente di vibrazioni
Canna d'organo	Re_2	$\frac{1}{36}$	circa 4
" " .	La_2	$\frac{1}{42}$	" 5
Fischio . . .	La_4	$\frac{1}{40}$	" 22
" . . .	La_5	$\frac{1}{40}$	" 43
Corista . . .	La_3	$\frac{1}{108}$	" 4
Vocali varie .	Do_2	$\frac{1}{108}$	" 2

Da questa tabella si può osservare che non esiste un numero minimo di vibrazioni costante per i varî suoni; apparisce piuttosto costante la durata minima del suono. Fanno eccezione il corista normale e le vocali.

Queste osservazioni permettono le seguenti:

Conclusioni.

La durata minima di un suono necessaria per riconoscerlo è una costante per i varî suoni se si calcola come tempo, non come numero di vibrazioni.

Tale durata costituisce una costante fisiologica, e può rappresentare il tempo minimo necessario all'organo dell'udito per adattarsi al suono che è prodotto esternamente. Questa costante è circa $\frac{1}{40}$ di secondo. Graficamente è certo sufficiente una sola vibrazione completa per riconoscere il suono, intendendo per vibrazione completa quella che corrisponde al più lungo periodo.

Per alcuni suoni, per i quali l'orecchio dello sperimentatore è più esercitato, la durata minima può diminuire sensibilmente. Questo potrebbe essere giustificato dal fatto che nel caso mio ho potuto percepire il suono del corista normale e quello delle vocali in $\frac{1}{108}$ di secondo. Ora a questi due suoni io sono in modo speciale abituato, perchè da quattro anni mi occupo dello studio del corista campione, e da due anni delle vocali. Di più, ripetuta l'esperienza con altro sperimentatore si richiedeva un tempo maggiore, e dell'ordine di quello richiesto per gli altri suoni.

Bisogna osservare che col metodo da me adoperato il suono si riproduce più volte e a piccoli intervalli. La velocità con cui girava il cilindro era generalmente di cinque o sei giri al secondo, ed a ogni giro il suono si riproduceva. Questa ripetizione facilita naturalmente l'adattamento dell'orecchio alla percezione del suono. Quando dunque il suono venisse prodotto per una sola volta si richiederebbe probabilmente un tempo maggiore di durata.

Per ciò che riguarda la questione particolare delle vocali si può concludere che niente di più si richiede per il riconoscimento, di quello che basta per gli altri suoni. Se dunque acusticamente due o tre vibrazioni bastano per individuare una vocale, nell'analisi non v'è ragione di richiedere un numero maggiore di onde scritte.

Chimica. — *Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio* (¹). Nota I di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

In alcuni lavori precedenti ho studiato termicamente alcune coppie di sali i cui costituenti erano i solfati, cromati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio.

In questi lavori venivano presi in considerazione non solo i fenomeni di solidificazione dei sali e delle miscele, ma nelle masse solide venivano anche seguite le varie modificazioni che avvengono in seguito a trasformazioni dei componenti: tutti questi sali infatti esistono per lo meno in due modificazioni.

Nei Rendiconti di questa Accademia furono pubblicate le ricerche che riguardano le coppie tra solfato, cromato, molibdato e wolframato di potassio (²), quelle dei solfati di sodio e di potassio con i relativi carbonati (³) e nitrati (⁴). Altre ricerche furono pubblicate negli Atti del R. Istituto Veneto, e cioè quelle sulle miscele del molibdato e del wolframato di potassio con le corrispondenti anidridi (⁵), e quelle tra cromati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio (⁶). In tutte queste ricerche le determinazioni dei singoli punti furono sempre fatte seguendo le curve di raffreddamento, come è uso costante di tutti gli sperimentatori in questo campo.

In un recente lavoro van Klooster (⁷) ha voluto studiare il grado di esattezza che si può raggiungere nello studio termico seguendo di confronto il riscaldamento ed il raffreddamento della massa. Come materiale di esperienza egli ha scelto appunto i solfati, molibdati e wolframati di sodio e di potassio studiandone la solidificazione, la fusione e le loro trasformazioni.

I dati di van Klooster sui solfati di sodio e di potassio ottenuti nel raffreddamento e riscaldamento concordano con i miei e con quelli di precedenti autori, salvo le usuali piccole diversità nei valori assoluti di temperatura.

Dei corrispondenti cromati van Klooster non si è occupato.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(²) Questi Rendiconti, XXII, I, 453. 609 (1913).

(³) Questi Rendiconti, XXI, II, 65 (1912).

(⁴) Questi Rendiconti, XXII, II, 332 (1913).

(⁵) Atti R. Istituto Veneto, LXXII, II, 893 (1912-13),

(⁶) Atti R. Istituto Veneto, LXXII, II, 903 (1912-13).

(⁷) Zeit. f. anorg. Chemie, *85*, 49 (1914).

Dal complesso delle ricerche finora compiute dai varî autori è indubbio il dimorfismo di entrambi i solfati e cromati di sodio e di potassio: ho ritenuto perciò inutile occuparmi ulteriormente di questi sali.

Interessante e necessario da parte mia si presentava invece il proseguire lo studio dei molibdati e dei wolframati di sodio e di potassio: infatti i risultati ottenuti da van Klooster non sono sempre in accordo con i miei: per il molibdato e per il wolframato di potassio egli trova i miei dati in qualche punto errati, in qualche altro manchevoli: i miei dati sul molibdato e sul wolframato di sodio non erano a conoscenza di quell'autore: le diversità per questi sali non sono rilevanti, ma meritano qualche ulteriore osservazione.

Ho voluto perciò ripetere esperienze in proposito seguendo il riscaldamento e il raffreddamento dei sali, e completare queste ricerche con altre per escludere ogni dubbio sulla natura di certi fenomeni osservati.

In tutte queste esperienze i sali vennero riscaldati entro crogiolo di platino: nel centro della massa veniva immerso direttamente una pila termoelettrica di PtPtRd dello spessore di 0,5 millimetri: le temperature venivano lette direttamente su galvanometro Siemens ed Halske: la pila ed il galvanometro vennero graduate prendendo come punti fissi le temperature di solidificazione del piombo (326°), dell'antimonio (630°) e dell'argento (961°). Le letture venivano fatte di 10″ in 10″.

Il riscaldamento e il raffreddamento venivano fatti in forno a resistenza di filo di nichel e cromo, e venivano regolati mediante un insieme di resistenze in modo da avere ogni 10″ un aumento o una diminuzione di temperatura variabili da 1° a 2°-3°.

Le quantità di sale adoperate erano di 15-20 grammi.

Molibdato sodico. — Il molibdato sodico è tetramorfo. Con il metodo del raffreddamento sono stati osservati dai varî autori i seguenti punti di solidificazione e di trasformazione:

	Punto solidif.	Trasform. 1ª	Trasform. 2ª	Trasform. 3ª
Hüttner e Tammann (1)	692°	620°-605°	—	410°-380°
Boeke (2)	692	619	587°	431
Groschuff (3)	686	609	575	408
Amadori (loc. cit.) . .	688	614	574	405
Van Klooster (loc. cit.)	685	626	580	397

Il sale adoperato in queste, come nelle precedenti ricerche, fu il molibdato sodico Kahlbaum che venne disidratato mediante riscaldamento.

Anche in queste ricerche il punto di solidificazione risultò a 688°. I due primi punti di trasformazione risultarono a 616° e 580°. Il terzo punto

(1) Zeit. f. anorg. Chemie, *43*, 215 (1905).
(2) Zeit. f. anorg. Chemie, *50*, 355 (1906).
(3) Zeit f. anorg. Chemie, *58*, 113 (1908).

di trasformazione fu trovato a 410°; la trasformazione avviene con notevole sviluppo di calore.

Van Klooster seguendo il riscaldamento del molibdato sodico ottenne trasformazioni a temperature superiori a quelle avute nel raffreddamento e date nella tabella, e cioè le temperature di trasformazione osservate furono: 640°, 592°, 445°.

Anche le mie ricerche fatte riscaldando il sale condussero a temperature di trasformazioni superiori a quelle avute nel raffreddamento. La I e la II trasformazione risultarono a temperature di 10-15° superiori a quelle osservate nel raffreddamento, e cioè a 634° e a 592°: l'altra trasformazione risultò a 444°, e cioè a una temperatura di 34° superiore a quella avuta nel raffreddamento.

È noto per le ricerche di Boeke (¹) quale influenza su quest'ultima trasformazione possa avere la presenza di piccole quantità di certi sali, e come ad esempio la presenza di 1 °/₀ di solfato abbassi circa 200° quella temperatura di trasformazione.

A questo proposito farò notare che in alcune esperienze ho agito con un molibdato sodico, il quale, mentre mostrava lo stesso punto di solidificazione e gli stessi punti di trasformazione I e II subiva la III trasformazione con arresto considerevole a 254°. Il sale mostrò all'analisi che conteneva piccole quantità di solfato al quale probabilmente era dovuta la bassa temperatura di trasformazione.

È però da notare che, raffreddato il sale, questo per successivo riscaldamento non dava il punto di trasformazione a 254°, ma a 444°: ciò avveniva non solo se nel raffreddamento si portava il sale a temperatura ordinaria, ma anche se oltrepassata di poco la trasformazione, per es. fino a 220°, subito lo si riscaldava. Se al contrario il sale veniva raffreddato solo fino ad una temperatura superiore anche lievemente a quella cui la trasformazione avviene, per es. fino a 270, per successivo riscaldamento a 444° non si manifestava alcun effetto termico.

Wolframato sodico. — I punti di solidificazione e di trasformazione di questo sale trovati con il raffreddamento delle masse fuse sono i seguenti:

	Punto di solidificaz.	Trasform. 1ª	Trasform. 2ª
Hüttner e Tammann (loc. cit.)	698°, 690° (?)	—	570°
Boeke (loc. cit.)	698	588°	564
Parravano (²)	698	585	568
Van Klooster (³)	700	589	572
Amadori (loc. cit.)	694	576	560
Van Klooster (loc. cit.) . . .	694	587	570

(¹) Zeit. f. anorg. Chemie, *50*, 355 (1906); Zeit. f. phys. Chemie, *56*, 686 (1906).
(²) Gazz. Chim. ital., *39*, *b*, 55 (1909).
(³) Zeit. f. anorg. Chemie, *69*, 135 (1910).

Van Klooster come in precedenti ricerche anche in queste ultime trovò, con il metodo del raffreddamento, che si hanno due effetti termici notevoli a 587° e a 570°, i quali dovrebbero corrispondere a due trasformazioni del wolframato sodico. Riscaldando però la massa salina non riebbe i due arresti osservati nel raffreddamento, ma un solo arresto, il superiore, a 587°.

In queste mie ricerche compiute come le precedenti su wolframato sodico Kahlbaum, la temperatura di solidificazione risultò a 696°, e alquanto superiori a quelle avute precedentemente furono le due temperature di trasformazioni, cioè 582° e 571°; quest'ultima con effetto termico di molto superiore alla precedente. Riscaldando la massa ebbi un solo arresto a 580°-584° di durata considerevole.

Dalla comparsa di questa unica variazione termica che si osserva nel riscaldamento van Klooster deduce che solo una trasformazione ha realmente luogo per il wolframato sodico a 587°.

A questo proposito van Klooster compì alcune esperienze.

Raffreddata la massa a 586°, un grado sotto la temperatura del primo effetto termico, e mantenuta a questa temperatura per circa mezz'ora, per raffreddamento successivo riottenne l'arresto a 570°.

Riscaldata la massa a 583°, e mantenuta a questa temperatura per 15 minuti, per successivo raffreddamento riottenne l'arresto a 570°.

Queste esperienze mi sembra confermino l'esistenza di due trasformazioni. Infatti la prima esperienza mostra che mantenendo la massa a 586° non si completa la trasformazione iniziata a 587°, poichè per raffreddamento si ha un nuovo effetto termico a 570°: la trasformazione che avviene a 587° quindi è diversa da quella che avviene a 570°. La seconda esperienza mostra che riscaldando la massa a 583° avviene una trasformazione; infatti per raffreddamento si ha l'effetto termico a 570°: non è perciò necessario raggiungere la temperatura di 587° perchè avvenga una trasformazione.

La doppia trasformazione che avverrebbe a queste temperature è confermata dalle ricerche ottiche compiute da Boeke. Egli osservò che i cristalli di wolframato sodico, i quali al di sopra di 600° sono doppio rifrangenti, poco al di sotto di 600° assumono una forte doppia rifrangenza e cambiano colore; a una temperatura un po' inferiore diventano rapidamente isotropi. Gli stessi fenomeni si ripetono inversamente per lento riscaldamento dei cristalli.

Le ricerche di Boeke hanno inoltre mostrato che le due trasformazioni del wolframato di sodio a 588° e a 564° sono della stessa natura di quelle del molibdato di sodio a 587° e a 431°; cosicchè per le miscele dei due sali si hanno due curve continue distinte di trasformazione che congiungono i due punti di trasformazione del wolframato con quelli del molibdato.

Anche nelle mie ricerche sulla coppia wolframato di sodio e wolframato di potassio si notarono due curve di trasformazione distinte che si staccano dai due punti di trasformazione del wolframato sodico osservati.

Questo complesso di ricerche confermano che il doppio effetto termico osservato nel raffreddamento della massa, è dovuto a una doppia trasformazione del sale.

In altra Nota verrà trattato dei fenomeni di trasformazione nei corrispondenti sali di potassio.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della miersite e della cuprojodargirite* [1]. Nota II di E. Quercigh, presentata dal Socio G. Struever.

Riassunti sommariamente, nella precedente Nota [2], lo stato attuale del problema ed i risultati ottenuti coll'analisi termica del sistema AgI + CuI, che escludono la formazione, in quelle condizioni, del composto 4AgI . CuI, corrispondente alla miersite di Spencer, espongo qui gli ulteriori risultati ottenuti per altra via, allo scopo di completare e controllare i precedenti.

2) *Esame delle sezioni sottili dei blocchi analizzati termicamente.*

Osservando a luce parallela e convergente, le sezioni sottili che mi preparai tanto dalla parte di fondo che da quella superiore, delle varie masse provenienti dalle fusioni, risulta che:

1. Lo joduro d'argento puro, si presenta in prismi di color giallo-canario, tendente al verde-bottiglia molto chiaro, birifrangenti, con estinzione parallela alla direzione d'allungamento, che è otticamente positiva.

2. Le miscele al 95 % AgI, che termicamente presentano un rallentamento a 175° ed un arresto a 147°, si mostrano di colore e proprietà simili al AgI puro, ma con molte plaghe colorate un po' più intensamente, che, esaminate, anche a luce convergente, si dimostrano monorifrangenti. La presenza di una quantità limitata di sostanza birifrangente, toglie ogni dubbio che l'invarianza dell'equilibrio a 147°, sia dovuta alla trasformazione della fase isotropa in quella esagonale del AgI, derivata da uno smistamento eventuale che accompagna la trasformazione dei cristalli misti, iniziatasi a 175°.

3. Miscele al 90 % AgI, si presentano come la precedente, ma possiedono minor quantità di elementi birifrangenti. Ciò dimostra che anche a questa concentrazione si è manifestato lo smistamento, quantunque l'analisi termica nulla abbia detto in proposito direttamente, e solo l'esame della durata dell'equilibrio invariante a 147°, per le miscele al 95 % AgI, in confronto a

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[2] Rend. Acc. Linc., XXIII (1914), 1°, 446.

quella corrispondente a 100 % AgI, permetta di dedurre che al 90 % AgI, con probabilità, lo stesso fenomeno si dovrebbe verificare, quantunque in proporzioni minori.

4. Le sezioni di miscele all'80 % AgI, corrispondenti alla concentrazione della miersite, tanto se provengono dalla parte di fondo, che da quella superiore dei blocchi, hanno colorito giallo-canario, meno pallido delle precedenti, con qualche punto più chiaro, che, a differenza del rimanente del campo, è birifrangente. Lo smistamento verificatosi anche a questa concentrazione è, però, molto limitato.

5. Sezioni di miscele al 70 AgI, non mostrano alcun elemento birifrangente.

6. Le sezioni a maggiori concentrazioni in CuI, presentano pure completa isotropia ottica, il loro colore va diventando sempre più debole, volgendo al grigiastro, coll'aumentare del contenuto in CuI.

7. Lo ioduro rameoso puro si presenta, come termine limite di queste variazioni di tinta, grigiastro, quasi incoloro, monorifrangente.

3) *Osservazione microscopica del processo di cristallizzazione.*

Non esistendo in questo Istituto che un vecchio microscopio da cristallizzazione di Lehmann reso inservibile, mi costrussi un fornelletto elettrico che applicai colle modificazioni del caso ad un comune microscopio; il preparato veniva in esso introdotto nella parte centrale colla saldatura di una pila termoelettrica di platino e platinorodio ben aderente al punto da esaminare. Mi fu in tal modo possibile seguire, tanto durante il riscaldamento fino alla fusione, che nel raffreddamento fino a temperatura ordinaria, i fenomeni ottici presentati dai componenti allo stato puro e dalle loro miscele a varie concentrazioni, esattamente dosate.

È noto che la misura esatta della temperatura posseduta dal preparato microscopico in esame in tali condizioni, non è delle più facili, come la storia stessa di tali determinazioni ampiamente dimostra a spese anche di valenti sperimentatori; perciò fu mia cura di pormi nelle migliori condizioni compatibili coi mezzi sperimentali di cui potevo disporre, e di graduare la termopila collegata a tutto il sistema, con punti di riferimento fissi e noti: calcolo in tal modo di aver ottenuto dei valori che possiedono un'approssimazione di circa a $\pm 5°$.

1) Lo ioduro d'argento puro fonde in un liquido che, in istrati sottili e per trasparenza, si presenta di color rosso-sangue; per raffreddamento progressivo passa, a 555°, con un salto brusco ed evidentissimo, al color rosso-aranciato, quindi, per gradi insensibili, all'aranciato intenso, che va man mano facendosi più chiaro, diventando poi giallo-canario, ed impallidendo in seguito rapidamente. Se la fusione si effettua col vetrino coprioggetti, non è possibile scorgere tracce di orientazione cristallina nel raffreddamento, se si

eccettua un accenno fugacissimo nei primi istanti in cui appare la colorazione rosso-aranciata a 555°, fino alla temperatura di formazione della fase esagonale, punto in cui il preparato assume istantaneamente struttura cristallina spiccata, mentre contemporaneamente il colore canario-chiaro volge al verde-bottiglia assai debole e si manifesta la birifrangenza generale nel campo, che fino a questo punto si era mantenuto otticamente isotropo.

Facendo, invece, l'esperienza senza il vetrino coprioggetti, si vede che a 555° circa il cambiamento netto di colore è accompagnato da una orientazione cristallina di carattere grossolanamente poliedrico; i singoli elementi si deformano però, a temperature poco lontane da quella di formazione, sensibilmente per azione di urti dati lateralmente al piatto del microscopio, allungandosi nella direzione perpendicolare a quella degli urti. Per raffreddamento ulteriore la plasticità diminuisce rapidamente, ed a 147° si ha la trasformazione solita. L'aspetto di questa fase, che si dovrebbe col Lehmann chiamare cristallina fluente, assomiglia molto a quello della fase plastica del benzoato di colesterile e delle sue miscele col corrispondente acetato e propionato.

La fase dell' ioduro d'argento che esiste alla pressione ordinaria nell' intervallo di temperatura compreso tra 147° e 557° circa risultava poco ben nota, poichè, come osservai, tuttora si ritiene da molti cubica ordinaria, da altri liquida cristallina. — Il Lehmann [1] la considerò dapprima come plastica amorfa e rettificò poi la sua opinione [2], dovuta a cattive condizioni sperimentali, ritenendola cristallina plastica, otticamente isotropa, avente per forma tipica l'ottaedro, mentre Tubandt [3] si dimostrò completamente contrario a escluderla dalle fasi solide cristalline, e d'altra parte Stoltzenberg e Huth [4] credettero, in base alle loro esperienze ottiche, che si tratti addirittura di una fase liquida cristallina. Quest'ultimo concetto fu adottato anche da Posner [5] nell' ultima edizione delle Tabelle di Landolt-Börnstein in cui riportò come punto di fusione dell' ioduro d'argento quello a 145°, e come punto di chiarificazione quello a 552° (valori da lui adottati). Non è qui il luogo di discutere la portata delle contestazioni di Tubandt, nè le conclusioni di Stoltzenberg e Huth (che credo, in base alle loro stesse esperienze, poco convincenti e non molto concordanti col concetto di « cristalli liquidi » esposto dal Lehmann), poichè per lo scopo delle mie ricerche è sufficiente sapere che si tratti di una fase cristallina, ciò che da nessuno oramai

(1) O. Lehmann, *Ueber physikalische Isomerie*. Zeitschr. f. Kryst., *1* (1877), 120.

(2) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst., *1* (1877) 492 in Nota, e Flüssige Kristalle, Leipzig (1904).

(3) Tubandt, Nernst Festschrift (1912) 446.

(4) Stoltzenberg e Huth, *Die kristallinisch-flüssige Phasen bei Monoalogeniden des Thalliums und Silbers*. Zeitschr. f. physik. Ch., *71* (1910), 641.

(5) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV Aufl. (1912) 246.

viene posto in dubbio; noto, soltanto, che nelle mie ricerche non ho potuto riscontrare, nella fase discussa del Ag I, alcuna delle proprietà caratteristiche delle fasi liquide cristalline, e che quelle fra le osservazioni di Stoltzenberg e Huth che sono prive di possibili obiezioni riguardo al metodo sperimentale, concordano colle mie, e tutte insieme condurrebbero alla conclusione, adottata già da tanto dal Lehmann, che si tratti, cioè, di cristalli appartenenti alla categoria di quelli da lui chiamati: fluenti (*fliessende Kristalle*).

2) Miscele al 95 Ag I e 5 Cu I (%$_0$ mol.) hanno, allo stato fuso, color rosso-sangue, che nel raffreddamento subisce variazioni analoghe a quelle del Ag I puro. A 175° cominciano a delinearsi i primi elementi cristallini sotto il vetrino coprioggetti; essi hanno colore giallo verdastro pallido e rapidamente si estendono a tutto il campo. A 147° alcuni cristalli più chiari, sparsi uniformemente nel campo, si manifestano birifrangenti. Eliminando il vetrino coprioggetti si osserva la formazione dei cristalli fluenti a 540-545°.

3) Miscele 90 Ag I + 10 Cu I si comportano analogamente alle precedenti; la comparsa degli elementi cristallini giallo-verdastro chiari si verifica nel raffreddamento a 205°, quella dei cristallini birifrangenti di iodirite, che qui sono in quantità molto minore, a 147°.

4) Le miscele 80 Ag I + 20 Cu I lasciano apparire i primi individui cristallini soliti verde-giallastri pallidi a 250°, i cristallini birifrangenti in scarsissima quantità a 147°.

5) Miscele di 75 Ag + 25 Cu I si comportano come la precedente. A 147° si manifesta ancora qualche rarissimo cristallino di iodirite nel campo monorifrangente.

6) Miscele a 70 Ag I + 30 Cu I, e 60 Ag I + 40 Cu I, appaiono a temperatura ordinaria completamente monorifrangenti; le temperature a cui nel raffreddamento compaiono i primi elementi cristallini sono rispettivamente 260 e 270°. Tutte queste miscele, se sono fuse tra due vetrini, non lasciano scorgere tracce di orientazione cristallina in corrispondenza ai punti della curva AabB del diagramma (fig. I, Nota I); fuse invece a superficie libera, lasciano scorgere chiaramente la fase plastica otticamente isotropa alle temperature relative.

7) Al 50 Ag I + 50 Cu I, si manifesta, anche tra i due vetrini, già a circa 490° una grossolana orientazione cristallina in tutto il campo che si presenta otticamente isotropo. A circa 300° si osserva nettamente la trasformazione di questi cristalli monorifrangenti in altri della stessa natura, che si conservano tali fino a temperatura ordinaria.

8) Miscele al 40, 30, 20 e 10 Ag I, presentano fenomeni analoghi alla serie precedente, con cristallizzazione iniziale e punto di trasformazione della fase cristallina a temperatura sempre più elevata.

9) Miscele al 5 Ag I + 95 Cu I, esaminate durante il raffeddamento, passano a 580° dallo stato liquido amorfo a quello cristallino, rimanendo

otticamente isotrope, come le precedenti: a circa 400° però, si trasformano talvolta, in una fase con forte birifrangenza che dura pochi secondi ed a 390° fa posto alla solita monorifrangente, che permane fino a temperatura ordinaria. Ordinariamente, invece, si ha passaggio diretto dalla fase cristallina monorifrangente superiore, alla monorifrangente inferiore. Operando, al contrario, a temperatura crescente, si osserva meglio e costantemente la birifrangenza fra 390 e 400°.

10) Lo ioduro rameoso puro, in istrati sottili, per trasparenza, si presenta, allo stato fuso, di color rosso-aranciato, che volge al giallo col raffreddamento ed a 600° cristallizza nettamente con forme molto simili a quelle osservate da Lehmann [1] per il cloruro ammonico; i cristalli, di color giallo, sono perfettamente isotropi e tali si conservano fino a 440°. A questa temperatura si manifesta istantaneamente la birifrangenza generale e molto forte nel campo, che appare costituito da cristalli prismatici molto allungati, che presentano estinzione parallela alla direzione d'allungamento. A 400°, la birifrangenza sparisce d'un tratto e l'isotropia ottica si conserva poi fino a temperatura ordinaria.

Questi fenomeni si manifestano benissimo, tanto nel raffreddamento che nel riscaldamento; e per osservare grossolanamente la doppia trasformazione, basta riscaldare comunque, fino a fusione, dello ioduro rameoso fra due vetrini, ed osservare il raffreddamento: ad occhio nudo, si scorge bene dapprima la cristallizzazione iniziale accompagnata da un lieve, ma netto cambiamento del colore rosso-aranciato, poi la trasformazione della fase monorifrangente formatasi, nella birifrangente, che si manifesta con variazione notevole di colore in giallastro, ed infine il passaggio dalla fase birifrangente alla cubica inferiore con nuovo e forte mutamento di tinta.

Risulta dimostrato da queste osservazioni, che lo ioduro rameoso di cui B. Gossner [2] scoperse per il primo la fase birifrangente, è trimorfo nell'intervallo di temperatura che va da quella ordinaria a quella di fusione.

Le tre fasi cristalline hanno all'incirca i seguenti limiti di esistenza:

α CuI cubico 602-440°;

β CuI birifrangente 440-402°;

γ CuI cubico 402° — temp. ordinaria.

L'esistenza della fase cristallina monorifrangente α CuI al disopra di quella birifrangente, dà subito ragione del fatto osservato che, tutte le miscele a concentrazioni superiori al 50 % di CuI, dànno, nel raffreddamento, come primo prodotto di cristallizzazione, un aggregato di cristalli otticamente isotropi, contrariamente a quanto era da aspettarsi in base alla ipotesi finora

(1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst., 10 (1885) 321 e tav. X, fig. 1 a_1. Ved. anche Lehmann, *Fluessige Kristalle*. Leipzig, 1904, tav. 39, fig. 5.

(2) B. Gossner, *Untersuchungen polymorpher Körper*. Zeitschr. f. Kryst. XXXVIII (1904), pag. 131.

accettata, che la fase birifrangente fosse l' unica esistente ad elevata temperatura.

Se si prende la temperatura di 400° come quella più elevata di esistenza della fase birifrangente delle soluzioni solide di concentrazione 95 Cu I + 5 Ag I, e si congiunge con una retta nel diagramma di stato, tale punto con quello che rappresenta la temperatura di trasformazione: α Cu I $\rightleftarrows$ β Cu I a 440°, si vede subito che il suo prolungamento taglia la curva C D prima di giungere alla concentrazione 90 Cu I: ciò indica che il campo di esistenza delle soluzioni solide birifrangenti è molto limitato e spiega come, otticamente, solo per la concentrazione 95 Cu I essa si potè osservare per un breve intervallo di temperatura, e come per le altre concentrazioni, i cristalli misti, che chiameremo per analogia α, dalla prima fase monorifrangente si trasformino direttamente nei γ-cristalli corrispondenti, senza passare per la fase β- birifrangente.

La trasformazione: α Cu I $\rightleftarrows$ β Cu I avviene con effetto termico certamente poco considerevole, poichè coll'analisi termica essa non fu avvertita nè da me, nè da Mönkemeyer; si dovrebbe credere che anche la variazione di volume debba essere piccola, perchè non fu trovata dilatometricamente da Rodwell.

[Ho voluto incidentalmente provare se anche il bromuro ed il cloruro rameosi, dei quali Mönkemeyer (loc. cit., pag. 42) osservò la birifrangenza ad elevata temperatura, presentassero, analogamente all' ioduro corrispondente, una fase cristallina monorifrangente stabile a temperature superiori, e l'esperienza confermò le mie previsioni. Un indizio di questa doppia trasformazione si può avere anche quì osservando ad occhio nudo, analogamente a quanto dissi per il Cu I, il raffreddamento degli alogenuri fusi tra due vetrini colle precauzioni del caso, essendo essi molto più ossidabili. Questi tre monoalogenuri di rame possiedono, quindi, fra la fase liquida e quella cristallina birifrangente, una fase cristallina cubica, la quale era sfuggita a Mönkemeyer nelle sue osservazioni microscopiche in base a cui affermava (loc. cit.): « Zwischen den Deckgläschen erstarrten die Verbindungen (Cu Cl, Cu Br, Cu I) zu doppeltbrechenden Kristallen ». Mi riservo di tornare in seguito sul polimorfismo degli alogenuri rameosi].

Chimica. — *Sui borati. Sistema* $BaO = B^2O^3 - H^2O$ *a 30°* (¹)
Nota II di U. Sborgi, presentata dal Socio R. Nasini.

In una Nota precedente (²) ho riferito sulla preparazione dei borati di bario di cui mi sono servito per lo studio di questo sistema. Siccome nello studio del sistema $CaO - B^2O^3 - H^2O$ a 30° avevo avuto occasione di constatare [come è dimostrato dai dati riferiti nelle Note sui borati di calcio (³)] che il sistema perviene all'equilibrio con rapidità notevolmente maggiore se si mettono a reagire un borato preformato con acido borico ed acqua o colla base e l'acqua, piuttosto che se si mettono a reagire l'acido la base e l'acqua, ritenni opportuno anche per i borati di bario di seguire il primo metodo, e constatai subito, in esperienze preliminari, che questo presentava un vantaggio specialmente nei casi in cui occorreva sperimentare con miscugli più ricchi in acido borico e meno in barite.

I metodi di ricerca ed i modi di rappresentazione grafica sono gli stessi da me adottati nello studio degli altri borati, ed è superfluo descriverli ancora. L'agitazione in termostato si compieva coi soliti apparecchi per il tempo che indico nella tabella dove sono riuniti i resultati sperimentali.

L'estrazione delle soluzioni da analizzare si faceva anche qui con pipette due volte ricurve, attraverso tela fitta, tenendo i palloncini in termostato durante l'estrazione. L'analisi si eseguiva coi metodi volumetrici descritti anche per i borati di bario nella Nota precedente. Si adopravano o soluzioni normali, o $^1/_2$ normali, o $^1/_{10}$ normali a seconda dei casi. I resultati ottenuti furono soddisfacentemente concordanti sia per quello che riguarda le analisi successive di una stessa soluzione, sia per quello che riguarda le analisi di soluzioni a composizione costante (punti di invarianza), riferentisi ad esperienze diverse. Le difficoltà analitiche non erano di per sè grandi, data la semplicità del metodo di analisi; ma divenivano in alcuni casi assai rilevanti per le particolari condizioni di solubilità dei composti formantisi. Si aveva in generale da fare o con liquidi ad alto contenuto in barite e piccolo in acido borico, o viceversa: specialmente il contenuto in barite in alcuni punti era estremamente piccolo. Inoltre, nelle zone più ricche in acido borico, quelle riferentisi alla curva del triborato, il precipitato si deponeva molto lentamente; e all'estrazione si aveva un liquido limpido solo adoprando grandi precauzioni. Queste stesse difficoltà io avevo constatate nello studio dei borati

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.
(²) Rend Acc. Lincei, vol. XXIII, 1° sem., fasc. 7°, pag. 530.
(³) Ibid., vol. XXII, 1° sem., fasc. 9, pag. 636 e 715 e fasc. 11, pag. 798.

di calcio, si può dire addirittura identiche. Tuttavia per il bario lo studio della curva del metaborato è assai più facile, perchè questa curva si estende fino a quella della barite, che è relativamente assai alta in confronto a quella della calce. Credo in ogni modo che le ricerche siano in tutti i casi facilitate dall'impiego di borati preformati; e credo che questa sia la via più adatta per lo studio di questi sistemi riferentisi ai borati alcalino-terrosi.

Ho già detto che io avevo a disposizione diversi borati di bario preparati nel modo descritto nella Nota precedente. Precisamente avevo a disposizione l'1-1-4, il 2-3-6 e l'1-3-7. Che i precipitati ottenuti, rispondenti a queste formule, fossero composti unici, o miscugli di borati, per il mio scopo era perfettamente lo stesso, dato che io dovevo impiegarli a reagire fino all'equilibrio con soluzioni variabili di barite in acqua o di acido borico in acqua.

E del resto erano queste stesse esperienze che — meglio di ogni supposizione preliminare — avrebbero potuto risolvere tale questione, per lo meno per quanto riguarda la temperatura di 30°. Tuttavia, poichè il composto più cristallino, e di composizione più vicina alla teorica ed esente completamente da carbonato, era il metaborato tetraidrato ottenuto nella preparazione IV, fu con questo composto che eseguii dapprima tutte le esperienze. (Di un composto simile, il metaborato esaidrato, mi ero servito anche per le esperienze sui borati di calcio). In seguito, avute dallo svolgersi delle esperienze molte indicazioni sulle caratteristiche del sistema studiato, adoprai anche per controllo e conferma gli altri borati, specialmente il triborato, come dirò meglio dopo. Nella tabella seguente, le esperienze sono riportate nell'ordine dei punti successivi che le rappresentano sul diagramma. Per ciascuna di esse si trovano indicate le sostanze che furono poste a reagire e il tempo di reazione o, a meglio dire, il tempo in cui furono lasciate in termostato. L'equilibrio si raggiungeva più o meno presto (più presto nella zona in cui la soluzione era ricca in barite, meno presto in quella in cui la soluzione era ricca in acido borico); ma, per precauzione, si protrasse il tempo di reazione in alcuni casi fino a quattro mesi. È notevole che le zone dove la reazione si faceva più lenta, erano quelle stesse del borato di calcio: e precisamente quelle in cui si aveva per corpo di fondo un composto ricco in acido borico in presenza di una soluzione assai concentrata in acido borico (concentrata, s'intende, rispetto alla solubità dell'acido borico).

Esperienza — Numero	Sostanze poste a reagire			Tempo di agitazione — Giorni	Soluzione			Resto			
					B^1O^3 %	BaO %	H^2O %	B^2O^3 %	BaO %	H^2O %	
1	1-1-4,	acido borico,	acqua	52	3.6220	0.04301	96.3350	10.113	2.059	87.82	acido borico + triborato
2 *a*	»	»	»	12	3.663	0.0566	96.2804				
» *b*	»	»	»	18	3.621	0.0570	96.322				
3 *a*	»	»	»	16	3.6537	0.05591	96.2904				
» *b*	»	»	»	40	3.640	0.0447	96.3153	32.996	2.3176	64.6564	»
4	»	»	»	44	3.658	0.04376	96.2982	11.4840	0.7324	87.7836	»
5	»	»	»	131	3.669	0.04401	96.287	10.396	0.1519	89.4521	»
6	»	»	»	135	3.6771	0.03807	96.2848	11.6370	1.9285	86.4345	»
7	1-3-7	»	»	35	3.5745	0.04625	96.3793	7.601	1.9627	90.437	»
8	1-1-4	»	»	49	3.4273	0.03718	96.5355	6.902	2.682	90.416	triborato
9	»	»	»	11	2.5127	0.04429	97.4431				
10	1-3-7	»	»	37	1.9046	0.03693	98.0585	7.593	4.0767	88.3303	»
11	»	»	»	10	1.6875	0.0675	98.2450	15.45	10.02	74.53	
12 *a*	1-1-4	»	»	12	1.326	0.0371	98.6369				
» *b*	»	»	»	16	1.327	0.0533	98.6197				
» *c*	»	»	»	25	1.375	0.0745	98.5505	6.2890	3.7023	90.0087	»
13	1-3-7	»	»	7	0.6490	0.0774	99.2735				
14 *a*	»	»	»	8	0.3059	0.1632	99.5309				
» *b*	»	»	»	23	0.2801	0.1475	99.5724				

Esperienza — Numero	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione — Giorni	Soluzione			Resto			
			B^2O^3 %	BaO %	H^2O %	B^2O^3 %	BaO %	H^2O %	
15 *a*	1-3-7, acqua	4	0.2971	0.2422	99.4607				
» *b*	» »	18	0.2971	0.2265	99.4764				
16 *a*	1-1-4, acido borico, acqua	10	0.3350	0.1845	99.4805				
» *b*	» » »	46	0.2809	0.2009	99.5183	24.663	18.44	56.897	triborato
17 *a*	1-1-4, 1-3-7, acqua . . .	4	0.2938	0.458	99.2482				
» *b*	» » » . . .	15	0.2934	0.3902	99.3164				
18 *a*	1-1-4, acido borico, acqua	11	0.3175	0.2278	99.4547				
» *b*	» » »	17	0.2997	0.2789	99.4214	17.145	14.47	68.385	triborato + metaborrto
19 *a*	» » »	8	0.3754	0.2849	99.3397				
» *b*	» » »	10	0.3396	0.2965	99.3639				
» *c*	» » »	11	0.3451	0.3117	99.3432	14.663	25.277	60.06	»
20 *a*	» » »	7	0.3449	0.2767	99.3784				
» *b*	» » »	14	0.3228	0.3158	99.3614				
» *c*	» » »	17	0.31395	0.3176	99.3684	18.18	18.98	62.84	»
21 *a*	» » »	10	0.3234	0.30618	99.3704				
» *b*	» » »	45	0.3125	0.3318	99.3557	17.087	19.35	63.563	»
22 *a*	1-1-4, 1-3-7, acqua . . .	7	0.3144	0.5978	99.0878				
» *b*	» » » . . .	18	0.31975	0.5443	99.1389	19.435	25.92	45.355	
23 *a*	1-1-4, acqua	8	0.2266	0.497	99.2764				
» *b*	» »	10	0.2303	0.493	90.2767	12.940	28.533	58.527	metaborato

Esperienza — Numero	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione — Giorni	Soluzione B^1O^3 %	Soluzione BaO %	Soluzione H^2O %	Resto B^2O^3 %	Resto BaO %	Resto H^2O %	
24 *a*	1-1-4, barite, acqua . . .	7	0.205	1.19	98.605				
" *b*	" " " . . .	15	0.2131	1.187	98.6001				
" "	" " " . . .	18	0.2058	1.1966	98.5976	7.307	19.26	73.433	metaborato
25	" " " . . .	5	0.2090	2.2687	97.4223	14.503	33.31	52.187	"
26 *a*	" " " . . .	4	0.2297	3.345	96.4253				
" *b*	" " " . . .	8	0.23	3.3375	96.4125				
" *c*	" " " . . .	14	0.226	3.352	96.4218	6.868	17.464	75.668	"
27 *a*	" " " . . .	8	0.2146	4.0540	95.7314				
" *b*	" " " . . .	12	0.2491	4.80	94.9509	17.068	39.657	43.275	"
28 *a*	" " " . . .	7	0.2569	5.426	94.3171				
" *b*	" " " . . .	11	0.2567	5.412	94.3313	16.025	38.003	45.972	"
29 *a*	" " " . . .	6	0.2586	5.7286	94.0128				
" *b*	" " " . . .	10	0.271	5.741	93.9880	8.0373	36.5900	55.3727	metaborato e barite
30 *a*	" " " . . .	6	0.2617	5.779	93.9593				
" *b*	" " " . . .	13	0.2613	5.7983	93.9394				
" *c*	" " " . . .	18	0.2579	5.8166	93.9255	3.428	31.145	65.427	"
31 *a*	" " " . . .	2	0.0801	5.2346	94.6853				
" *b*	" " " . . .	11	0.0783	5.1295	94.7922				
" *c*	" " " . . .	17	0.0827	5.291	94.6263	0.05921	34.754	65.1816	barite

In continuazione della presente Nota pubblicherò prossimamente il diagramma ricavabile dai dati della tabella precedente e le conclusioni che da essi si possono trarre.

Chimica. — *Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni.* Nota II di Livio Cambi, presentata dal Socio A. Angeli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ilmenite di Val Devero* (*Ossola*)(¹). Nota di Angelo Bianchi, presentata dal Socio G. Struever.

Durante gli ultimi anni, in diversi periodi di dimora estiva nella bella conca verde di *Baceno*, che s'apre a sud-est verso la valle Antigorio (la principale delle Valli Ossolane), ebbi modo di visitare e conoscere la regione circostante, che forma il bacino del torrente Devero, tributario del Toce, persuadendomi ogni anno più dell'interesse mineralogico che essa presenta. Ad occuparmene seriamente mi spinse, oltre a ciò, il fatto che nessun lavoro di mineralogia ha finora illustrato direttamente questa valle ossolana, che pur confina direttamente con una delle regioni svizzere più sfruttate e meglio studiate, la valle di Binn, e che tanta importanza ha dal punto di vista geologico, da poter esser considerata, assieme all'attiguo gruppo del Sempione, una regione classica, per gli studî diretti a spiegarne l'intricato sistema geotettonico (²). Intricato perchè, dal suo sbocco in Valle Antigorio, alle montagne che la circondano lateralmente, alla cima del gruppo del Cervandone, che ne forma un magnifico sfondo roccioso, questa valle mostra il succedersi e l'alternarsi di una serie di *gneiss*, differenti per composizione, struttura ed origine, con varie formazioni scistose e calcari intercalate, che oramai la maggior parte dei geologi considera come mesozoiche.

Ma a tale riguardo mi basta aver accennato così, molto in generale, al motivo tettonico della regione, e ricorderò solo che è interessante la presenza, fra le montagne di confine, di una massa di Serpentina e di rocce verdi, che forma il bacino del laghi di Geisspfad, le punte della Rossa e del Fisso, e spinge le sue propaggini verso sud-ovest, a radicarsi nelle rocce del Cervandone (³).

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pavia.

(²) Vedansi per la regione le opere ed i lavori ben noti del Gerlach, Traverso, Stella, Schardt, Schmidt, Preiswerk, De Stefani, ecc..., la carta di Schmidt, Preiswerk e Stella e quella recente dell'Ufficio Geologico Italiano.

(³) Studiata specialmente dal Preiswerk. Vedi anche: L. Debuissons, *La Vallée de Binn*. Losanna, 1909, pp. 38 e segg.

Nella ricchissima messe di lavori relativi alla Binnenthal, e nella bellissima opera geologico-mineralogica di L. Debuissons che tutti li compendia [1], si trova bensì citato o descritto anche qualche giacimento sul versante italiano della catena che separa l'Ossola e la Valle di Binn, ma si tratta solo di località ben prossime al confine, o sul confine stesso, e considerate come adiacenze di quest'ultima valle. Onde non ritengo privo di interesse uno studio mineralogico completo della Val Devero, pel quale intendo continuare e completare le osservazioni e le ricerche, già da alcuni anni intraprese e troppo spesso ostacolatemi dalle insidie del tempo od impedite dalla neve.

Frattanto, come Nota preliminare, non credo inutile far conoscere fin d'ora alcuni cristalli assai interessanti di *Ilmenite*, raccolti nell'estate scorsa, occupandomi per ora della forma cristallina, nella speranza che nuove, fortunate ricerche, mi permettano di darne in seguito anche un'analisi chimica esatta.

Trovai l'Ilmenite cristallizzata in due blocchi diversi, sul versante italiano della catena di confine, fra il M. Cervandone e la punta della Rossa, sopra la morena del ghiacciaio della Rossa. L'uno è un cloritescisto tipico; l'altro una roccia notevolmente fresca, che l'esame microscopico ha dimostrato costituita quasi essenzialmente di diallagio, con poca Olivina, qualche lamella di Clorite fortemente pleocroica, e scarsi granuli di Ilmenite, mostranti qua e là un principio di trasformazione in Leucoxeno. Si tratta probabilmente di una *facies* ricca in diallagio delle *Wehrliti*, osservate anche dal Preiswerk [2] associate alla dunite del passo di Geisspfad (passo della Rossa). Evidentemente dunque entrambi i blocchi provengono dalla massa di rocce verdi sopra monzionata.

Nel cloritoscisto è impiantato un cristallo tabulare di Ilmenite, di dimensioni notevoli, accompagnato da altri più piccoli in intima connessione con cristalli di Clorite, irregolarmente sviluppati, e con abito per lo più esagonale. Nel 2° campione sono parecchi cristalli e frammenti, di minor dimensione, con forma tabulare assai più tozza, ed essi pure intimamente connessi con una Clorite in cristalli irregolari, in cui prevale l'abito trigonale, e che, pei suoi caratteri ottici sembra doversi ascrivere piuttosto ad una Pennina che ad un Clinocloro.

Carattere essenziale e comune nei cristalli di Ilmenite da me trovati è lo sviluppo predominante (oltre all'ampiezza della base) del romboedro: $n = \{22\bar{4}3\}$, o del reciproco: $n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}$, forme che si presentano pure frequenti nella Ilmenite della Valle di Binn. Anzi in alcuni cristalli di Val Devero si nota l'accoppiamento di emtrambi questi romboedri, diretto

[1] Ved. op. cit.

[2] Preiswerk, *Ueber Dunitserpentin am Geisspfadpass.* Inaug. Diss. Basel 1901.

ed inverso, equisviluppati, come nell'esemplare della Binnenthal descritto dal Bücking [1] e proveniente dall'Alpe Lercheltini, località assai discosta dalla nostra. Notiamo però subito che, oltre ad altri caratteri distintivi che vedremo, anche in questi cristalli del 2° tipo, lo sviluppo di una delle due forme reciproche accoppiate è tanto preponderante su quello dell'altra, da mantenere il carattere accennato. Alcune forme dell'Ilmenite del Cervandone sono invece comuni coi cristalli della regione dell'Ofenhorn (Punta d'Arbola), trovati nei micascisti e resi noti dal Solly [2]; altre non si trovano alla Binnenthal, ma furono già osservate in altri giacimenti, ed altre infine sono nuove, non ancora riscontrate in tale specie minerale.

Le forme da me osservate sono le seguenti:

$$c = \{0001\}$$

$$\zeta = \{20\bar{2}5\}\ ,\ a = \{11\bar{2}0\}\ ,\ n = \{22\bar{4}3\}\ ,\ n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}\ ,\ \pi = \{11\bar{2}3\}$$

$$r = \{10\bar{1}1\}\ ,\ s = \{02\bar{2}1\}\ ,\ \chi = \{44\bar{8}3\}\ ,\ \chi' = \{8\bar{4}\bar{4}3\}\ ,\ \delta = \{24\bar{6}7\}$$

$$M = \{40\bar{4}1\}\ .\ e = \{01\bar{1}2\}\ ,\ Y = \{88\overline{16}3\}\ ,\ Y' = \{16\bar{8}\bar{8}3\}\ ,\ z = \{5\bar{3}\bar{2}2\}\ .$$

Di esse, tralasciando le forme solite pel minerale, sono descritte colla valle di Binn, oltre ai romboedri n ed n' già ricordati, le: $M = \{40\bar{4}1\}$ e $\delta = \{24\bar{6}7\}$. La $\chi' = \{8\bar{4}\bar{4}3\}$ fu invece notata per la prima volta assieme ad altre forme caratteristiche, due anni or sono, dall'ing. Magistretti nella Ilmenite di Val Malenco [3], dove trovasi pure la $\pi = \{11\bar{2}3\}$, poco comune per l'Ilmenite. Infine sono finora caratteristiche per la Val Devero le forme:

$$Y = \{88\overline{16}3\}\ ,\ Y' = \{16\bar{8}\bar{8}3\}\ ,\ z\{5\bar{3}\bar{2}2\}$$

che mi risultano nuove pel minerale [4].

Coll'angolo tra le facce: $(0001):(10\bar{1}1)$, quasi uguale in tutti i cristalli e più volte misurato sugli stessi con ripetizione sul disco, ottenni, fra i valori vicinissimi di: 57°, 58′, e 57°, 59′, una media uguale al valore calcolato dal Kokscharow per l'Ilmenite di Atliansk [5] $(c\text{ - }r = 57°\ ,\ 58'\ ,\ 30'')$. Sicchè, calcolata con questo angolo, la *costante* per i cristalli di Val Devero, coincide con quella data dal Kokscharow:

$$\frac{c}{a} = \varrho = 1,38458.$$

(1) H. Bücking, Groth's Zetschr., 1-576. (Ved. anche Hintze, Handb. der Min., 1908. pag. 1866.

(2) R. H. Solly, Miner. Soc. Lond. 1906, 14, 184.

(3) L. Magistretti, *Ilmenite delle Cave di pietra Ollare di Chiesa* (Val Malenco). R. Accad. dei Lincei, Roma, 1° dicembre 1912.

(4) La prima di tali forme si trova nella Ematite (ved. Struever, *Studî sulla Ematite di Traversella.* Atti Accad. di Scienze. Torino, 1872). Evidentemente per un errore di stampa viene dal Bücking, nel lavoro citato, a pag. 579, riportata col contrassegno dall'autore usato per indicare le forme della Ilmenite.

(5) V, Kokscharow, Mater. Miner. Russl. 1870, VI, 355.

Colla quale costante mi risulta un accordo grandissimo fra gli angoli calcolati e quelli misurati, come appare chiaramente dalla tabella riportata più avanti.

Ecco ora una breve descrizione degli individui dei due campioni trovati:

I cristalli del Cloritescisto hanno, come dissi, una forma tabulare molto appiattita, dovuta alla grande estensione della base. Sulle altre forme domina in modo assoluto il romboedro inverso: $n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}$, stipando in una sottile fascia, strozzata nel mezzo, la zona dei romboedri di 1° ordine. È questa la disposizione costante e caratteristica, che dà l'aspetto tipico alla Ilmenite di Val Devoro. Le altre facce, sottili e lunghe, smussano alternatamente gli spigoli fra il romboedro maggiore e la base. Di tali cristalli, quello migliore, la cui base raggiunge la dimensione massima di circa 10 mm., è costituito dalla combinazione delle seguenti forme (ved. fig. 1):

$$\{0001\}\ \{4\bar{2}\bar{2}3\}\ \{20\bar{2}5\}\ \{10\bar{1}1\}\ \{40\bar{4}1\}\ \{02\bar{2}1\}\ \{44\bar{8}3\}\ \{88\bar{16}3\}.$$

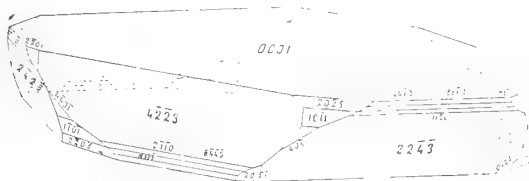



Fig. 1.

I cristalli dell'altro pezzo, più numerosi, hanno aspetto più tozzo e mostrano il predominio del romboedro diretto $n = \{22\bar{4}3\}$.

In parecchi a questo è accoppiato il suo reciproco $n' = \{4\bar{2}\bar{2}3\}$, sempre però ridotto a proporzioni assai più limitate, come tutte le altre forme, il che mantiene ancora l'aspetto tipico, citato per gli individui del Cloritescisto.

Sono assai ricchi di forme. ed il migliore di essi presenta questa notevolissima e complessa combinazione:

$$\{0001\}\ \{4\bar{2}\bar{2}3\}\ \{22\bar{4}3\}\ \{20\bar{2}5\}\ \{10\bar{1}1\}\ \{40\bar{4}1\}\ \{02\bar{2}1\}\ \{11\bar{2}0\}\ \{01\bar{1}2\}\ \{8\bar{4}\bar{4}3\}$$
$$\{16\bar{8}\bar{8}3\}\ \{24\bar{6}7\}\ \{5\bar{3}\bar{2}2\}.$$

Fig. 2

Ho rappresentato questo cristallo nella figura n. 2, attenendomi il più possibile alla sua forma naturale, onde conservare il tipico sviluppo relativo delle facce, che i disegni, meglio di ogni descrizione possono rendere fedelmente.

A metà circa della parte di cristallo libera, in corrispondenza di una fessura fra la base e la $(22\bar{4}3)$, si notano alcune facce, colle quali si abbozza un secondo individuo più piccolo, in associazione perfettamente parallela col primo, e colla $n = (22\bar{4}3)$ coincidente.

Le facce sono ben delimitate e lucentissime, onde se ne hanno immagini riflesse assai nitide e misure esatte.

In un altro cristallo dello stesso tipo, ma meno ricco di forme, ho trovato invece la $\pi = \{11\bar{2}3\}$.

Da quanto ho detto, dalle misure, per le quali altri cristalli e frammenti, oltre quelli descritti, mi servirono, e dalle figure, risulta evidente che questi cristalli di Val Devero meritano di essere annoverati fra i più notevoli di questa specie minerale; e d'altra parte presentano tali caratteri distintivi da non poter essere confusi coi cristalli di Ilmenite, finora conosciuti, della vicina Valle di Biun.

TABELLA DEI VALORI ANGOLARI MISURATI, E CALCOLATI (COSTANTE DI KOKSCHAROW).

ANGOLI		LIMITI OSSERVATI	MEDIE	VALORI CALCOLATI	DIFFERENZE	NUMERO
0001	$01\bar{1}2$	38°32′ - 38°37′	38°35′ 1/2	38°38′	— 0°2′ 1/2	5
»	$02\bar{2}1$	72,34 - 72,48	72,37 1/2	72,38	— 0,0,30″	4
»	$40\bar{4}1$	81,5 - 81,9	81,7 1/2	81,6 1/2	+ 0,1	6
»	$10\bar{1}1$	57,58 - 57,59	57,58 1/2	57,58 1/2	—	9
»	$20\bar{2}5$	32,27 - 32,34	32,33	32,36	— 0,3	5
»	$4\bar{2}\bar{2}3$	61,31 - 61,35	61,33	61,33	—	15
»	$8\bar{4}\bar{4}3$	74,46 - 74,56	74,50	74,52	— 0,2	6
»	$16\bar{8}\bar{8}3$	82,6 - 82,15	82,10	82,11	— 0,1	3
»	$2\bar{1}\bar{1}0$	89,48 - 90,15	90,2	90	+ 0,2	6
»	$11\bar{2}3$	42,45 - 42,44	42,44 1/2	42,42	+ 0,2 1/2	3
»	$42\bar{6}7$	50,18 - 50,20	50,19	50,23 1/2	— 0,4 1/2	2
$22\bar{4}3$	$4\bar{2}\bar{2}3$	52,7 - 52,9	52,7 1/2	52,10	— 0,2 1/2	4
$8\bar{4}\bar{4}3$	»	13,16 - 13,21	13,19	13,19	—	6
$22\bar{4}3$	$2\bar{4}23$	99,8 - 99,12	99,10 1/2	99,11 1/3	— 0,0,45″	7
»	$22\bar{4}\bar{3}$	56,54 - idem	56,54	56,54	—	2
»	$11\bar{2}0$	28,19 - 28,39	28,29	28,27	+ 0,2	5
»	$10\bar{1}1$	26,3 - 26,7	26,4 1/2	26,5	— 0,0,30″	6
»	$20\bar{2}5$	35,42 - 35,45	35,44	35,46	— 0,2	4
»	$8\bar{4}\bar{4}3$	56,39 - 56,41	56,40	56,45	— 0,5	2
»	$02\bar{2}1$	29,34 - 29,41	29,38	29,39	— 0,1	5
»	$24\bar{6}7$	14,20	14,20	14,20	—	1
»	$11\bar{2}3$	18,48 - 18,49	18,48 1/2	18,51	— 0,2 1/2	2
»	$01\bar{1}2$	32,1 - 32,14	32,6	32,3	+ 0,3	7
»	$\bar{2}5\bar{3}2$	50,31 - 50,33	50,32	50,30 1/2	+ 0,1 1/2	2
»	$6\bar{2}\bar{4}\bar{7}$	82,1	82,1	81.57 1/2	+ 0,3 1/2	1
$10\bar{1}\bar{2}$	$10\bar{1}1$	83,56 - 84,15	84,7	84,4	+ 0,3	4
$2\bar{4}23$	»	75,23 - 75,26	75,24 1/2	75,22	+ 0,2 1/2	3
$40\bar{4}1$	»	23,6 - 23,11	23,8	23,8	—	6
$02\bar{2}1$	»	55,41 - 55,54	55,46	55,50	— 0,4	3
$20\bar{2}1$	»	25,25 - 25,31	25,27	25,22	+ 0,5	4
$20\bar{2}\bar{1}$	$22\bar{4}3$	54,10 - 54,17	54,14	54,14	—	5
$\bar{2}021$	$\bar{1}012$	33,59 - 34,2	34,0 1/2	34	+ 0,0,30″	3
»	$\bar{6}247$	27,36 - 27,46	27,42	27,44	— 0,2	3
»	$\bar{4}\bar{4}83$	28,50 - 28,50	28,50	28,51	— 0,1	2
»	$\bar{3}\bar{2}52$	22,25	22,25	22,28 1/2	— 0,3 1/2	1
$20\bar{2}5$	$1\bar{1}02$	34,13 - 34.22	34,17	34,18	— 0,1	9

Mi è grato chiudere questo primo lavoro coll'esprimere al prof, L. Brugnatelli la mia viva riconoscenza per gli insegnamenti ed i consigli affettuosi di cui mi fu largo, adempiendo così il più gradito dovere di un discepolo verso il suo Maestro.

Geologia. — *Di alcune nummoliti dell'Isola di Rodi.* Nota di Lina Pieragnoli, presentata dal Socio C. De Stefani.

Terreni di Rodi. — Masse cretacee si elevano nel centro dell'isola con forme alpestri, a picco: il *flysch* eocenico è formato da terreni poco resistenti e occupa anch'esso regioni montuose, ma meno alte, meno a picco e più fertili.

Il Bukowski nella *Geologische Uebersichtskarte der Insel Rhodus* dice che nella regione occidentale il *flysch* occupa essenzialmente il paese montuoso al nord e all'ovest del M. Ataviros, o più precisamente quella parte che si trova tra la formazione cretacea, le montagne del Kitale e i terreni cretacei e eocenici al capo di Kopria e al M. Acramitis. In questa parte occidentale dell'isola manca del tutto il terziario giovine, o appare in piccoli lembi disturbando poco la struttura generale.

Bukowski trovò nummoliti nella regione occidentale dell'isola, in una breccia calcarea scura, inclusa nelle arenarie e negli schisti.

Solo il De la Harpe aveva indicato nummoliti dell'isola di Rodi nel suo lavoro: *Étude des nummulites de la Suisse.* Memoires de la Société Paléontologique suisse, pp. 120-121; aveva trovato la *N. Gizehensis*, la *N. curvispira* e la *N. lucasana* e questa citazione era sfuggita a tutti quelli che hanno dato la bibliografia dell'isola: appunto in questa parte del *flysch*, di cui parla il Bukowski, si trovano i fossili raccolti dal prof. A. Martelli e a me cortesemente affidati. Brecciole nummolitiche, arenarie di color grigio scuro, contengono una quantità straordinaria di nummoliti, alcune tanto ben conservate e isolate da poterne fare preparazioni microscopiche senza bisogno di calcinazione: in queste brecciole sono incluse piccole ghiaiette calcaree biancastre in gran quantità. Esse sono simili alle brecciole nummolitiche che si trovano nel nostro Appennino toscano: provengono dal *flysch* tra Embona e Kastellos, presso Embona, tra Apollona e Embona e dalle masse calcaree che si trovano tra Apollona e Embona.

Le specie trovate da me sono le seguenti:

Nummulites Gizehensis Forksal, forma A: questa nummolite era conosciuta prima col nome di *curvispira*: così la chiamano d'Archiac e Heime, de la Harpe ecc. Il Lister per primo, pur chiamandola sempre *curvispira*, la considera come la forma A della *Gizehensis*, e finalmente il Boussac la chiama col nome stesso della forma a microsfera.

Questa nummolite, insieme colla forma B e colla *N. lucasana*, è stata rammentata da De la Harpe come frequente nell'isola di Rodi. Ho trovato tanto la forma B che la A, e quest'ultima raggiunge anche 6 mm. di dia-

metro. Questa specie appartiene al luteziano: si trova tra Embona e Kastellos, presso Embona, tra Apollona e Embona.

Nummulites Garnieri, De la Harpe. Forma A. È di piccole dimensioni. È una specie che ha fatto De la Harpe per alcuni esemplari delle basse Alpi a lui mandati da Garnier.

Nei pezzi di roccia che ho io non si può ben distinguere la superfice: si vede però che deve essere striata e punteggiata. La spira è regolare, la lamina spirale è discretamente spessa; la camera centrale è piccola, i setti sono fitti, quasi dritti fino all'attaccatura superiore, le camere più alte che larghe.

Appartiene al Priaboniano inferiore o Bartoniano. Si trova presso Embona, tra Apollona e Embona, tra Embona e Kastellos.

Nummulites perforata Denys de Montfort. Di questa specie ho trovato la forma B che è facile riconoscere macroscopicamente a Embona, tra Embona e Kastellos. La forma A non è proprio la forma tipo; se ne discosta un po' per avere la lamina spirale meno grossa e i setti meno curvi: è somigliantissima alla *Gümbelia Roualti* di Prever, ma Boussac include anche questa nella *perforata*.

Anche io sono dell'avviso che la *perforata* varia spessissimo e non si può fare una specie diversa per ogni variazione.

I miei esemplari hanno spira più o meno regolare, quattro giri, camera centrale grande, setti impiantati un po' obliquamente sulla lamina, ricurvi nella parte superiore; camere più alte che larghe alcune; in altre è invece il contrario. Si trova tra Embona e Kastellos, tra Apollona e Embona. Appartiene al luteziano.

Non ho potuto isolare altre nummoliti per esaminarle al microscopio, ma all'osservazione diretta ho trovato qualche esemplare di *Assilina exponens* Sowerby (forma A) presso Embona.

Neppure nelle masse calcaree che si trovano presso Embona ho potuto isolare nummoliti colla calcinazione o con altro sistema: ho fatto varie sezioni trasparenti della roccia, e in queste ho notato nummoliti che ho potuto riconoscere per la *N. Garnieri* [A] e la *N. Gizehensis* [A].

Oltre a queste ho trovato nelle sezioni alcuni esemplari di *Lithotamnium*, di *echino*, di *operculina*, *quinqueloculine*, *biloculine*, *orthofragmine*, *alveoline*, di cui ho potuto distinguere una specie, l'*Alveolina oblonga* di Fortis, e due esemplari di *Nodosaria*.

Le nummoliti da me indicate sono della parte più alta dell'eocene medio, quindi appartengono a quell'età i terreni che si stendono intorno a Apollona, a Embona, a Kastellos. Il prof. Martelli [1] dice che il *flysch* dell' isola di

[1] Martelli, *L'isola di Stampalia*. Bollettino della Società geografica, n. 6, 1° giugno 1913, serie V, vol. II, pag. 686.

Rodi è molto più alto di quello di Stampalia, e sarebbe compreso nella parte più alta dell'eocene superiore. Io non ho trovato che una nummolite appartenente al Priaboniano e Bartoniano: la *N. perforata* si trova anche nel *flysch* dell'isola di Stampalia: a me pare quindi che gli strati donde provengono le nummoliti esaminate possano essere più alti di quelle dell'isola di Stampalia esaminati dal Martelli, ma appartengano tuttora alla parte più alta dell'eocene medio, non già all'eocene superiore.

Geologia. — *Sulla origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna* (¹). Nota di G. Ponte, presentata dal Corrispondente G. Di Stefano.

La teoria delle acque piovane infiltranti nel sottosuolo, radicata da due secoli e mezzo nella mente degli idrologi, ha trovato di recente, specialmente in Germania ed in Russia, numerosi oppositori.

Gli studiosi di oggi, con osservazioni dirette dei fenomeni e con prove sperimentali vengono a demolire la secolare teoria che il Mariotte, più con la sua autorità di scienziato anzichè con i pochi dati pluviometrici sui quali egli si basava, aveva saputo far prevalere nonostante la efficace opposizione dei francesi Perrault, de la Hire e Sedileau, degli inglesi Derham e Woodward, dell'olandese Lulofs e del tedesco Kästner.

Sono le embrionali idee di Aristotele sulla condensazione degli elementi dell'aria nel sottosuolo che vengono oggi ad acquistare un vero valore scientifico.

Kohler in una sua interessante relazione (²) espone una serie di ricerche e di risultati che militano contro la secolare teoria dell'infiltrazione. Si è potuto constatare, egli dice, che il rendimento delle sorgenti non va parallelo con la quantità delle acque infiltranti; che l'abbassamento del livello barometrico apporta un accrescimento nelle sorgenti, non spiegabile con l'aumento della velocità di permeazione accelerata dalla pressione; che alcune sorgenti, le quali durante lunga siccità disseccano del tutto, incominciano poi a fluire prima che incominci la pioggia; ed infine, che esistono delle sorgenti in cima ai monti le quali in nessun modo possono essere alimentate dalle acque infiltranti.

Il primo geologo che scagliandosi contro la dogmatica teoria dell'infiltrazione diede una nuova spiegazione scientifica sulla origine delle acque

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania.

(²) F. Kohler, *Neuere Grundwassertheorien*. Zeitschrift für prakt. Geologie, 1910 pag. 23.

sotterranee fu il dott. Otto Volger. Egli in una conferenza tenuta nel 1877 nel XVIII congresso della società degli ingegneri tedeschi, sostenne che l'aria atmosferica ricca di vapor di acqua penetrando nel suolo ed arrivando nella zona di temperatura più bassa, che non risente delle variazioni prodotte dal riscaldamento solare, ivi si condensi.

Alla obiezione mossagli perchè mai le sorgenti scorrano abbondanti dopo le grandi pioggie, egli rispose dimostrando che, come un forte contenuto di vapor d'acqua nell'aria e una rapida diminuzione di temperatura determinino la formazione delle nubi e poi la pioggia, così anche nel sottosuolo si ha una condensazione, che fa aumentare le acque sotterranee.

La teoria del Volger ebbe subito Hahm e Wolluny avversari, ma da recente il König (¹) e l'Haedicke (²) l'hanno rievocata, ed è merito specialmente di quest'ultimo di averla avvalorata con degli esperimenti. Haedicke ha dimostrato in pubblica conferenza che un cilindro di vetro contenente mezzo litro di sabbia perfettamente asciutta e tenuta a 7° C., mentre la temperatura dell'ambiente ove operava era di 10° C., ha permesso di ricavare in un'ora 4 grammi di acqua proveniente dalla condensazione del vapor d'acqua che man mano è penetrato nella sabbia per diffusione.

Keilhack (³) nel suo interessante *Lehrbuch der Grundwasser und Quellenkunde* espone in una tabella la quantità di vapore d'acqua che può esser contenuta in un metro cubo d'aria a diversa temperatura: a 10° l'aria contiene gr. 9,4 d'acqua, a 15 gr. 12,7 ed a 25° gr. 22,8. Cosicchè un abbassamento di temperatura da 15° a 10° C. produce la condensazione di gr. 3,3 d'acqua.

Se dunque in mezzo litro di sabbia, che può contenere circa 200 cm.³ d'aria, si condensano gr. 4 di acqua in un'ora con un abbassamento di temperatura da 10° a 7°, significa come se attraverso il mezzo litro di sabbia fossero passati metri cubi 2,1 d'aria; intanto nell'aria non si constata alcun movimento; è piuttosto il vapor d'acqua che ha un potere diffusivo grandissimo.

Di recente il prof. Meydenbauer ha dato una spiegazione, la quale permette di riguardare da un punto di vista scientifico diverso il fenomeno della condensazione dell'umidità dell'aria che scende nel sottosuolo. Secondo questo autore (⁴) l'umidità dell'aria non si comporta come un gas, ma è costituita

(¹) F. König, *Die Vertheilung des Vassers ueber, auf u. in der Erde und die daraus sich ergebende Entstehung des Grundwassers u. seiner Quellen mit einer Kritik des bisherigen Quellentheorien.* Iena, 1901.

(²) H. Haedicke, *Die Entstehung des Grundwassers. Bayr. Industrie und Gewerbeblatt,* 1907.

(³) K. Keilack, *Lehebuch der Grundwasser-und Luellekunde.* Berlin, 1912, pag. 92.

(⁴) Meydenbauer, *Die Entstehung des Grundwassers.* Zeitsch. d. Verbandes deutscher. Architekten und Ingenieur-Vereine. Iahrg. 1, nr. 5, 1912, pag. 41.

da sferoline di acqua (Dunstbälle) il cui diametro varia da mm. 0,02 a mm. 0,006.

Le sferoline d'acqua, per effetto di repulsioni reciproche, rimangono libere nell'aria e con essa penetrano nel suolo, ivi aderiscono alla superficie delle singole particelle del terreno, e se queste sono molto accostate le sferoline possono toccarsi e raccogliersi in fluida acqua. Secondo questa spiegazione la temperatura non avrebbe alcuna influenza sul fenomeno della condensazione sotterranea, che piuttosto dipenderebbe dalla quantità e dalla grossezza delle sferoline sospese nell'aria e dalla grandezza degli interstizî che ha il terreno permeabile. La teoria del Meydenbauer apre un campo nuovo di ricerche specialmente su quanto riguarda l'influenza che ha la struttura delle rocce nella condensazione. Tante osservazioni, alle quali sin'oggi si era dato poca importanza vengono a portare gran luce sull'interessante problema. Per esempio è noto a chiunque il fatto che alcune rocce adoperate per la costruzione degli edifici hanno la proprietà di assorbire l'umidità dell'aria, mentre altre nello stesso ambiente, pur essendo della stessa natura, solo perchè hanno struttura diversa, rimangono asciutte. I tufi vulcanici più di qualunque altra roccia hanno un potere condensante straordinario e ciò, con la teoria di Meydenbauer, si spiegherebbe ammettendo che gli interstizî di questa roccia sono tali che le piccolissime sferoline di vapor d'acqua penetranti nel sottosuolo possono venire in contatto fra di loro, accumularsi e dar luogo alla vena liquida.

L'esame microscopico di tali rocce conforta tale ipotesi: i granellini sono porosi e sono separati l'uno dall'altro da piccoli interstizî.

Se si tiene presente che la zona dell'Etna più ricca di acque sotterranee è quella sud-orientale, ove sotto le colate di lava si riscontrano estesi strati di tufo fra i quali si rinvengono tali acque è importante vedere d'onde esse traggano origine.

L'Etna sorse fra i terreni post-pliocenici quando essi non erano ancora del tutto emersi, e ciò viene provato dal fatto che i torrenti, i quali scendevano dai monti Peloritani e da Troina verso il grande golfo Preetneo portanti ciotoli e detriti venivano a depositarsi nel mare con i depositi delle deiezioni vulcaniche delle prime grandi conflagrazioni dell'Etna.

Dalle osservazioni fatte nei varî pozzi e cunicoli eseguiti sul versante di Aci dalla Società delle Acque di Casalotto per la ricerca di nuove acque, si è potuto accertare che al disotto dei banchi di lava si trovano gli stessi tufi con impronte di foglie di mirto e di alloro che si riscontrano alla Licatia e al Fasano presso Catania. Questi tufi si estendono fino al mare ove nella balza di Aci son messi allo scoperto in sezione naturale. Le lave ed i tufi che si succedono con lo stesso ordine nei pozzi della pianura di Aci S. Antonio, nei pozzi dell'altra pianura sottostante di Aci Catena e nella balza in riva al mare fanno ritenere che due faglie parallele alla spiaggia

si siano formate nel vessante di Aci e per conseguenza due gradini, uno lambito dal mare nella balza di Aci, l'altro a circa 3 chilometri nella balza di Aci Catena.

Or è importante fare notare che lungo tali faglie e precisamente fra i tufi scorrono abbondanti masse di acqua, dei veri fiumi sotterranei, che la mitologia aveva personificato in Acis l'infelice amante di Galatea, il quale, oppresso sotto i macigni del vulcano, rapido e furtivo veniva a confondersi fra le onde del mare. Queste acque limpidissime che tengono in soluzione i soli elementi mineralizzanti forniti dalle rocce vulcaniche dell'Etna, in seno alle quali esse hanno origine e scorrono, non risentano alcuna influenza delle acque piovane.

Ciò è stato dimostrato dalle ricerche chimiche fatte continuamente per circa un anno alle acque sotterranee del versante di Aci [1]. Le acque piovane che dopo l'eruzione del 1911 venivano saturate dagli abbondanti sali solubili sparsi sulle falde dell'Etna, non arrivarono a penetrare fino al livello delle acque sotterranee. Questa osservazione altrettanto decisiva quanto essa è semplice non può, fino a prova in contrario permettere di spiegare l'origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna con la teoria del Mariotte, mentre quella del Meidenbauer vi trova delle conferme.

È un fatto bene accertato che in Sicilia nelle annate di generale siccità le sorgenti sono state povere di acqua, ma si è pure constatato che nelle annate in cui sul versante orientale dell'Etna si è avuta scarsissima pioggia, come risulta dai dati pluviometrici di Acireale, di Catania e dell'Osservatorio Etneo, le sorgenti non sono diminuite quando la mancanza di pioggia è stata supplita da una notevole umidità nell'aria. Certo questa osservazione merita delle conferme, ed è da sperare che sul versante orientale dell'Etna vengano fatte delle misure dirette dello stato igrometrico dell'aria e della quantità di acqua precipitata, in rapporto con la portata delle sorgenti.

D'altro canto se le indagini storiche permettono di accertare che le sorgenti d'acqua ai piedi dell'Etna erano più abbondanti quando il vulcano era tutto rivestito di folti boschi, migliore spiegazione di ciò si potrebbe avere ammettendo la teoria della condensazione anzichè quella delle acque infiltranti.

Un terreno imboschito offre una maggiore superficie evaporante di un terreno ignudo, tanto che se le pioggie sono di breve durata non arrivano ad inumidire il suolo; e si pensi ancora che le piante assorbono una grande quantità di acqua dal terreno, per esempio un bosco di querci assorbe dal suolo circa 250 mm. di acqua in un anno.

[1] G. Ponte, *Sulla indipendenza delle acque sotterranee dell'Etna dalle precipitazioni atmosferiche*. Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, pag. 502.

Le precipitazioni atmosferiche sull'Etna oscillano intorno ai 600 mm. di pioggia all'anno, e siccome soltanto il 20 % dell'acqua caduta penetra nel terreno arriverebbero nel sottosuolo dell'Etna appena 125 mm. d'acqua piovana, la metà di quanto già ne consuma un bosco di querci; or si domanda da dove potrebbero trarre l'acqua necessaria le rigogliose querci dell'Etna non ammettendo la teoria della condensazione?

Secondo la vecchia teoria dell'infiltrazione l'imboschimento sarebbe dannoso alle sorgenti perchè gli alberi non solo assorbono acqua dal terreno ma, con le loro folte chiome, le quali offrono una estesa superficie evaporante, rimandano all'atmosfera tutta l'acqua caduta durante una pioggia di breve durata.

Sotto le folte chiome d'un bosco l'umidità è permanente anche quando l'aria esterna è molto asciutta. Una zona di umidità si mantiene sul terreno imboschito, dovuta in gran parte al fatto che le correnti d'aria difficilmente possono penetrare una fitta boscaglia. Questa zona di permanente umidità è quella che determina il regolare regime delle sorgenti poichè una regolare massa di vapore penetra continuamente nel sottosuolo sino alla zona di condensazione.

Questa nuova spiegazione permetterà di sostenere scientificamente la esatta quanto antica massima che si rammenta sempre al popolo con la celebre frase dell'Humboldt: Atterrando le selve sulla cima e sui fianchi delle montagne gli uomini lasciano alle generazioni future due grandi calamità insieme, la penuria di legname e di acqua.

Geologia. — *Sulla Geologia dei dintorni di Tobruk.* Nota di C. I. Migliorini, presentata dal Socio C. De Stefani.

Fisiologia. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico.* Nota I dei dottori G. Quagliariello ed E. D'Agostino, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *I così detti ascessi di Dubois, secondo gli studî sulla rigenerazione del timo dei mammiferi* [1]. Nota preventiva del dott. FRANCESCO FULCI, presentata dal Socio E. MARCHIAFAVA.

I così detti *ascessi di Dubois* del timo, noti già da tempo e considerati da molti come espressione patognonomica dell'infezione luetica, può dirsi abbiano determinato nei varî autori, che li hanno studiato, un accordo ed un disaccordo, notevole l'uno quanto l'altro.

L'accordo deriva dalla constatazione accurata e serena del reperto anatomico, per cui le varie descrizioni, e specialmente le recenti, poco differiscono le une dalle altre. Il disaccordo comincia quando dai dati di fatto osservati si vuole risalire al meccanismo genetico di essi.

La presenza infatti di cellule epiteliali appiattite, disposte spesso in vario ordine di strati, nel rivestimento interno della parete della cavità, così detta ascessuale, ha richiamato in modo particolare l'attenzione degli studiosi, come uno dei fatti più importanti e caretteristici, chè in estensione così notevole non si riscontrano certo nel timo, almeno in condizioni normali.

E la spiegazione della genesi di quelle formazioni, dovendo specialmente rendere conto della presenza di questi epitelii piatti stratificati, che senza limiti netti si continuano perifericamente con elementi di aspetto linfoide, ha incontrato difficoltà e provocato il succedersi di numerose ed anche geniali ipotesi, avvalorate spesso dalla conferma di qualcuno o smentite dalle critiche severe di altri.

Fra le teorie esposte, due però sono quelle che si sono maggiormente affermate:

l'una, che dà a queste formazioni il significato di arresti di sviluppo, per cui le cellule epiteliali stratificate, rivestenti la cavità sarebbero residuo di quelle che originariamente tapezzavano il lume dell'abbozzo timico primitivo;

l'altra, che riconduce la genesi di queste formazioni ad una vera e propria immigrazione del tessuto timico nell'interno dei corpuscoli di Hassal, i quali perciò vengono dilatati, mentre poi gli elementi immigrati andrebbero incontro alla necrosi, costituendo il detritus, amorfo, purisimile, che si riscontra nell'interno di esse.

Secondo questa seconda ipotesi, emessa già dal Chiari e da molti autori condivisa, l'epitelio piatto di rivestimento non sarebbe quindi altro

[1] Lavoro fatto nell'Istituto patologico dell'Università di Freiburg i Br. diretto dal Geheimrath prof. L. Aschoff.

che il residuo delle cellule epiteliali piatte degli strati più esterni dei corpuscoli di Hassall, infiltrati e straordinariamente ingranditi.

Non discuto ora, per brevità, queste due principali teorie, che, se possono in certo modo spiegare una parte del reperto anatomico, non sono però sufficienti per fare comprendere il resto.

Nello studio della rigenerazione del timo dei mammiferi, raramente nei conigli, ma, e specialmente, nei cani, io sono qualche volta rimasto sorpreso dall'osservazione di formazioni, che potevano anatomicamente essere avvicinate a quelle descritte nell'uomo, come ascessi di Dubois e che in questi casi dovevano essere ritenute secondarie alla necrosi dei frammenti di tessuto timico, residuale alla timectomia parziale.

Infatti nei pezzi di timo, asportati precedentemente per studiare il meccanismo rigenerativo dell'organo, mai mi era stato dato di rilevare formazioni consimili: il timo si era presentato in questi casi perfettamente normale.

Ora queste particolari formazioni lasciano riconoscere una parete ed una cavità centrale.

La cavità ha un aspetto vario: rotondeggiante, ovoidale, o con piccole ed irregolari sinuosità laterali, ora alquanto superficiali, ora più profonde. Il lume non ne è mai vuoto, ma riempito, più o meno completamente, da una sostanza omogenea, ialina, piuttosto uniformemente colorata dall'eosina, nella quale potevano talora riconoscersi residui dei primitivi corpuscoli di Hassal, in forma di piccole formazioni concentriche, debolmente colorate.

Tale massa omogenea è sovente, ma scarsamente, infiltrata da leucociti mono, e polinucleati e da cellule a nucleo grande pallido, con nucleolo distinto e con protoplasma ampio, rotondeggiante, vescicoloso [*Degenerationszellen*] (¹). Qua e là irregolarmente sparsi sono residui di carioressi nucleare.

Talora nei casi osservati pochi giorni dopo la timectonia (ad es. in un cane (18mo di protocollo) ucciso diciotto giorni dopo la timectonia parziale) la sostanza che riempiva la cavità era di aspetto quasi ialino verso la periferia, ma al centro presentava ancora emazie, piuttosto bene conservate. Le *Degenerationszellen* erano assai abbondanti.

La parete presenta in genere elementi di rivestimento di aspetto alquanto diverso negli strati più interni, rivolti verso il lume ed in quelli più esterni.

Gli strati più interni sono costituiti da elementi di aspetto epiteliale, a nucleo grande, piuttosto pallido, con nucleolo bene distinto e membrana nucleare sottile, ma evidente: nucleo ovoidale, ma più spesso allungato in senso trasversale.

(¹) Fulci, Deut. med. Wochen, 1913, n. 37; Centralbl. f. allg. Patholog. und pathol. Anatom., 1913, S. 968.

Il protoplasma è relativamente ampio ovoidale, ma più spesso appiattito in senso lineare, così che l'elemento assume l'aspetto di un epitelio piatto.

Talora è piuttosto alto, e sporgente nell'interno del lume stesso. Il margine libero di questi epitelii ora è bene delimitato; ora invece è come ricoperto dalla massa del contenuto; ora addirittura indistinto, come se le cellule più interne dei rivestimento della parete si continuassero con il contenuto ialino della cavità stessa.

Queste cellule epiteliali appiattite, che talora quasi a guisa di propaggini, variamente dirette, si spingono nel lume della cavità sono disposte in vario ordine di strati, onde in alcuni punti la cavità può ben dirsi delimitata come da un epitelio piatto, pluristratificato.

Fra queste cellule epiteliali, morfologicamente riconducibili a quelle che io ho già indicato con il nome *Mutterzellen* [1], si notano spesso elementi dai caratteri istologici riferibili a quelli da me descritti per le *Degenerationszellen*.

Verso gli strati più esterni le cellule divengono sempre più piccole, il nucleo più ricco di cromatina, più scuro, il nucleolo meno distinto, il protoplasma più stretto, rotondeggiante, piuttosto basofilo.

Senza alcun limite netto dalle cellule grandi epiteliali appiattite si passa, per una serie di forme intermedie, a cellule di aspetto linfoide, linfocitosimili, degli strati più esterni. Le quali verso l'esterno si presentano, a guisa di noduli rotondeggianti, limitate da un tessuto connettivale lasso, variamente provvisto di nuclei, ma in genere povero di essi.

Fra le cellule di aspetto linfoide degli strati più esterni, non si notano in genere corpi di Hassal.

La parete della cavità, così costituita, per la presenza delle grandi cellule epiteliali, chiare situate verso l'interno, dalle quali senza limiti precisi, ma per gradi, attraverso numerose forme intermedie, si passa, verso la periferia, alle cellule linfocitosimili, ricorda uno di quegli stadî (il secondo) che io ho descritto nella rigenerazione dell'organo ed indicato con il nome di *timo invertito*.

In questi casi dalle cellule epiteliali, dalle *Mutterzellen*, primitivamente originatesi attorno alla massa necrotica, centralmente disposta, si era avuta la produzione, in senso centrifugo, di cellule di dimensioni sempre più piccole, sino alle linfocitosimili degli strati più esterni.

In questi casi però le cellule epiteliali degli strati più interni, avevano un aspetto alquanto più appiattito, meno ovoidale o cilindrico, delle solite *Mutterzellen*, sebbene il resto dei caratteri morfologici ad esse le identificasse.

[1] Fulci, lavori già citati.

Mentre mi riserbo di ritornare più diffusamente sull'argomento nel lavoro completo, credo pertanto opportuno rilevare che per *effetto della necrosi e della rigenerazione del tessuto timico si possono ottenere negli animali da esperimento (e specialmente nei cani) delle formazioni particolari, analoghe ai così detti ascessi di Dubois, che sono stati ripetutamente descritti nell'uomo e considerati, quasi, come patognonomici della infezione sifilitica, specialmente congenita.*

Batteriologia agraria. — *Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno.* Nota di C. Lumia, presentata dal Socio G. Cuboni.

Nel 1902, in una breve Memoria pubblicata sul periodico *Le Stazioni sperimentali agrarie italiane* (vol. XXXV, fasc. VII), affermai il concetto che i concimi minerali esercitano un'azione diretta sui microrganismi del terreno; che la concimazione potevasi considerare come l'apparecchiamento dell'ambiente chimico culturale dei microbi del terreno, e che infine questi coi loro resti e con le loro specifiche funzioni concorrono in larga misura alla vita delle piante coltivate. Dopo il 1902 molte ricerche attinenti alla mia tesi furono eseguite, sia all'estero che in Italia; e fra queste ultime, notevoli quelle fatte dal dottor R. Perotti sulla solubilizzazione biochimica dei fosfati del terreno. Incoraggiato dall'esito di codeste ricerche, volli, lo scorso anno, illustrare meglio il mio concetto in una Memoria che fu presentata alla R. Accademia dei Lincei, dal Socio professore Pirotta, direttore dell'Istituto botanico di Roma, ed esaminata da apposita Commissione, composta dei Soci professori Cuboni e Menozzi. Questa Commissione, mentre mi concedeva l'alto onore di proporre l'accoglimento della Memoria, osservava che nel lavoro mancava la parte sperimentale; ond' io credetti opportuno di fare omaggio all' indicato giudizio, istituendo una serie di ricerche, al fine di dimostrare sperimentalmente l'azione dei concimi minerali sull'attività dei microrganismi del terreno.

Con questa prima Nota dò conto delle esperienze riguardanti l'azione dei concimi minerali sull'attività dei *Saccaromiceti*, che sono, come è noto, tanto diffusi nel terreno, *dove possono compiere azioni solutive di notevole importanza, specialmente quando si sotterrano erbe verdi* (Sovesci).

Numerosi lavori analitici e sintetici esistono intorno ai saccaromiceti, e specialmente sul *Saccharomyces cerevisiae*. Però il Duclaux, nel suo *Traité de microbiologie*, Paris 1900, dopo di avere citati ed in parte descritti i lavori di Payen, Béchamp, Liebig, di Adolfo Mayer (1869 e 1871), di Salamon e Mathew (1884), di Elion (1893), di Kusserow (1887), e di Stern (1898) così scrive: « Da ciò che precede si vede che noi sappiamo ancora troppo

poco sulla nutrizione minerale del lievito di birra ». Ed il Lafar, *Handbuch der Technischen Mycologie*, vol. IV, 1905-1907, pag. 88, asserisce che le esperienze sulla nutrizione minerale dei fermenti alcoolici vanno ripetute. Ed egli non ha torto, quando si pensi che il citato Kusserow (Bremerei Zeitung 1897) afferma che una aggiunta di fosfato potassico al mosto di birra non ha efficacia notevole sulla fermentazione alcoolica; ed aggiunge *che nelle prove fatte non si potè giudicare isolatamente l'efficacia della potassa perchè fu sperimentata insieme con l'acido fosforico* (Lafar cit., vol. IV, pag. 86).

Infine ricordiamo, per ragioni di affinità, gl'importanti lavori di Harden e Young (1905-1909), di Jwanoff (1907-1908) e di Lebedew (1909-1910) [1] i quali mirano a spiegare come si esplica l'azione dei fosfati solubili sulla fermentazione alcoolica ottenuta con la sola zimasi, in ambiente sterile. Ma è uopo notare che l'azione del lievito vivente è circa 40 volte maggiore di quella d'una quantità *equivalente* di succo di lievito [2], e quindi, ai fini del mio lavoro, mi interessava studiare il comportamento del lievito vivente.

Or le ricerche fatte riguardano la batteriologia generale e non la batteriologia agraria, mentre a me premeva di constatare il comportamento dei concimi minerali in uso oggidì rispetto all'azione, già parzialmente sperimentata, del fosfato bipotassico. Inoltre, a me premeva di trovare un metodo di sperimentazione che mi permettesse di seguire, passo passo, l'azione delle sostanze minerali, al qual fine non si prestano i metodi adoperati da tutti gli altri sperimentatori, cioè la determinazione per pesata della CO_2 sviluppata (metodo Meissl), ovvero la determinazione dell'alcool prodotto e del residuo zuccherino. Invece il metodo da me adottato, cioè la fermentazione entro tubi capovolti sopra bagni a mercurio, come indica l'unita figura, riesce perfettamente allo scopo e dà la percezione oculare diretta dell'azione che le sostanze minerali producono con la loro presenza o con la loro assenza sull'attività microrganica. Anzi credo di poter consigliare a scopo dimostrativo il detto metodo di sperimentazione alle Scuole di chimica e batteriologia agraria, perchè con esperienze così condotte si dà modo ai discendenti di acquistare il convincimento della sensibilità estremamente grande dei microbi alle minime variazioni dell'ambiente chimico culturale.

Nelle mie esperienze feci uso di lievito di birra, quale si adopera nella panificazione, perchè qualunque specie del genere *Saccharomyces* era buona ai fini delle mie ricerche; e tenuto conto del fatto, che parecchie sono le specie di lieviti che si trovano promiscuamente presenti nel terreno.

Prima di dare un esatto resoconto delle esperienze da me seguite, credo opportuno di far notare, che, nelle ricerche intese a stabilire se una data sostanza sia o pur no indispensabile per la vita dei lieviti alcoolici, ha una

(1) Vedasi la bibliografia in Arthur Harden: *La fermentation alcoolique*, Paris, A. Hermann et fils, 1913.

(2) V. Harden, op. cit., pag. 34.

grande importanza la quantità di lievito stesso che si adopera; giacchè, se il lievito è in forte quantità, si viene a portare nel liquido di coltura col lievito stesso una dose sensibile di quei materiali sui quali si vuole sperimentare; ed allora non risultano notevoli le differenze che presentano sul tubo di controllo gli altri tubi. Se la quantità di lievito è eccessivamente piccola, si hanno fermentazioni deboli e di lunga durata. Pertanto, con una numerosa serie di esperienze preliminari, delle quali non è qui necessario di dar conto, ho determinata la quantità più opportuna di lievito da impiegare; come pure ho stabilito il titolo zuccherino più rispondente allo scopo ed alla capacità dei tubi disponibili. Si nota infine, che i lieviti adoperati nelle successive esperienze non erano, nè potevano essere, egualmente freschi; epperò i risultati delle successive prove non sono fra di loro in maniera assoluta confrontabili, ma sempre abbastanza chiari e netti per poterne dedurre delle conclusioni di valore indubbio.

Esperienza I. Ho preparata e poscia fatta bollire una soluzione nutritiva priva di acide fosforico e di potassa, come è qui indicata:

Acqua distillata		cc.	1000,000
Glucosio chimicamente	puro	gr.	40,000
Acido tartarico	id.	»	6,000
Cloruro di calcio	id.	»	0,100
Solfato ammonico	id.	»	10,000
Solfato di magnesio	id.	»	0,300
Cloruro di sodio	id.	»	0,100
Cloruro ferrico	id.	»	0,010

In 100 cc. della detta soluzione ho emulsionato otto decigrammi di lievito di birra, e poscia ho allestiti tre tubi a mercurio di circa cc. 60 di capacità, ma graduati fino a cc. 50.

Nel tubo N. I ho posti: cc. 5 della detta soluzione nutritiva più mg. 6 di fosfato bipotassico (uno per mille del complessivo liquido colturale), più cc. 1 di emulsione di lievito, preparata come sopra è stato detto.

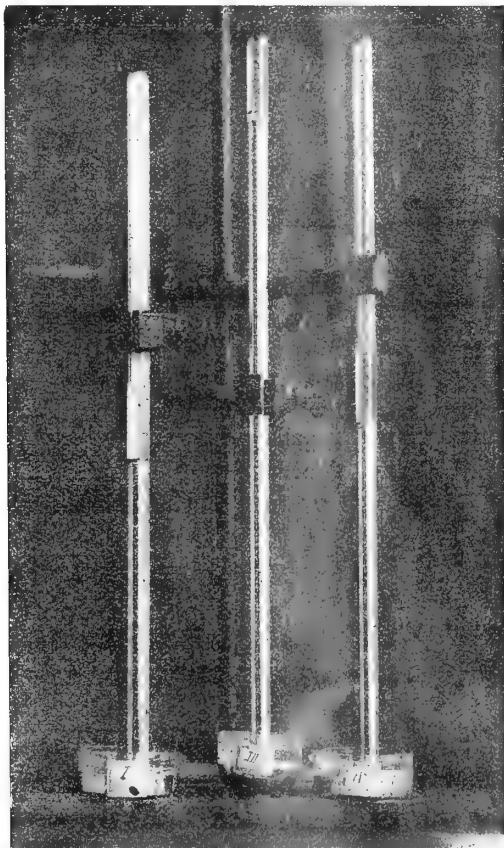
Nel n. II ho posti: cc. 5 della soluzione c. s. più mg. 6 di solfato di potassio, più mg. 4,4 di fosfato monocalcico asciutto (quantità equimolecolari del fosfato bipotassico del tubo 1), più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. III (controllo) ho posto: cm. 5 della soluzione come sopra, più cc. 1 della emulsione di lievito.

Collocati i tre tubi nel termostato a 28° C.

Ecco i risultati ottenuti:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.		
	I Con fosfato bipotassico	II Con fosfato monocalcico e solfato potassico	III Controllo
18 febbraio 1914, ore 18	—	—	—
19 » » » 11	7,2	6,2	0,3
20 » » » 11	17,6	16,1	0,5
21 » » » 11	22,8	21,8	0,8
22 » » » 11	26,9	25,8	1,2
23 » » » 11	30,5	29,6	1,8
25 » » » 11	34,0	33,0	2,6
26 » » » 11	35,6	34,6	3,0
27 » » » 10	36,8	35,9	3,4

Alle ore 10 del 27 febbraio furono ritirati i tubi dal termostato per eseguire altra prova. I tubi, di cui alla precedente esperienza, vennero fotografati il giorno 22 e la fotografia è riprodotta dalla seguente figura:

Esperienza II. Ho allestiti i tre seguenti tubi:

Nel tubo n. I ho posti: cc. 5 della solita soluzione più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 4,4 di fosfato monocalcico perfettamente asciutto, più cc. 1 di emulsione di lievito preparata come nella prima prova.

Nel n. II, cc. 5 di soluzione più mg. 4,4 di fosfato monocalcico, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 5,4 di fosfato tricalcico, più cc. 1 di emulsione di lievito. Messi i tre tubi in termostato il 27 febbraio, alle ore 12. Eccone i risultati:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi, in cc.		
	I Fosfato monocalcico e solfato potassico	II Fosfato monocalcico	III Fosfato tricalcico e solfato potassico
27 febbraio, ore 12 . . .	—	—	—
» » » 17 . . .	0,4	0,3	0,4
28 » » 11 . . .	10,2	0,5	10,0
1 marzo » 11 . . .	22,1	2,1	18,7
2 » » 11 . . .	27,4	3,1	23,1
3 » » 11 . . .	31,9	4,1	27,3
4 » » 11 . . .	35.1	4,9	30,1
5 » » 11 . . .	37,5	5,5	32,0
6 » » 10 . . .	39,3	5,9	34,0

Esperienza III. Ho allestiti con la solita soluzione i tre seguenti tubi:

Nel n. I, ho posti: cc. 5 della soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più cc. 1 di emulsione di lievito c. s.

Nel n. II, ho posti: cc. 5 di soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 16 di scorie Thomas al 18 % di $P_2 O_5$, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. III, ho posti: cc. 5 di soluzione, più mg. 6 di solfato potassico, più mg. 5,3 di fosfato bicalcico, più cc. 1 di lievito.

Collocati i tre tubi in termostato a 28° il dì 6 marzo alle ore 12. Ecco i risultati della prova:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.		
	I Solfato potassico	II Solfato potassico e scorie Th.	III Solfato di potassio e fosfato bicalcico
6 marzo, ore 12	—	—	—
7 » » 11	1,5	33,5	30,0
7 » » 18	2,1	40,5	35,9
8 » » 11	4,3	47,2	41,7
9 » » 11	7,1	49,5	46,0
10 » » 11	8,7	50,2	48,2
11 » » 11	10,2	—	—
12 » » 11	11,6	—	—
13 » » 11	12,2	—	—

Il giorno 10 alle ore 11, ritirati dal termostato i tubi 2 e 3 perchè si era esaurita la graduazione; il 13 alle ore 11 ritirato anche il tubo 1 per eseguire la successiva prova.

Esperienza IV. Ho preparati, nel modo consueto, tre tubi:

Nel n. I, ho posti: cc. 5 della soluzione solita più mg. 6 di fosfato bipotassico, più cc. 1 di emulsione di lievito c. s.

Nel n. II, cc. 5 di soluzione c. s. più mg. 24 di perfosfato minerale al 15 % di $P_2 O_5$, più mg. 6 di solfato potassico, più cc. 1 di lievito c. s.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione c. s. più mg. 24 di perfosfato minerale, più mg. 24 di leucite polverizzata di Civita-Castellana, contenente il 13 % di K_2O.

Posti i tre tubi in termostato a 28°. Risultati:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.		
	I Fosfato bipotassico	II Perfosfato e solfato potassico	III Perfosfato e leucite
13 marzo, ore 12	—	—	—
14 » » 11	21,5	7,4	6,7
15 » » 11	33,1	8,8	7,9
16 » » 11	38,4	8,8	7,9
17 » » 9	43,5	9,2	8,2

Ho ritirati i tubi dal termostato alle ore 9 del 17 marzo per eseguire la quinta esperienza.

Esperienza V. Ho allestiti i tre seguenti tubi.

Nel n. I, ho posti: cc. 5 di soluzione più mg. 5,4 di fosfato neutro di calcio, più mg. 24 di leucite macinata c. s., più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. II, ho posti: cc. 5 di soluzione più mg. 12 di perfosfato al 15 % di P_2O_5, più mg. 6 di solfato potassico, più 1 cc. di emulsione di lievito c. s.

Nel n. III, cc. 5 di soluzione più mg. 24 di perfosfato come sopra, più mg. 15 di carbonato di calcio in polvere, più mg. 6 di solfato potassico, più 1 cc. di lievito c. s. Il liquido di questo tubo si è fortemente agitato fino a scomparsa di sviluppo gassoso.

Posti i tre tubi in termostato a 28° il 17 marzo alle ore 12. Eccone i risultati:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.		
	I Fosfato tricalcico e leucite	II Perfosfato e solfato potassico	III Pe fosfato carbonato di caloio e solfato potassico
17 marzo, ore 12	—	—	—
17 » » 18	0,1	0,1	2,2
18 » » 11	0,3	0,2	19,8
19 » » 11	0,4	0,3	32,8
20 » » 11	0,4	0,3	38,8
21 » » 11	0,4	0,3	42,6
22 » » 11	0,4	0,3	44,5
23 » » 11	0,4	0,3	46,9
24 » » 11	0,4	0,3	48,4

Esperienza VI. Preparati due tubi:

Nel n. I, ho posti: cc. 5 della solita soluzione più mg. 16 di scorie c. s., più mg. 5 di cloruro potassico, più cc. 1 di emulsione di lievito.

Nel n. II, ho posti: cc. 5 di soluzione c. s., più scorie mg. 16, più solfato potassico mg. 6. più cc. 1 di emulsione di lievito.

Collocati i due tubi in termostato a 28° il 24 marzo, alle ore 11. Ecco i risultati ottenuti:

	Volumi non corretti della CO_2 sviluppatasi in cc.	
	I Scorie e cloruro di potassio	II Scorie e solfato di potassio
24 marzo, ore 11	—	—
24 » » 18	6,2	6,8
25 » » 11	31,0	32,0
25 » » 18	35,2	36,2
26 » » 18	46,0	47,0
27 » » 10	50,5	51,0

Conclusioni:

1°) Se nell'ambiente chimico culturale dei fermenti alcoolici manca l'acido fosforico (tubo 1°, esp. III), ovvero la potassa (tubo 2, esp. II) o l'anione ed il catione insieme (tubo 3, esp. I), è nulla l'attività dei fermenti stessi.

2°) Il fosfato monocalcico, componente primo dei perfosfati, ed i fosfati bicalcico e tricalcico, componenti accessori dei detti concimi, agendo insieme col solfato potassico, esplicano un'azione quasi identica a quella spiegata dal fosfato bipotassico (tubo 2 dell'esp. I; tubi 1 e 3 dell'esp. II e 3 dell'esp. III).

3°) Le scorie del Thomas sono un alimento fosfatico utilissimo per il lievito alcoolico (tubo 2, esp. III; e tubi 1 e 2 dell'esp. IV).

4°) I perfosfati, forse a causa dell'acido solforico libero che contengono, impediscono lo sviluppo della fermentazione (tubo 2, esp. IV) e tubo 2, esp. V). Invece essi riescono un utilissimo alimento fosfatico quando agiscono in presenza del carbonato di calcio (tubo 3, esp. V). Quindi, nei riguardi dei lieviti alcoolici, non è da raccomandarsi l'uso dei perfosfati nei terreni privi di calcare e di altri carbonati.

5°) Il cloruro potassico esercita un'azione analoga a quella del solfato potassico (tubo 1, esp. VI).

6°) La leucite macinata di Civita-Castellana è inerte per il lievito alcoolico in presenza di fosfato tricacico (tubo 1, esp. V).

7°) Il fermento alcoolico potrebbe costituire un prezioso mezzo diagnostico per determinare l'assimilabilità comparativa dei materiali insolubili dei concimi e dei terreni.

8°) Il metodo di sperimentazione da me proposto per la fermentazione alcoolica potrà servire per ulteriori ricerche intese a determinare le condizioni tutte dell'ambiente chimico e l'azione di quantità crescenti dei diversi

materiali. Le quantità di CO_2 che si sviluppano, si possono facilmente ridurre a zero ed alla pressione normale.

***

Pervenuto alla fine della presente Nota, compio il dovere di ringraziare vivamente il chiarissimo professore Giuseppe Cuboni, il quale con la sua consueta e larga ospitalità mi ha permesso di eseguire le presenti ricerche presso la R. Stazione di Patalogia vegetale da lui degnamente diretta.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta del secreto prostatico del cane.* Nota di G. AMANTEA, presentata dal Socio LUCIANI.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* — III. *Proprietà chimico-fisiche dei liquidi interni delle rane escul. estive tenute in acqua distillata ed in soluzioni Ringer ipertoniche.* — IV. *Il tempo entro il quale la regolazione osmotica avviene.* Note di B. BRUNACCI, presentate dal Socio L. LUCIANI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

SERRA. *Rocce vulcaniche della Sardegna centro-occidentale.* Pres. dal Socio STRUEVER.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Vengono approvate dalla Classe per l'inserzione negli Atti accademici, salvo le consuete riserve del Consiglio di Amministrazione, le seguenti Memorie, in seguito a parere favorevole delle sottonotate Commissioni:

1. BLASERNA, relatore, e VOLTERRA. Sulla Memoria del dott. G. GIANFRANCESCHI: *Per lo studio del Corista campione dell'Ufficio centrale italiano.*

2. Mattirolo, rel., e Pirotta. Sulla Memoria del dott. R. Perotti: *Studî di biologia sopra l'Agro romano in rapporto al suo bonificamento agrario.*

3. Grassi, rel., e Pirotta. Sulla Memoria del prof. C. Acqua: *Osservazioni ed esperienze sul filugello.*

4. Grassi, rel., e Todaro. Sulla Memoria del dott. L. Sanzo: *Stadî larvali di Bathophilus nigerrimus* Gigl.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio straniero prof. Edoardo Suess, avvenuta il 26 aprile 1914; apparteneva il defunto Socio all'Accademia per la *Geologia* e *Paleontologia*, sino dal 2 dicembre 1883.

Il Socio B. Grassi legge la seguente Commemorazione del Corrispondente marchese Giacomo Doria.

Quando il nostro Presidente diede il triste annuncio della scomparsa di Giacomo Doria, io non ho riflettuto, e ne sono dolente, che il Millosevich ed il Della Vedova, a lui legati da lunga consuetudine di lavoro e di amicizia in seno alla Società geografica, avrebbero potuto meglio di me commemorarlo; e ho creduto mio dovere offrirmi spontaneamente a questo pietoso ufficio, considerando che il Doria figurava tra i Socî della sezione alla quale ho l'onore di appartenere. Assolverò oggi, meglio che potrò, il còmpito che mi sono assunto, domandando scusa ai due colleghi se non sarà completa la mia esposizione nella parte riflettente la Società geografica.

Le pubblicazioni scientifiche del Doria, che riguardano tutte la zoologia descrittiva e corologica, benchè severamente condotte, son poche, brevi e di non singolare valore. Non è perciò il caso di farne menzione speciale; ricorderò soltanto la sua monografia sui pipistrelli della Liguria, modesta, ma modello del genere. Non è dunque come scrittore di cose zoologiche che il Doria richiama la considerazione dei posteri. Egli, del resto, sembrava sentisse una profonda ritrosìa a pubblicare le proprie ricerche.

Altra è la via che l'ha condotto a rendere insigni servigî alla storia naturale e in special modo alla zoologia.

Quando il Doria ha cominciato le sue raccolte zoologiche, i Musei erano ancora tenuti in molto onore anche da parte di coloro che non erano semplici cultori della sistematica; e anzi nel nostro Paese avevano un valoroso

protettore nel più illustre zoologo italiano allora vivente, il De Filippi, di venerata memoria.

Purtroppo però tarpava le ali a qualunque azione in favore di essi la penuria dei mezzi di cui disponeva il nostro Paese, appena risorto e pressato da moltissimi bisogni impellenti.

Se non ostante ciò, già nel 1867, quando aveva appena 27 anni, Giacomo Doria è riuscito ad ottenere che Genova fondasse il Museo civico di storia naturale, ciò si deve all'aver egli offerto in dono tutte le collezioni da lui radunate nella propria casa, e la propria biblioteca, le une e l'altra già ricche, e all'aver aggiunto al dono la promessa di ordinarle, di disporle scientificamente, di accrescerle e di conservarle.

Negli anni successivi la nuova zoologia, che allora si denominava scientifica, cominciò a trascurare quella descrittiva; i Musei furono paragonati a magazzini; chi di essi si occupava, veniva considerato cultore di una scienza di ordine inferiore. Che cosa era accaduto? Questo: che essendo difficile seguire la bandiera del De Filippi sulla quale era scritto *unum facere et alterum non omittere*, veniva abbandonato ciò che sembrava di minor conto, la pura sistematica che appariva di bronzo di fronte alla morfologia che appariva d'oro. Allora rifulse la virtù del Doria, che non si lasciò scuotere nè scoraggiare dagli apprezzamenti poco favorevoli, e continuò imperterrito nella sua opera, non senza di tanto in tanto rivolgere una parola di risposta o anche di rimbrotto ai suoi avversarî. Così nel 1884 scriveva di essere fermamente persuaso che « la zoologia descrittiva rimane quale fu sempre, il fondamento necessario ed inalterabile di ogni disciplina biologica, e che i progressi e il nuovo indirizzo della filosofia zoologica non dispensano punto i naturalisti, come taluno mostra di credere, dall'obbligo di conoscere e definire correttamente le forme ».

Alcuni anni dopo, nel 1888, al sopra citato lavoro sui « Chirotteri trovati finora in Liguria » faceva precedere un'introduzione nella quale metteva un'altra volta in luce l'importanza dei Musei e della zoologia sistematica, con considerazioni che credo utile qui riportare almeno in parte, perchè valgono anche nell'ora che corre, quantunque dettate da oltre 25 anni.

« Ad onta di tutte le teorie, colle quali si pretenderebbe dimostrare l'inutilità dei Musei e le declamazioni più o meno lepide dei così detti innovatori della scienza contro gli stabilimenti di simil genere, nessuno può negare che ora più che mai è necessario di radunare ricche serie di quegli animali che si possono conservare in modo riconoscibile, per formarne in certo modo degli Archivî zoologici, i quali in gran parte serviranno, con l'andare degli anni e coll'aiuto degli appunti che si vanno radunando sulla variabilità delle forme e sulla loro area di diffusione, a darci un'idea più esatta della origine e della distribuzione delle specie, nonchè delle modificazioni cui esse vanno soggette. I Musei zoologici sono un'assoluta neces-

sità scientifica, come lo furono e lo saranno sempre gli erbarii di piante secche. Senza il classico erbario di Kew, non avremmo le grandi flore tropicali che si pubblicano in Inghilterra; e senza di essi, la Francia, l'Olanda e la Germania non avrebbero dato alla luce tanti pregevoli lavori botanici ».

« È doloroso a dirsi: ma l'indirizzo degli studî zoologici in Italia ci ha ridotto al punto che, meno rarissime eccezioni, non abbiamo più nè biblioteche da consultare, nè materiali da confronto, per cui fra di noi lo studio delle collezioni diventa sempre più difficile. Infatti, se il nostro stabilimento non avesse comunicato all'estero buona parte del suo materiale, questo sarebbe rimasto indeterminato per metà, a disdoro di chi con tanta fatica lo aveva radunato ».

Dopo di aver citato come esempî meravigliosi i Musei delle altre nazioni, il Doria soggiungeva: « Presso di noi, invece, gente dalla fervida immaginazione, si guarda con mal dissimulata compassione, quasi con disprezzo, chi consacra la propria vita all'ordinamento e allo studio di raccolte sistematiche ».....

« Noi, non solo non aumentiamo le nostre collezioni, ma perdiamo sovente per mancanza di cura quelle che radunarono i nostri antecessori: e ciò spesso in modo brutale così che stringe il cuore. Allorchè ultimamente la più grande collezione ornitologica privata che si conosca, e che è un vero monumento italiano, fu offerta in dono come base di un Museo nazionale, non si trovò il posto di allogarla, e la splendida occasione fu perduta per sempre!...

« Da noi con tanti musei e museini, non siamo in grado di studiare anche convenientemente piccolissime collezioni esotiche ».

Nel 1893 il Doria aggiungeva che « se gli studî faunistici, tassonomici e corologici non furono del tutto dimenticati in Italia, ciò devesi in parte (*egli avrebbe potuto aggiungere « in gran parte » !*) all'influenza del Museo civico di Genova ».

Intanto, la suppellettile scientifica del Museo civico di Genova era diventata famosa in tutto il mondo, e già nel 1887 il Doria, alieno da qualunque vanterìa, poteva scrivere queste parole: « Io ho potuto in breve radunare un materiale che nessun Museo italiano si può vantare di possedere e che per alcune parti supera le collezioni più ricche d'Europa ».

Tornava sull'argomento nel 1896, coi seguenti periodi: « Il Museo civico di Genova possiede collezioni di tutti i paesi: ma per quanto riguarda la fauna dell'Arcipelago Malese e della Papuasia, è riconosciuto come uno dei più importanti Istituti del mondo. Le sue collezioni vengono affidate per lo studio ai più valenti specialisti, e perciò sono esattamente nominate ed ordinate. Le sue ricchezze provengono da esplorazioni che per la più gran parte furono compiute da persone dotate di grande attività e di speciale attitudine al raccogliere, e sovente in paesi ancora del tutto ignoti o poco

conosciuti. Da ciò la spettacolosa quantità di specie nuove ed il numero, ugualmente immenso, di *tipi*; fortuna delle più ambite per un Museo.

« Questi *tipi*, di grande aiuto per lo studio della sistematica, vengono frequentemente consultati, e naturalisti di tutti i paesi (e fra questi non pochi appartengono ai principali Musei d'Europa) accorrono al Museo civico, per farne argomento di studio ».

* * *

Tanta altezza aveva toccato il Museo di Genova, perchè il marchese Doria, andando anche molto al di là della promessa fatta all'atto della fondazione, lo aveva materialmente sostenuto con munificenza regale e messo in valore colla pubblicazione degli Annali. Questi annali del Museo civico di Genova furono stampati fino al 34° volume, ossia dal 1870 al 1893, a spese del Doria che non badò a sacrifizii perchè fossero nitidamente impressi e ricchi di acconcie illustrazioni, elemento che, come egli scrive, è un efficace corredo di ogni contributo biologico e specialmente zoologico.

A dimostrare la larghezza di vedute del Doria ricorderò che fino ad allora (1893) gli Annali erano stati per tutti gli zoologi, sia italiani sia stranieri, un campo nel quale potevano liberamente produrre i frutti della loro attività scientifica, come fanno fede le Memorie in essi pubblicate da Wiedersheim, da Weissmann, da Gasco, ecc. S'intende che la parte principalissima era dedicata allo studio dei preziosi materiali raccolti nella Malesia, nella Papuasia e nell'Africa, dalle spedizioni scientifiche di Beccari, di L. M. D'Albertis, di Doria, di Antinori, di E. D'Albertis ed altri, spedizioni in gran parte ideate e preparate fra le pareti del Museo civico. « Non trascurammo », soggiungeva il Doria, « un altro intento che pur ci stava molto a cuore: vale a dire lo studio della fauna italica e più specialmente della produzione locale, che fu da noi costantemente raccomandata agli amici nostri ». Ciò naturalmente portava anche a dare grande valore a tutta la fauna mediterranea, di cui la nostra fa indissolubilmente parte.

Tanta operosità, guidata da così nobili intenti, avrebbe meritato di essere coronata da un successo trionfale, e avrebbe dovuto rendere agevole al Doria il proseguimento della sua opera. Invece, nel 1896, quando il Museo contava ormai trenta anni di vita feconda, e gli splendidi Annali erano giunti al 38° volume, il Doria, lungi dal trovarsi su quel piedistallo a cui avrebbe avuto diritto, doveva ancora lottare e con difficoltà sempre più gravi. I locali del Museo erano diventati del tutto insufficienti, e « l'umidità lo aveva invaso in un modo straordinario ». « Il Museo civico di Genova — scrivevano al Municipio, Doria e il suo impareggiabile collaboratore prof. Gestro, invocando una nuova sede — più non è in grado di ricevere nuove collezioni e, quel che è peggio, non più in condizioni di ordinare convenientemente e di conservare quelle che già possiede. « Le preparazioni tassider-

miche », uso sempre le loro parole, « sono spesso rivestite da uno strato di muffa, e vanno deteriorando in modo sensibilissimo ». Più tardi, cioè nel 1901, dopo di aver dato alla luce il 40° volume degli Annali. dovevano sospenderne la pubblicazione. Soltanto nel 1904 potevano riprenderla, perchè (sono le loro parole) da qualche tempo s'era manifestata una corrente favorevole all'Istituto. La nuova sede del Museo però potè essere inaugurata soltanto nel 1912, un anno prima della morte del Doria, già da lunghi anni sofferente.

Alla vigilia dell'inaugurazione, dal letto egli scriveva al nostro collega Capellini che la salute lo aveva abbandonato sul più bello; che avrebbe veduto soltanto in sogno il nuovo Museo; ed aggiuugeva:

« È quasi mezzo secolo di lavoro e mezzo milione di capitale che ho tolto alla mia famiglia! Ho fatto bene!!! ». Convien dire — aggiunge il professore Issel, più che amico, quasi fratello — che egli aveva speso viaggiando gran parte delle sue sostanze, e si era impoverito coll'acquisto di materiale scientifico a vantaggio del Museo civico e colla pubblicazione degli Annali di questo Istituto.

***

Genova, riconoscente, ha deliberato di intolare il Museo civico al Doria, che ne fu il creatore e che vi aleggia ancora in ispirito.

Lo zoologo che visita questo Museo, ha l'impressione che Giacomo Doria sarebbe contento della grandiosa nuova sede delle collezioni, ma non sarebbe soddisfatto e richiederebbe dalla ricca città di Genova altri poderosi aiuti. Purtroppo (è d'uopo esser sinceri) in questi ultimi quindici anni il Museo civico di Genova non potè progredire nella stessa misura dei maggiori Musei d'Europa; essi ormai distanziano quello di Genova, che è, pur sempre, grandioso. È vero che in Italia qualunque specialista, il quale voglia aver la certezza che la sua collezione sarà ben conservata, non può far di meglio che lasciarla al Museo di Genova: e perciò, legati e doni di raccolte preziose pervengono (lo ha giustamente osservato il sindaco di Genova) e perverranno sempre a questo Istituto da diverse parti d'Italia; ma questo non basta. Occorre far molto di più, affinchè il monumento, che Genova vuole dedicato al suo grande figlio, sia veramente come questi lo sognava. Occorrono mezzi molto larghi per aumentare sempre più le raccolte e un personale numeroso, composto di esperti specialisti e di monografi da aggiungere a quegli attuali, perchè sia possibile di illustrare ed accrescere altri gruppi, oltre quelli entomologi. Queste erano le aspirazioni del Doria: i suoi mani riposeranno in pace, soltanto quando sarà assicurato l'esaudimento dei suoi voti.

Ma al Doria da molti anni sorrideva un ideale più vasto: egli vagheggiava che anche in Italia sorgesse quel Museo nazionale di storia naturale che ormai non manca neppure alle nazioni minori.

La collezione dei vertebrati italiani del Museo di Firenze — egli scriveva nel 1887 — è un esempio che prova come anche da noi si possa fare e bene: come collezione regionale, non credo che abbia l'uguale. È un monumento che il Giglioli ha innalzato alla fauna italiana e di cui il Paese gli deve esser grato... Speriamo che lo Stato, apprezzando l'esempio dato dal prof. Giglioli per la collezione italiana, curerà la fondazione di un Museo nazionale, ove sia ordinata una collezione generale. « Soprattutto riflettano (continua il Doria — e la riflessione ancor oggi dopo un quarto di secolo è opportuna —) coloro che governano la pubblica istruzione, che il personale di un Museo veramente nazionale, ove si concentrano tutte le forze del Paese, deve esser libero da qualunque impegno didattico; nessuna ora di lavoro deve esser distolta dall'ordinamento delle collezioni; nessuno dei naturalisti addetti ad un Museo nel vero senso della parola, deve pensare a farsi titoli per arrivare alla sospirata cattedra. Si devono scegliere, per accudire ai singoli rami, uomini che abbiano dato prova di essere appassionati cultori della scienza, di esser in certo modo pronti a sacrificarsi per essa. Ad essi si faccia una posizione morale e materiale che soddisfaccia ai loro bisogni e li renda tranquilli per l'avvenire... Nelle Università si abbiano le sole collezioni necessarie per l'insegnamento... Le doti degli stabilimenti superiori si spendano ad organizzare buoni laboratorî, provveduti di tutto l'occorrente affinchè i giovani si possano esercitare in tutti quegli studî che formano la base della zoologia... »: sagge proposte che Berlino ha realizzato fondando il Museo zoologico indipendente dalla Università; sapienti consigli, ai quali l'Italia invece è stata sorda.

Siccome, purtroppo, per Museo molti intendono una collezione di animali impagliati, perchè non nascano equivoci riporterò la definizione datane dal Doria. « Intendiamo per Musei collezioni in cui l'ostensione sia la minima parte, la parte condannata a perdersi in un tempo limitato e che si può sempre rinnovare; in essi, la parte principale deve essere una collezione di studio numerosissima, illimitata per numero di esemplari raccolti in luoghi diversi, esattamente forniti di indicazioni di provenienza, questi disposti in modo che occupino il minor spazio possibile e siano riparati completamente dalla luce, o meglio conservati in una quasi completa oscurità ».

Ho voluto fermarmi tanto a lungo su questo argomento per due ragioni: prima, perchè ritengo di rendere così il miglior omaggio alla memoria del Doria; in secondo luogo, perchè non v'ha dubbio che il Doria era bene ispirato. Oggigiorno omai tutti sono costretti a riconoscere che se è vero che la zoologia scientifica sta molto al di sopra della zoologia descrittiva, non è meno vero che anche questa è necessaria, perchè, come si esprimeva Linneo, essa è *filum ariadneum, sine quo chaos*. Se la zoologia scientifica si può paragonare al piano nobile del palazzo delle scienze, quella descrittiva viene ad essere il piano terreno, sul quale sorge quello nobile. Certamente, il cer-

vello è un organo d'ordine superiore allo stomaco; ma, per il funzionamento di quello, questo non diventa perciò meno necessario: così è della zoologia descrittiva rispetto a quella scientifica. Si aggiunga che il limite tra l'una e l'altra non è nettamente definito: tanto è vero che sarebbe assurdo di voler negare ai volumi degli Annali del Museo civico di Genova valore prettamente scientifico, inquantochè, per citare una sola ragione, nella zoologia descrittiva è compenetrata la zoocorologia, ramo importantissimo dal punto di vista scientifico.

***

Come ho accennato, il museo di Genova in un tempo breve e con mezzi scarsi si è potuto arricchire di una suppellettile immensa e preziosa, perchè il Doria era nato collezionista e aveva fatto una scuola di naturalisti esploratori.

Egli, che aveva un amore infinito per le cose naturali, è stato indefesso, accurato ed abile raccoglitore di piante al principio e alla fine della sua vita; di ogni sorta di animali, ma soprattutto di insetti, per il mezzo secolo in cui potè spiegare la sua attività.

La passione delle raccolte diede a lui, di fibra poco resistente e gracile, l'animo di affrontare i disagî e i pericoli di lunghi viaggi in regioni lontane e spesso malsane.

Il primo suo viaggio data dal 1862, e si compiè in Persia, dove andò come membro della Missione inviata allo scià dal Governo italiano, insieme con due altri naturalisti, De Filippi, di lui molto più anziano, e Lessona. Ad un certo momento si separò dai colleghi, e da solo compì lunghe peregrinazioni.

Il secondo suo viaggio data dal 1865 ed è diretto ad un lembo del paradiso terrestre dei naturalisti, Borneo, l'isola degli ourang-outan, allora tanto poco nota. Gli era compagno Beccari, sommo botanico, dal quale purtroppo dovette presto distaccarsi per ragioni di salute. Più tardi il Doria esplorò le coste del mar Rosso (1879) e la Tunisia (1881-82); quando gli anni gli pesarono, si rivolse a lidi più vicini, le isolette dell'Arcipelago Toscano. Da tutti questi viaggi il Doria ha riportato importanti collezioni zoologiche. Ma ciò che egli ha saputo far raccogliere agli altri è stato molto più prezioso e abbondante. Il Doria sapeva ispirare il gusto per i viaggi, l'amore per le esplorazioni: insegnava agli esploratori i modi di far le raccolte; indicava loro ciò che più doveva interessarli; li spingeva in regioni dove ancora molto restava da scoprire, e li sorreggeva in queste esplorazioni validissimamente dal lato morale e dal lato materiale.

Se in molte esplorazioni fatte dagli italiani nell'ultimo cinquantennio vennero curate con particolare sollecitudine le raccolte zoologiche, ciò si deve al Doria, e ne fa fede l'immensa suppellettile scientifica accumulata nel Museo civico di Genova. Ricorderò anzitutto il Beccari a Borneo, nelle

isole della Sonda, nelle Molucche e nella Nuova Guinea. Il Beccari, specializzato nella botanica, fu dal Doria innamorato anche delle collezioni zoologiche, e raccolse molti animali interessantissimi, del tutto nuovi.

L. M. D'Albertis era un ardito cacciatore: Doria seppe trasformarlo in un naturalista esploratore. Anche egli si rese famoso nei suoi viaggi in Papuasia: raggiunse i monti Arfak, dove per la prima volta occhi europei poterono contemplare le meravigliose produzioni di quella natura inesauribile, prime fra tutte le svariate tribù degli uccelli di paradiso. Solo i viaggiatori italiani — scriveva il Doria nel 1878 — hanno avuto fin qui la fortuna di cacciare le più rare e le più belle specie di uccelli di paradiso nelle foreste native! Una certa forma, scoperta dal D'Albertis, era così singolare, che per un momento fu creduta un artefatto, composto di pelli di differenti specie di paradisee. I risultati zoologici delle esplorazioni di Beccari e di D'Albertis sono stati meravigliosi. Dalla Papuasia erano già giunti nel 1878, al Museo di Genova, oltre ad 800 esemplari di mammiferi, 10000 rettili, 3000 uccelli, 2000 pesci, 80000 insetti e un considerevole numero di altri invertebrati.

Altre collezioni, altrettanto meravigliose, pervennero al Museo di Genova più tardi raccolte da Beccari a Sumatra (1878), da Fea in Birmania (1885-88), da Modigliani a Nias (1886), da Loria nella nuova Guinea (1889-97), da Modigliani nell'interno di Sumatra e ad Engano (1890-91) e alle isole Mentavei (1894). In quasi tutti questi viaggi il Doria non fu semplice mecenate, ma la suprema mente direttrice e animatrice.

Che la Malesia e la Papuasia siano state la principale mira di Doria per tanti anni, ogni zoologo e ogni botanico lo comprendono. Ma quando sorse l'occasione, il Doria diresse i suoi collaboratori anche ad altri lidi: così fece unire alla spedizione Bove il Vinciguerra, che riportò al Museo di Genova importanti vertebrati dall'Isola degli Stati e dallo stretto di Magellano.

Anche verso l'Africa il Doria aveva appuntato il suo occhio parecchie volte; ma vi concentrò tutta la sua attività soltanto nel 1891, quando fu nominato presidente della nostra benemerita Società geografica. Per questa alta carica egli aveva una lunghissima preparazione: e infatti, pur dando la preferenza alle raccolte zoologiche, sapeva giustamente apprezzare anche quelle botaniche e quelle etnografiche, e molto s'interessava anche dei problemi geografici. Ma in quell'epoca non era possibile far soltanto della scienza per la scienza, perchè le nazioni più potenti europee stavano disputandosi il predominio in quelle parti del continente africano, che potevano ancora ritenersi *res nullius*: e l'Italia non voleva, non doveva restar colle mani vuote; l'africanismo, come scrisse Della Vedova, era allora nello spirito dei tempi, era nel Paese. Ecco perchè l'opera della Società geografica, sotto la presidenza di Doria, si svolse specialmente in Africa.

Nell'Africa orientale il Giuba era stato preso come limite tra la sfera d'influenza dell'Italia e quella dell'Inghilterrra: confine che non era confine, perchè il corso del Giuba era in gran parte sconosciuto. Bisognava esplorare il Giuba. Ecco una grandiosa impresa di cui la Società geografica prendeva l'iniziativa, auspici Della Vedova, il cui nome merita il primo posto, Doria, Millosewich e altri. Il capitano Vittorio Bottego: ecco per l'impresa l'uomo, del quale Doria genialmente aveva intuito le eminenti qualità di condottiero, di naturalista e di esploratore.

La meravigliosa impresa è stata consacrata ai posteri nel libro: *Il Giuba esplorato*; nella prefazione di questa opera è messa in chiaro la non piccola parte di merito che ne ridonda a Doria. La seconda spedizione Bottego, sempre di completa iniziativa della Società geografica, portò alla conoscenza del corso medio e inferiore dell'Omo, che era anch'esso ignoto. Purtroppo gli splendidi risultati di questa seconda spedizione, che coincidette colla malaugurata guerra coll'Abissinia, furono scontati con fiere tragedie: essa costò la vita oltrechè al Sacchi compagno del Bottego, al Bottego stesso; e potè essere narrata soltanto da Vannutelli e da Citerni salvatisi quasi per miracolo. La Società geografica, di cui era sempre presidente il Doria, ebbe a soffrire non soltanto per queste perdite, ma anche perchè il Paese, dopo i disastri di Abba Carima e di Adua, alla ricerca di capri espiatorii, coinvolse nelle censure anche la Società geografica, la quale invece, come scrisse Della Vedova, per amor di patria, per zelo di studî, niente altro che per questo, si era accostata ad imprese che facevano parte del programma di un determinato partito politico, e perciò si era trovata esposta alle ripercussioni di acerbe ire. Così è che quella presidenza della Società geografica, che aveva procurato al Doria tante soddisfazioni fino al 1894, dopo quell'epoca gli apportò ogni sorta di dolori.

Al Doria però la fortuna concedette di vivere fino al giorno, in cui la nazione unanime spontaneamente rinnovò le gesta africane, questa volta con miglior fortuna; e ciò venne a giustificare, e, più che giustificare, a circondare dell'aureola dei precusori quella Società geografica che egli avea presieduta nei suoi più belli e nei suoi più brutti momenti. Purtroppo, al Doria non fu altrettanto favorevole la fortuna per quei Musei di Storia Naturale che per tutta la sua vita stettero in cima de' suoi pensieri. Il nostro Paese per ora ai Musei non pensa: o meglio sembra che sia sulla via di disfarsene, se si deve giudicare dalla sorte toccata recentemente al Museo Agrario di Roma. Ma seguiamo l'esempio lasciatoci dal Doria: non scoraggiamoci, e speriamo in giorni più favorevoli a quella coltura scientifica superiore, che è stata la gloria dei nostri avi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste il fascicolo 1° dell'opera dei professori Omodeo, Peglion e Valenti: *La Colonia Eritrea: condizioni e problemi*, edita per cura della Società italiana pel progresso delle scienze; la Memoria a stampa del Socio straniero Lacroix, avente per titolo: *Les Latérides de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés*; e il *Processo verbale*, presentato da G. Lecointe, relativo alla sessione tenuta in Roma nel 1913, dalla Commissione polare internazionale.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 3 maggio 1914.

Béguinot A. — Flora padovana, ossia prospetto floristico e fitogeografico delle piante vascolari indigene inselvatichite o largamente coltivate crescenti nella provincia di Padova, con notizie storico-bibliografiche sulle fonti della flora. Padova, 1910-14. 8°.

De Blasio A. — La psico-narco-anestesia nel tatuaggio. (Estr. dall' « Archivio di antropologia criminale, psichiatria e medicina legale », vol. XXXV). Torino, 1914. 8°.

De Stefani C. — Fossili della creta superiore, raccolti da Michele Sforza in Tripolitania. (Estr. dalla « Palaeontographia italica », vol. XIX). Pisa, 1913. 4°.

Lacroix A. — Les latérites de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés. (Extr. des « Nouvelles Archives du Muséum », 5e sér., t. V, 1913). Paris, 1914. 4°.

Lecointe G. — Procès-verbal de la session tenue a Rome en 1913. (Commission polaire internationale). Bruxelles, 1913. Bruxelles, 1913. 8°.

Odón de Buen. — Reunión en Roma de la Comisión internacional para el estudio del Mediterraneo. Comunicación. Madrid, 1914. 8°.

Omodeo A. — La colonia Eritrea: condizioni e problemi. Fasc. I. (Società ital. per il progresso delle scienze). Roma, 1913. 8°

Porcari G. — Nuove tavole matematiche e nuove formole per abbreviare e controllare i calcoli usuali, ornate di utili nozioni scientifiche. Roma, 1914. 8°.

Fulci. I così detti ascessi di Dubois, secondo gli studî sulla rigenerazione del timo dei mammiferi (pres. dal Socio *Marchiafava*) . . . . Pag. 735
Lumia. Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno (pres. dal Socio *Cuboni*) . . . . » 738
Amantea. Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta del secreto prostatico del cane (pres. dal Socio *Luciani*) (*). . . . . » 746
Brunacci. Sull' adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria. — III. Proprietà chimico-fisiche dei liquidi interni delle rane escul. estive tenute in acqua distillata ed in soluzioni Ringer ipertoniche. — IV. Il tempo entro il quale la regolazione osmotica avviene (pres. *Id.*) (*). . . . . » »

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Serra. Rocce vulcaniche della Sardegna centro-occidentale (pres. dal Socio *Strüever*) . . » »

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Blaserna (relatore) e *Volterra*. Relazione sulla Memoria del dott. *Gianfranceschi*: « Per lo studio del Corista campione dell'Ufficio centrale italiano » . . . . » »
Mattirolo (relatore) e *Pirotta*. Relazione sulla Memoria del dott. *Perotti*: « Studî di biologia sopra l'Agro romano in rapporto al suo bonificamento agrario » . . . . » 747
Grassi (relatore) e *Pirotta*. Relazione sulla Memoria del prof. *Acqua*: « Osservazioni ed esperienze sul filugello » . . . . » »
Grassi (relatore) e *Todaro*. Relazione sulla Memoria del dott. *Sanzo*: « Stadî larvali di Bathophilus nigerrimus Gigl. » . . . . » »

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna. (Presidente). Dà annuncio della morte del Socio straniero prof. *Edoardo Suess* » »
Grassi. Commemorazione del Corrisp. marchese *Giacomo Doria* . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Millosevich (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio straniero *Lacroix*; dei proff. *Omodeo, Peglion, Valenti* e del signor *Lecointe* » 756
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . » 757

(*) Questa Nota verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli.

RENDICONTI — Maggio 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Körner e *Contardi*. La trinitrobenzina asimmetrica 1. 2. 4. . . . . Pag. 633
De Stefani. Su una Nota di Steinmann intorno alle rocce di Prato in Toscana . . . . » 635
Severi. Sugli integrali abeliani riducibili . . . . » 641
Almansi. Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti . . . . » 651
Balbiano. Sulla tribenzoina . . . . » 654
Issel. Lembi fossiliferi quaternarî e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal professore D. Lovisato (*) . . . . » 659
Bottasso. Sull'operatore differenziale binario S di M. Pieri (pres. dal Corrisp. *Marcolongo*) . » »
Picone. Sopra una questione di geometria cinematica (pres. dal Socio *Bianchi*) . . . . » 666
Signorini. Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . . » 672
Tonelli. Su una proposizione dell'Almansi (pres. dal Corrisp. *Almansi*) . . . . » 676
Godeaux. Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un (pres. dal Corrisp. *Enriques*) . » 682
Armellini. Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . . . . » 686
Burgatti. Potenziali Newtoniani dell'elasticità (pres. dal Corrisp. *Marcolongo*) (*) . . . » »
Viaro. Sulla costruzione delle tavole per la correzione del passo dei microscopî micrometrici (pres. dal Socio *Millosevich*) . . . . » 687
Silva. Sulla correzione di r u n alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico (pres. *Id.*) (*) . . . . » 693
Rolla. Sul punto di fusione dell'arsenico (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . . . » »
Guglielmo. Sull'esperienza di Clément e Desormes, e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . » 698
Gianfranceschi. La durata minima di un suono sufficiente per individuarlo (pres. *Id.*) . » 704
Amadori. Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 707
Quercigh. Sulla vera natura della miersite e della cuprojodargirite (pres. dal Socio *Strüver*). » 711
Sborgi. Sui borati. Sistema $BaO = B^2O^3 - H^2O$ a 30° (pres. dal Socio *Nasini*) . . . . » 717
Cambi. Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni (pres. dal Socio *Angeli*) (*) . » 722
Bianchi. Ilmenite di Val Devero (Ossola) (pres. dal Socio *Struever*) . . . . » »
Pieragnoli. Di alcune nummoliti dell'Isola di Rodi (pres. dal Socio *De Stefani*) . » 728
Ponte. Sulla origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna (pres. *Id.*) . . » 730
Migliorini. Sulla Geologia dei dintorni di Tobruk (pres. *Id.*) . . . . » 734
Quagliariello e *D'Agostino*. Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico (pres. dal Corrisp. *Bottazzi*) (*). . . . . . . » »

(Segue in terza pagina)

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 17 maggio 1914.* **N. 10.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 10°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

④ RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1914.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Lembi fossiliferi quaternarî e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato.* Nota del Corrispondente A. Issel.

Per soddisfare al desiderio espressomi dal mio riverito collega ed amico prof. Domenico Lovisato, infaticabile esploratore della Sardegna, ho esaminato le ricche serie di fossili recenti e quaternarî da lui raccolte nella parte meridionale dell'isola, e mi faccio ora a render conto delle mie osservazioni.

Le specie di fossili comunicatemi dal Lovisato sono in grandissima parte riferibili alla classe dei molluschi, ed io sono riuscito a determinarle quasi tutte, col sussidio di monografie relative alla fauna malacologica mediterranea, e confrontandole con esemplari tipici pertinenti alla fauna odierna del nostro mare.

Non ho creduto necessario trascrivere nella mia Nota il catalogo ragionato e completo dei fossili sottoposti al mio esame, perchè avrebbe accresciuto il volume della Nota senza aumentarne il valore. Mi è parso preferibile il partito di recar solo l'elenco delle specie e varietà più abbondantemente rappresentate, e in particolar modo di quelle che sono più caratteristiche, dal punto di vista della distribuzione geografica e stratigrafica.

Ho colto inoltre l'opportunità offertami da questo lavoro per esporre alcune considerazioni sull'ordinamento dei terreni quaternarî.

I fossili raccolti dal Lovisato provengono dalle aree e dai punti seguenti:

1) Sponda orientale dello stagno di Santa Gilla e specialmente un punto situato sulla sponda di detto stagno, sotto Fangario, lungo la linea ferroviaria.

2) Sotto la stazione ferroviaria di Cagliari e lungo la linea ferroviaria in prossimità di questa stazione. Si trova colà un calcare siliceo turoniano, forato da litodomi e da spugne.

3) Banco di sabbia a Lutraria, che si trova fra lo stagno di Monserrato e S. Mauro, sotto la villa Mossa, come pure un lembo di sabbione sovrapposto a detto banco dall'altra parte del ponticello attraversato dalla ferrovia secondaria.

4) Parte nuova del Camposanto di Cagliari, formazione messa allo scoperto da poco più di 10 anni, e che consiste in conglomerato ghiaioso e sabbioso poco tenace, con numerose conchiglie assai alterate (sembrano calcinate) e infrante, punto assai vicino alla riva odierna.

5) Spiaggia delle saline di S. Bartolomeo, presso la stazione biologica, a brevissima distanza dalla riva attuale.

6) Dalla estremità meridionale della Cala Mosca, sotto il semaforo di S. Elia, alla Grotta della Foca. Si tratta di sabbione sciolto o più o meno concreto, il quale si solleva fino a poco più di 1 m. sul livello marino attuale, ed è ricco di conchiglie marine; fra queste poche terrestri, con scarsi coralli, echinodermi e resti di crostacei. Le sabbie riposano sopra calcari a Lithothamnium forati dai litodomi.

7) Spiaggia del Poetto, a breve distanza a nord-est della Cala Mosca, ove si trovano sabbie conchiglifere emerse, analoghe per età e giacitura a quelle della Cala Mosca.

Ricevetti inoltre qualche fossile dal quaternario del Sulcis, dalle vicinanze dello stagno di Pilo (Nurra di Sassari) e dalla spiaggia emersa delle Saline; ma si tratta di materiale troppo scarso, perchè io possa dedurne illazioni di qualche valore. Taccio per analoga ragione di altri campioni di fossili e di rocce provenienti da parecchi punti della Sardegna settentrionale non compresi fra quelli testè ricordati.

Dalla prima località, situata, come si è detto, presso le rive dello stagno di Santa Gilla, provengono oggetti di due età diverse, cioè gusci di ostriche, di Cardium, e d'altri molluschi bivalvi, come pure di patelle, in gran parte spezzati, che sembrano di data recentissima ed hanno i caratteri di avanzi di pasto, analoghi secondo Lovisato ai Kjökkenmödding, mentre altri, raccolti in principal modo sotto Fangario e d'aspetto più antico, non subirono certamente alterazione e trasporto per mano dell'uomo. Fra questi abbonda una varietà di Ostrea edulis, affine a quella che vive a Cancale (Atlantico), associata alla var. tarentina, e si trova il Pectunculus violacescens, Lamarck. Valve d'ostriche ed avanzi di altre conchiglie, fra le quali ho cre-

duto riconoscere l'Eastonia rugosa, Chemnitz, sono cementati con ciottoli e ciottoletti in un conglomerato assai tenace. Il banco d'ostriche raggiunge circa 1 m. di potenza, ed è sottoposto a sabbie argillose bigie senza fossili.

Al Monte S. Michele, collinetta situata a breve distanza dal punto suaccennato, verso levante, Lovisato osservò tracce recenti lasciate dal mare, e raccolse un campione di roccia cui aderiscono tubi calcarei che sembrano di Vermetus.

Il materiale estratto dal punto n. 2 (sotto la stazione delle ferrovie reali di Cagliari) consiste in un conglomerato conchiglifero, con Cardium tuberculatum, Linné, Venus sp., Tapes sp., Loripes lacteus, Linné, e fusti di Posidonia, in frammenti di calcare forato dalle foladi e foladi libere (Pholas dactylus, Linné) [1]. Dai fori praticati da dette foladi ho tratto sabbia contenente: Conus Mediterraneus, Brug.; Nassa costulata, Renier; Bittium reticulatum, Da Costa; Cerithiopsis Metaxae, Delle Chiaie; Rissoa (Zippora) auriscalpium, Linné; Rissoa (Apicularia) Guerini, Recluz; Loripes lacteus, Linné.

In questi fossili non trovo elementi che mi consentano di ascriverli ad un piano diverso dal recente; infatti sarebbero da riferirsi, secondo Lovisato, al periodo preromano. Il conglomerato si trovava a circa 2 m. sul livello marino.

Un esemplare di calcare siliceo, ricevuto da me coll'indicazione di « Piano delle ferrovie reali di Cagliari », oltre a numerosi fori di litodomi e ad erosioni di spongiari, conteneva in uno dei primi Venerupis irus, Linné.

La località indicata al n. 3 della mia enumerazione (fra S. Mauro e lo stagno di Monserrato) ha fornito buon numero di conchiglie d'aspetto recente, vissute in posto, ed altre, in gran parte artificialmente infrante, associate a manufatti, e sono indubbiamente avanzi di pasti.

Le conchiglie non trasportate o mutilate dall'uomo appartengono a 68 specie tutte marine e tutte appartenenti alla fauna attuale. Le più abbondanti sono: Murex trunculus, Linné; Cerithium vulgatum, Bruguière (le varietà labrosum e subasperum di Monterosato); Arca Noae, Linné; Ostrea edulis, Linné; var. lamellosa, Brocchi; Venus gallina, Linné; Loripes lacteus, Linné. Notevoli, perchè non comuni: Murex (Ocinebra) Edwardsi, Payraudeau; Nassa (Arcularia) gibbosula, Linné; Lucina (Divaricella) divaricata, Linné; Lucina borealis, Linné; Corbulomya Mediterranea, Da Costa, e principal-

[1] Le foladi appartengono ad individui di non comuni dimensioni e praticarono fori che misurano fin 28 mm. di diametro.

mente Lutraria lutraria, Linné e Panopaea glycimeris, Born. Oltre alle conchiglie sono da segnalarsi alcuni Balanus.

« Gran parte degli accennati fossili si trova contenuta in un banco dall'altra parte del ponticello attraversato dalla ferrovia secondaria » (son parole di Lovisato), che il raccoglitore definisce banco a Lutraria, e giace all'altitudine di 3 a 4 m. Oltre alla Lutraria, vi si osservano Panopaea glycimeris, Arca Noae, Pinna nobilis, Linné; Murex trunculus ecc.

Al di sopra di questo giacimento si vede un sabbione argilloso colle due varietà testè menzionate di Cerithium vulgatum; Cerithiopsis Metaxae, Delle Chiaie; Pirenella conica, Blainville, var.; Cardium edule, ecc. I documenti paleontologici non consentono fin qui di asserire che i due depositi appartengano alla serie quaternaria.

I gusci mutilati di Ostrea, di Mytilus, d'Arca, di Patella e di Trochus più recenti, per la speciale modalità di frattura di cui portano le tracce, sono da ritenersi per la massima parte residui di pasto. Alcune conchiglie di Columbella rustica, Linné, dall'apice mozzato, raccolte con questi residui, furono probabilmente così ridotte di proposito deliberato, per servire ad uso di monile o affine di ornarne qualche indumento.

I manufatti consistono principalmente in cocci di fittili non torniti e cotti sulla brace, fittili d'impasto grossolano di tipo neolitico. Vi sono compresi pezzi di olle ovoidali, con ansa e senza, ed un frammento di vaso emisferico provvisto di carena ottusa, parallela e prossima al margine. V'ha pure una rozza cuspide scheggiata ed ammaccata, la quale, essendo costituita di roccia piuttosto tenera, non poteva servire che ad uso di stromento contundente. Ricorderò anche ciottolini di pietra verde e frammenti di calcare, che sembrano trovarsi in quel giacimento perchè trasportati dall'uomo; inoltre residui di scorie metallurgiche, le quali accennano ad un intervento dell'uomo posteriore ai tempi cui si possono attribuire i fittili.

Avvalorano l'interpretazione che alcuni oggetti sopraenumerati sieno da considerarsi come relitti di pasti parecchie ossa di piccoli erbivori, artificialmente spezzate, cui erano associati.

Il giacimento della parte nuova del camposanto di Cagliari, situato non lontano da questa città verso oriente, è il quarto di quelli esplorati dal prof. Lovisato, dei quali egli mi comunicò i fossili, che consistono in ossa di ruminanti, cioè di Cervo e di Muflone, in pessimo stato di conservazione, e in conchiglie in gran parte guaste e calcinate. Queste si distinguono per le dimensioni generalmente maggiori delle normali ed appartengono a 20 specie, fra le quali prevalgono per numero: Cerithium vulgatum, Bruguière, Eastonia rugosa, Chemnitz, e Cardium edule, Linné.

Degne di nota per le dimensioni eccezionali: Cassis undulata, Gmelin; Tritonium nodiferum, Lamarck, e Cardium edule, Linné. Ma specialmente sono meritevoli di particolare attenzione:

Conus testudinarius, Martini [1] attualmente estinto nel Mediterraneo e che sopravvive nelle acque del Senegal; Cardium edule, Linné, var. Cotronensis, Gignoux. Si tratta di varietà segnalata nei depositi quaternarî della Calabria e mancante alla fauna vivente [2]; Tapes senescens, Doderlein, var. subtriangularis, specie e varietà estinta. propria al pliocene, della quale si trova una buona illustrazione nell'opera di Cerulli-Irelli « Fauna malacologica Mariana » (Paleontographia Italica, Pisa, 1908). L'unico esemplare sottoposto al mio esame corrisponde alla fig. 22 della tav. XII di detta Memoria.

Le conchiglie raccolte o osservate nella parte nuova del Camposanto di Cagliari sono spesso impigliate in un conglomerato arenaceo. che ricetta anche qualche corallo ed ossa di piccoli ruminanti. Il giacimento, di cui si tratta, è interposto fra i livelli di 7 e 10 m. sul mare.

La quinta località, fra quelle sopra enumerate, è la spiaggia delle saline di S. Bartolomeo, presso la riva del mare a m. 1,50 su questo, spiaggia sulla quale sorge la nuova stazione biologica. Essa somministrò al Lovisato 25 specie o varietà di conchiglie, parte delle quali erano originariamente impigliate in un conglomerato; tutte appartengono alla fauna vivente. Parmi opportuno segnalare nel numero:

Purpura haemastoma, Linné; Nassa (Amycla) semistriata, Brocchi; Conus Mediterraneus, Bruguière, var. oblonga, Bucquoy, Dolfuss e Dautzemberg; Cerithium vulgatum, Bruguière, var. spinosa, de Blainville (non Philippi); Ostrea edulis, Linné, var. Cirnusi, Payraudeau; Cardium edule, Linnè, var. Lamarcki, Reeve; Scrobicularia plana, Da Costa; Pholas dactylus, Linné. Una sola conchiglia terrestre, l'Helix (Helicogena) vermiculata, Müller. Le specie più abbondanti sono Cerithium vulgatum, Bruguière, var. spinosa e Cardium edule, Linné. Colle accennate conchiglie, che sembrano riferibili ad una fauna recente, si rinvennero un molare di suino e frammenti d'ossa lunghe indeterminabili.

Di gran lunga più ricco di tutti gli altri è il deposito fossilifero che dal Capo S. Elia, sotto il semaforo, si estende all'estremo limite meridionale della Cala Mosca, e risulta di sabbie o sabbioni, quali sciolti, quali concreti, adagiati sopra un calcare a Lithothamnium elveziano, forato dai litodomi, sabbie sollevate a 1 m. o poco più sul livello marino. La roccia assume aspetto diverso secondo la grossezza degli elementi e i fossili cui dà ricetto. Ad Is Mesas una roccia analoga apparisce foggiata in strati tabulari, forse perchè costituita di sabbie sottili ed omogenee, tenacemente cementate.

[1] La specie di cui si tratta è stata recentemente descritta e figurata da Gignoux nell'opera *Les formations marines plioc. et quat. de l'Italie du sud*, etc., p. 479. tav. VI, fig. 4-7. Lyon-Paris, 1913.

[2] Si troveranno indicazioni in proposito nell'opera precitata di Gignoux.

I fossili di questa formazione e della parte nuova del camposanto di Cagliari furono in parte determinati dal dott. Maurizio Masera, il quale ne fece oggetto di una tesi di laurea, che rimase inedita ([1]). Quelli da me studiati si riferiscono a 160 specie ben distinte, fra le quali resti (chele) di crostacei brachiuri, tre conchiglie terrestri, un echinide e due corallari. Tutte le altre sono conchiglie marine.

I resti di crostacei appartengono, almeno in parte, al genere Callianassa; gli echinidi si riferiscono al Echinus (Strongylocentrotus) lividus; i coralli a Cariophyllia cyatus, Solander, e Cladocora cespitosa, Milne Edwards e Haime. Le conchiglie terrestri sono: l'Helix (Iberus) Carae, Cantraine; Helix (Xerophila) trochoides, Poiret, ed altra specie indeterminabile.

Fra i testacei marini prevalgono per numero di esemplari: Nassa incrassata, Müller; Columbella rustica, Linné; Conus Mediterraneus, var. Vayssieri, Cerithium vulgatum Bruguière; Bittium reticulatum, Da Costa; Turbo rugosus, Linné; Gibbula Adansoni, Payraudeau; Gibbula varia, Linné; Littorina neritoides, Linné, Barleeia rubra, Adams; Rissoa Guerini, Recluz; Rissoa pulchella, Philippi; Fissurella costaria, Basterot; Pectunculus insubricus, Brocchi; Pectunculus pilosus, Born; Arca Noae, Linné; Arca barbata, Linné; Cardita calyculata, Linné; Venus verrucosa, Linné; Meretrix chione, Linné; Lucina (Tugonia) reticulata, Linné; Loripes lacteus, Linné. Specie o varietà notevoli perchè non comuni: Nassa (Arcularia) gibbosula, Linné; Murex (Pseudomurex) Meyendorfi, Calcara; Triton Parthenopaeus, v. Salis (T. succinctum, Lamarck) T. corrugatum, Lamarck; Cerithiopsis Ragusinum, Brusina; Mytilus edulis, Linné, var. ungulata, Venus verrucosa, Linné, var. turgida, Issel ([2]); Eastonia rugosa, Chemnitz ([3]). Ma mi piace chiamare principalmente l'attenzione dei paleontologi, per l'importanza loro dal punto di vista geografico e stratigrafico, sulle seguenti:

([1]) Un sunto delle osservazioni fatte da questo studioso fu presentato verbalmente alla Società per il Progresso delle Scienze, nella sua riunione tenuta in Genova.

([2]) Questa varietà, che si distingue per la convessità delle valve, assai maggiore del consueto, si trova pure in parecchi dei nostri depositi subappennini.

([3]) Specie, rara nel Tirreno e non frequente nel Mediterraneo occidentale, è invece comune nell'Atlantico medio e meridionale, lungo i lidi del Portogallo, del Marocco, delle Canarie e della Guinea, e fu segnalata alle isole Nicobar, alle Liew Kiew e nella California. Si trova fossile in buon numero di depositi italiani, ed esteri, quaternarî e pliocenici; come pure in altri della Francia e della Svizzera riferibili a parecchi orizzonti miocenici. (Dalla Memoria del prof. R. Meli, *Sulla Eastonia rugosa, Chemn.* ecc. Modena, 1897).

Conus testudinarius, Chemnitz; Conus Mediterraneus, Bruguière, var. Vayssieri, Pallary; Strombus bubonius, Lamarck; Tritonidea (Canthareus) viverrata (?), Kiener; Patella Lamarcki, Payraudeau, var. percostata, De Gregorio; Tapes Senegalensis, Gmelin; Cardium edule, Linné, var. Cotronensis, Gignoux. La prima, come si è detto, è vivente nel Senegal, e così la terza e la quarta; propriamente caratteristiche la var. Vayssieri del Conus Mediterraneus. e la var. Cotronensis del Cardium edule, già osservate in altri giacimenti della stessa età.

La Patella Lamarcki non è rara nel Mediterraneo meridionale e occidentale e in qualche punto dell'Atlantico, ma si trova con poca frequenza nel Tirreno e lungo le rive della Provenza. La sua var. percostata, che si distingue dal tipo per l'altezza maggiore rispetto al diametro dell'apertura, e per le coste assai più sporgenti, è ritenuta specie peculiare dal De Gregorio, e si trova fossile nella caverna d'Addaura in Sicilia. Si tratta perciò di una forma antiquata, estinta.

Della Tapes Senegalensis trovai nella raccolta Lovisato tre valve ben conservate, e credo di averle determinate con sicurezza confrontandole colle sette ottime figure di questa specie date dall'Hidalgo nella tavola XLIII della sua opera *Moluscos de Espana*, come pure consultando le relative descrizioni.

Il settimo giacimento fossilifero, dal quale fu tratto il materiale paleontologico sottoposto al mio esame, è quello della Spiaggia del Poetto, che è propriamente la continuazione del lembo sabbioso di Cala Mosca, ed ebbe origine nello stesso periodo di tempo e sotto l' impero delle medesime condizioni.

Oltre ad un echinide, l'Echinocyamus pusillus, Gray (13 esemplari), e ad un asteride, l'Asterina gibbosa, Forbes (un solo esemplare), il prof. Lovisato ottenne dalla detta spiaggia una dozzina di specie di conchiglie marine, fra le quali due relativamente abbondanti, la Patella caerulea, Linné, e il Mytilus edulis, Linné, var. angulata. Notevoli: Purpura haemastoma, Linné; Fissurella latecostata, Brugnone; Cardium (Laevicardium) Norvegicum, Spengler, var. Senegalensis, Dautzemberg. In alcuni punti le sabbie e i tritumi di conchiglie sono più o meno cementati.

Quantunque non confortato dal ritrovamento di fossili caratteristici, credo non possa revocarsi in dubbio l'affermazione che si tratta di un lembo quaternario contemporaneo a quello di Cala Mosca, e quindi quaternario medio.

I fossili di Cala Mosca e della Spiaggia del Poetto appartengono in piccolissima parte alla zona sopramarina; a quella superiore cioè all'alta marea; tali sono la Littorina neritoides, Linné (L. caerulescens, Lamarck), e le tre specie di Helix comprese nella raccolta), e nel rimanente

consistono in conchiglie e coralli che allignano nelle acque sottili, cioè nei fondi che intercedono fra il livello dell'alta marea e una trentina di m. A rigor di termine non si può affermare tuttavolta che tali specie siano vissute proprio al livello in cui erano confinate i molluschi della zona superficiale; ma è presumibile che, per fatto del moto ondoso del mare e forse anche per opera dei paguri, abbiano subìto un trasferimento dal largo verso la riva e dal basso all'alto.

Con un opera ponderosa intitolata: *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du sud la Sicile*, il dott. M. Gignoux riassume i numerosi lavori comparsi intorno ai depositi pliocenici e quaternarî della regione da lui considerata, ed assurge a conclusioni desunte dalle faune e dalla stratigrafia intorno alle vicende verificatesi nel Mediterraneo occidentale, tra la fine del periodo pliocenico e i tempi attuali.

Risultato importante dello studio precitato si è la dimostrazione sicura, in base all'esame di numerosi giacimenti fossiliferi, della individualità ben manifesta dei piani: Pliocene antico, Pliocene superiore o Calabriano, Siciliano e degli strati a Strombus, i due ultimi riferibili al gruppo quaternario. Ciascuna di queste suddivisioni è caratterizzata dalla estinzione di alcune specie di molluschi e dalla comparsa di altre. Gli esempî tipici del piano Calabriano si ravvisano nei depositi classici di Monte Mario, Vallebiaia, Monte Corvo, dintorni di Catanzaro, Nardò, Girgenti.

L'autore scinde poi il Calabriano in inferiore, nel quale le specie immigrate dal nord sono poco numerose, e in superiore, in cui le specie estinte sono assai scarse, e risultano in maggior numero quelle provenienti dal settentrione. Anche le divisioni da lui ammesse sotto i nomi di Siciliano e strati a Strombus sono ben definite, e rappresentate da esempî, quali noti, quali non ancora segnalati prima del Gignoux; tipici, rispetto alla prima, i depositi conosciutissimi di Ficarazzi, di Monte Pellegrino, di Brindisi, di Gallipoli, e, in ordine alla seconda, quelli di Catanzaro, Taranto, Ravagnese, Boveto. Ciascuna di queste fasi cronologiche corrisponde ad antichi livelli marini, più o meno alti sopra il pelo del Mediterraneo odierno.

Rispetto al Pliocene, Gignoux ammette che la trasgressione pliocenica fu non maggiore di 200 m., fra Marsiglia e la Spagna, oltrepassò 1000 m. in Calabria, e raggiunse 500 m. in Algeria (secondo Lamothe). Per quanto si riferisce al quaternario, il livello del Siciliano sarebbe compreso fra 80 e 100 m., e quello degli strati a Strombus segnerebbe rive di 15, 30, 35 m.

Parecchi esempî accennerebbero a livelli intermedî fra quelli del Siciliano e del piano a Strombus; e non mancherebbero casi, massime nell'estremità meridionale della penisola, di altitudini eccezionali, subordinate alla instabilità del suolo nelle regioni vulcaniche e in quelle soggette a frequenti dislocamenti determinati da terremoti.

L'autore si è studiato di rintracciare, per ciascuno dei suoi piani marini, i corrispondenti livelli d'acqua dolce con fossili caratteristici. Egli, senza indugiarsi nell'esame della fauna terrestre pliocenica antica, accenna alla fauna terrestre contemporanea del suo Pliocene superiore o Calabriano (la stessa propria al complesso denominato Villafranchiano), specie caratteristica della quale sarebbe in Francia e in Italia l'Elephas meridionalis. Contempla poscia le faune del Siciliano e degli strati a Strombus, e attribuisce ad entrambe, nelle formazioni continentali, l'Elephas antiquus, il quale, come dimostrano le note scoperte compiute nella grotta del Principe ai Balzi Rossi, e in Algeria, si sarebbe mantenuto per breve tempo anche posteriormente.

Le deduzioni d'ordine stratigrafico, paleontologico e cronologico che emergono dalle numerosissime osservazioni dello stesso autore e di molti geologi da lui citati, mi sembrano in tesi generale ineccepibili. Ritengo, peraltro, di dover mutare il riferimento del suo Calabriano al Pliocene superiore, perciocchè quest'ultimo piano, distinto dal Calabriano tipico a causa del maggior numero di conchiglie estinte che ricetta (specialmente Pleurotomidae, Cancellaridae, Nassidae, Veneridae) è, per comune consenso, denominato Astiano. Col Calàbriano a parer mio esordisce il Quaternario.

A rigor di termine l'attribuzione del Calabriano al Quaternario o al Terziario si riduce ad una questione di parole; ma, nella seconda ipotesi, sostituendo cioè l'appellativo di Gignoux a quello di Pliocene superiore, sinonimo di Astiano, non si rispetterebbe la priorità che indubbiamente appartiene a quest'ultimo nome (1).

Il confine fra i gruppi Terziario e Quaternario, in altre parole fra il sistema pliocenico e il piano calabriano, si può collocare convenzionalmente al di sopra dell'orizzonte di Monte Mario, che corrisponde all'Astiano superiore, e al di sotto degli strati di Vallebiaia, che rappresentano l'Infracalabriano. Questa linea di separazione è tantopiù opportuna per il fatto che i fossili di Monte Mario sono ora perfettamente conosciuti in seguito alla monografia pubblicàta dal Cerulli-Irelli nella *Palaeontographia Italica*.

L'introduzione di parecchi tipi artici nella fauna marina, non solo nell'Europa settentrionale, ma anche in Calabria e a Vallebiaia, giustifica siffatta delimitazione fra il Pliocene e il Quaternario.

Finalmente, credo pure opportuno di assegnare al complesso degli strati a Strombus e allo spazio di tempo relativo una denominazione regionale, che in certo modo si possa contrapporre a quelle di Calabriano e di Siciliano, vale dire l'aggettivo di Tirreno.

(1) L'aggettivo Astiano fu proposto nel 1853 da de Rouville per le sabbie d'Asti; quello di Piacentino, che equivale a Pliocene inferiore, data dal 1857 e è dovuto a Mayer-Eymar.

Dopo aver descritto i depositi marini quaternarî della Calabria, delle Puglie, della Sicilia, come pure del littorale Tirreno, e accennato per ragioni di confronto a quelli dell'Algeria, della penisola Iberica, della Provenza, del Nizzardo, delle Baleari, il Gignoux porge qualche indicazione sulle ghiaie e puddinghe, e specialmente sui depositi fossiliferi pertinenti allo stesso periodo segnalati in Corsica. Per quanto concerne la Sardegna, ricorda le osservazioni di Lamarmora, avvertendo che i fossili citati da questo autore consistono esclusivamente in specie littorali non caratteristiche (banales, come egli le definisce), riferibili tutte alla fauna attuale.

Le osservazioni e le raccolte fatte dal prof. Lovisato nelle vicinanze di Cagliari dimostrano come non mancano colà lembi fossiliferi, appartenenti a parecchi orizzonti, più o meno recenti (o meglio posteriori al Pliocene) segnatamente a quello a Strombus, illustrato in modo così esauriente dal naturalista francese, vale a dire al mio piano Tirreno.

Il Gignoux espone in alcune pagine della sua Memoria e in una carta geografica (pag. 5) la distribuzione dei giacimenti pliocenici inferiori e superiori (Calabriani) marini, Pliocenici continentali, Siciliani e Tirreni. Si è veduto come le raccolte del prof. Lovisato accusino l'esistenza, in varî punti della Sardegna meridionale, di spiagge sollevate, con sabbie e conglomerati fossiliferi, che hanno tutti i caratteri dell'orizzonte Tirreno tipico. Inoltre, non per la ricorrenza delle specie caratteristiche notate da Gignoux (Strombus bubonius, Lamarck; Conus testudinarius, Martini ecc.); ma per il fatto che vi si rinvengono in una certa misura conchiglie mancanti alla fauna del Mar Rosso e viventi nell'Oceano Indiano, ritengo che sieno da iscriversi al Tirreno alcuni lembi conchigliferi emersi, allineati lungo le due rive dell'Eritreo, e specialmente quelli situati a maggior altitudine sul livello marino, per esempio i depositi segnalati presso Tor, presso Kosseir, lungo i lidi del golfo D'Akaba, e forse anche alcuni nel deserto di Sues [1].

Le mie considerazioni avvalorano l'antica ipotesi, secondo la quale il Mar Rosso non esisteva durante gli ultimi tempi dell'era terziaria, fino a tutta l'epoca pliocenica superiore o astiana [2].

Al pari della maggior parte dei geologi ho adottato nella mia Memoria l'espressione di Quaternario come attibuto cronologico dei terreni succeduti ai pliocenici; e, seguendo l'esempio di Desnoyers, cui è dovuta una definizione precisa di questa antica denominazione, vi comprendo i terreni

[1] Scrivo Sues perchè questa voce corrisponde al suono del vocabolo presso gli abitanti del paese, secondo la trascrizione italiana, mentre Suez riproduce lo stesso suono a norma della trascrizione francese.

[2] *Morfologia e genesi del Mar Rosso.* Atti del III Congresso geografico italiano. Firenze, 1898. — *Essai sur l'origine et la formation de la Mer Rouge.* Bull. de la Soc. Belge de Géol., de Paléont. et d'Hydrol., tome XIII, année 1899, Bruxelles.

recenti, il deposito dei quali si continua attualmente, e considero il Quaternario quale e r a, rispetto ai tempi, e quale g r u p p o in ordine alla serie stratigrafica.

Al vocabolo Quaternario Morlot, seguito da altri studiosi, sostituì Quartario, grammaticalmente più corretto; ciònondimeno l'antica espressione consacrata dall'uso è ancora quella che conta il maggior numero dei fautori.

Non mi dissimulo quanto sia viziosa una terminologia fondata sopra numeri d'ordine, il significato dei quali, col volgere dei tempi, non corrisponde più al concetto originario. Avrei preferito a Quaternario, Neozoico, secondo il significato attribuitogli dallo Stoppani nel 1873 (*Corso di Geologia*, vol. II); ma la stessa voce era stata proposta da Forbes nel 1854 per il complesso dei gruppi Cenozoico e Mesozoico; di più de Lapparent ne fece sinonimo di Terziario, e da Dollo fu adoperata per designare complessivamente Terziario, Quaternario ed Attuale.

Per concludere, assumo la voce Quaternario per distinguere l'ultima delle ere geologiche, come pure il gruppo corrispondente, e divido convenzionalmente questa era nei due periodi Postpliocenico e Attuale od Olocenico ([1]). Finalmente il primo si suddivide dal basso all'alto, secondo l'ordinamento da me caldeggiato, nei piani Calabriano, Siciliano e Tirreno.

Riassumendo in poche parole i risultati di questo studio, concluderò coll'affermare:

1° che lungo le rive del golfo di Cagliari si trovano alla spiaggia del Poetto, a Cala Mosca (e in punti vicini), come pure nella parte nuova del camposanto di Cagliari, depositi pertinenti al Quaternario medio e precisamente al piano Tirreno, in cui sono caratteristiche alcune specie viventi oggi nelle acque del Senegal ed estinte nel Mediterraneo.

2° Che appartengono probabilmente al medesimo orizzonte il banco a L u t r a r i a, situato a nord di Cagliari e la spiaggia emersa delle saline di S. Bartolomeo, nei quali non furono ancora rinvenuti fossili caratteristici.

3° Che spettano all'Olocene (parte all'età preistorica neolitica, parte alla eneolitica) i depositi situati fra S. Mauro e lo stagno di Monserrato, e sotto la stazione delle ferrovie reali di Cagliari, depositi i cui fossili sono riferibili a specie tutte viventi nel Mediterraneo, essendo tuttavolta un po' diversa la frequenza relativa di dette specie rispetto a quanto si verifica nella fauna attuale del vicino mare, date uguali condizioni fisiche e geografiche.

4° Che l'altitudine massima raggiunta nella Sardegna meridionale dai depositi Tirreni (da 1 a 10 metri) è di gran lunga minore di quelle precedentemente segnalate lungo le rive della Liguria occidentale e del

([1]) L'espressione *Holocène* fu adoperata da Gervais per designare il complesso di terreni che comprende le alluvioni, le torbe ed altri depositi che continuano a formarsi anche attualmente; equivale presso a poco all'Antropozoico di Stoppani.

Mar Tirreno (da 15 m. a circa 35), avvertendo che a Ravagnese e a Boveto, presso Reggio di Calabria, questo livello si solleva per eccezione fino ad un centinaio di metri ([1]).

5° Che, da quanto precede, si palesa ben legittima l'istituzione, per le sabbie a Strombus, di un piano Tirreno, interposto cronologicamente fra il Siciliano e l'Olocene o Attuale.

6° Che i depositi olocenici, sollevati localmente fino a circa 2 m. (stazione ferroviaria di Cagliari), accusano mutamenti nei livelli rispettivi del mare e della terra emersa, avvenuti in tempi recentissimi, probabilmente posteriori alle memorie storiche. La frequenza di certe specie divenute in seguito più rare (alludo per esempio alla Purpura haemastoma e alla Eastonia rugosa), nei depositi olocenici preistorici, accusa nella fauna marina modificazioni incipienti.

Meccanica. — *Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta.* Nota dell'ing. dott. G. Armellini, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una Nota inserita negli Atti dell'Accademia di Torino ([2]), il prof. V. Volterra ha mostrato, per primo, la grande utilità che il metodo della stella del Mittag-Leffler poteva avere nella soluzione di molte questioni dinamiche. Il prof. Volterra porta come esempio quei problemi che conducono ad equazioni differenziali del tipo $p'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r$, essendo $a_{sk}^{(r)} + a_{ks}^{(r)} = 0$; equazioni che egli stesso ha profondamente studiato in altri lavori ([3]).

Passando poi ad un problema di attrazione newtoniana, il prof. Volterra esamina il moto di un punto attratto da più punti fissi posti in linea retta.

Supponendo che il momento della quantità di moto rispetto alla retta stessa non sia nullo, egli dimostra che l'asse reale dei tempi t è interamente incluso dentro le stelle relative agli elementi incogniti; donde segue che il problema può ritenersi risoluto facendo uso di noti sviluppi, i quali però, non godono dell'uniforme convergenza.

2. Ciò posto, nella presente Nota io mi propongo di dimostrare che, nella questione ora nominata, non solo l'asse reale dei tempi è incluso nelle

([1]) Si veda a questo proposito il capitolo III dell'opera precitata di Gignoux.

([2]) *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del prof. Mittag-Leffler*, Nota del Socio Volterra, Atti Acc. di Torino, adunanza 16 aprile 1899.

([3]) Atti Acc. di Torino: adunanze 27 febbraio, e 27 marzo 1898; e 15 gennaio 1899. Note del Socio V. Volterra.

stelle degli elementi incogniti, ma che, oltre a ciò, noi possiamo sempre costruire una striscia di larghezza finita contenente il detto asse, e limitata da due rette ad esso parallele, la quale resti interna alle stelle ora nominate. Servendoci di questo risultato, potremo grandemente semplificare nel nostro caso gli sviluppi del Mittag-Leffler, riducendoli a serie procedenti secondo le potenze della quantità $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$. In tal caso otteniamo anche l'uniforme convergenza che, come è noto, non si aveva finchè le nostre cognizioni si limitavano a sapere che solo l'asse reale è interno alle stelle degli elementi che si domandano.

3. In una Nota da me pubblicata nei Comptes-Rendus [1], io ho dimostrato la risolubilità del problema degli n corpi con gli sviluppi del Mittag-Leffler, tutte le volte che si sappia *a priori* che gli urti sono semplici. Come caso particolare di questo teorema troviamo il moto di un punto attratto da più centri fissi, comunque disposti. Sarà bene, però, di far osservare che, nel caso generale in cui i centri fissi sono disposti ad arbitrio, è necessario ricorrere ad una variabile ausiliaria q opportunamente scelta, giacchè l'asse reale dei tempi non è sempre contenuto nelle stelle relative alle variabili. All'opposto, nel caso di cui ora trattiamo, l'asse reale è tutto interno alle stelle nominate, e non occorre quindi alcun uso di parametri ausiliarî; non converrebbe perciò di trattare questo problema col metodo generale che io ho applicato al primo: ma è bene di risolverlo con considerazioni speciali.

4. Scegliamo la retta luogo dei punti fissi come asse delle x, chiamando con r la distanza del punto mobile P dall'asse fisso, e con ϑ l'angolo che il raggio r forma con un piano fisso passante per l'asse stesso. Riferendoci, per ora, alle coordinate cilindriche $x\,r\,\vartheta$, avremo gl'integrali primi:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}-f\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i}{\varrho_i}=h. \tag{2}$$

Nelle (1) e (2), c indica la costante delle aree (che supponiamo sempre *diversa da zero*), h quella delle forze vive, f il coefficiente attrattivo, m_i la massa di una qualsiasi degli n punti fissi, ed infine ϱ_i la distanza di P da m_i. La massa μ del punto mobile P non entra nelle nostre considerazioni, comparendo a fattore nei due membri delle equazioni del moto.

[1] *Un théorème général sur le problème des n corps.* Note de M.r G. Armellini, Comptes-Rendus de l'Académie des sciences, séance du 9 mars 1914.

Scegliamo ora le tre unità di lunghezza, di tempo, e di massa, in modo che si abbia:

$$(3) \qquad c=1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i = 1 \quad ; \quad 2f + \sqrt{2|h|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ,$$

la qual cosa è sempre possibile, come potremmo facilmente dimostrare. Ciò posto, poichè tutte le masse m_i sono positive, e poichè si ha sempre $\varrho_i \geqq r$, avremo, dalle (1) e (2), l'ineguaglianza:

$$(4) \qquad h \geqq \frac{1}{2r^2} - \frac{f}{r} .$$

Studiamo la curva $y = \frac{1}{2r^2} - \frac{f}{r}$. Per $r=0$, si ha $y=\infty$; crescendo r la y diminuisce; per $r = \frac{1}{2f}$ si ha $y=0$; per $r = \frac{1}{f}$ la y assume il valore minimo, $y = -\frac{f^2}{2}$. Continuando r a crescere oltre $\frac{1}{f}$, la y aumenta di nuovo, finchè, per $r=\infty$, si ha $y=0$. Qualunque siano quindi le condizioni iniziali del moto, se c non è nulla, e se si scelgono le unità di misura in modo da soddisfare alle (3), si ha sempre $h \geqq -\frac{f^2}{2}$.

5. Supponiamo ora assegnato il valore della costante h, e vediamo dentro quali limiti possa variare la r. Dalla (4) deduciamo:

$$(5) \qquad 2hr^2 + 2fr - 1 \geqq 0 :$$

ineguaglianza che studieremo analizzando separatamente i casi di h positivo, nullo o negativo.

I caso: $h > 0$. Il primo membro ammette due radici reali: una, r_1, negativa,

$$r_1 = \frac{-f - \sqrt{f^2 + 2h}}{2h} ;$$

l'altra, r_2, positiva,

$$r_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 2h}}{2h} > \frac{1}{2f} .$$

Il primo membro della (5) si conserva positivo se si ha $r < r_1$, oppure $r > r_2$: scartando quindi i valori negativi del raggio vettore, perchè privi di significato meccanico, vediamo che in questo caso il punto mobile P *può allontanarsi indefinitamente dalla retta luogo dei centri fissi; ma la sua distanza da essa resta sempre maggiore di un limite finito e diverso da zero.*

II caso: $h = 0$. La (5) ci dice che *la distanza di* P *dall'asse fisso può crescere all'infinito, ma deve restare sempre maggiore di* $\frac{1}{2f}$.

III caso: $h < 0$. In questo caso le due radici r_1 e r_2 sono reali $\left(\text{dovendo essere necessariamente, come è stato dimostrato, } h \geqq -\frac{f^2}{2}\right)$, e positive, e si ha $r_1 > r_2$. L'ineguaglianza è soddisfatta per $r_1 \geqq r \geqq r_2$. In questo caso, quindi, *la distanza del punto mobile dall'asse fisso resta sempre compresa tra due limiti finiti e diversi da zero.*

Indicando, al solito, con $|h|$ il valore assoluto di h, sarà facile il dedurre, da questa analisi, che si ha sempre:

$$r \geqq \frac{1}{2f + \sqrt{2|h|}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

L'equazione delle forze vive, chiamando con v la velocità assoluta di P, ci dà allora:

$$v^2 = 2h + 2f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{\varrho_i} \leqq 2h + 2\frac{f}{r} \leqq \left\{2f + \sqrt{2|h|}\right\}^2 = \frac{1}{2\pi}\,.$$

6. Consideriamo ora le equazioni del moto di P in coordinate cartesiane:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' & \dfrac{dx'}{dt} = \varphi = -f \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i(x - a_i)}{\varrho_i^3} \\ \dfrac{dy}{dt} = y' & \dfrac{dy'}{dt} = \chi = -f \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i\, y}{\varrho_i^3} \\ \dfrac{dz}{dt} = z' & \dfrac{dz'}{dt} = \psi = -f \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i\, z}{\varrho_i^3}, \end{cases}$$

dove con a_i abbiamo indicato l'ascissa di m_i; e studiamole applicando noti teoremi.

Facciamo crescere o decrescere t partendo dal valore iniziale t_0 e restando sempre sull'asse reale, fino ad un valore *reale* qualsiasi $\bar{t}$; siano $\bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}\, \bar{x}'\, \bar{y}'\, \bar{z}'\, \bar{\varrho}_i$ i corrispondenti valori delle variabili, anche essi certamente *reali*. Avremo, per quanto è stato detto,

$$(10) \qquad \bar{\varrho}_i^2 = (\bar{x} - a_i)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \geqq \left\{\frac{1}{2f + \sqrt{2|h|}}\right\}^2 = 2\pi\,,$$

$$(11) \qquad \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2 \leqq \left\{2f + \sqrt{2|h|}\right\}^2 = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Indichiamo, con $x y z$, dei valori qualsiasi, in generale, *complessi*, delle tre variabili. È facile il vedere, tenendo conto della (10), che le funzioni φ, χ, ψ sono svolgibili in serie di potenze delle quantità:

$$x - \bar{x} = \xi \quad , \quad y - \bar{y} = \eta \quad , \quad z - \bar{z} = \zeta \, ;$$

purchè $\xi\, \eta\, \zeta$ siano, in valore assoluto, sufficientemente piccole.

Facciamo, per esempio,

$$|\xi| \leqq \frac{1}{8\{2f + \sqrt{2|h|}\}} = \sqrt{\frac{\pi}{32}} \tag{12}$$

e analogamente per $|\eta|$ e $|\zeta|$, scegliendo il coefficiente 8 al denominatore per semplificare i calcoli.

Avremo, finchè ξ, η, ζ variano dentro questi campi,

$$|x - a_i| \leqq |\bar{x} - a_i| + |\xi| \leqq \bar{\varrho}_i + |\xi| \leqq \bar{\varrho}_i + \frac{1}{8\{2f + \sqrt{2|h|}\}}$$

$$\varrho_i > \bar{\varrho}_i - \frac{3}{8\{2f + \sqrt{2|h|}\}} \, :$$

e quindi:

$$\varphi \leqq \left| f \left\{ \frac{\bar{\varrho}_i + \frac{1}{8\{2f + \sqrt{2|h|}\}}}{\bar{\varrho}_i - \frac{3}{8\{2f + \sqrt{2|h|}\}}} \right\} \right| < 2f \leqq 2f + \sqrt{2|h|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, . \tag{13}$$

Simili ineguaglianze troveremo per $|\chi|$ e $|\psi|$.

Analogamente, se con $x'\, y'\, z'$ indichiamo dei valori in generale *complessi* delle tre derivate, e poniamo

$$x' = \bar{x}' + \xi' \quad , \quad y' = \bar{y}' + \eta' \quad , \quad z' = \bar{z}' + \zeta' \, , \tag{14}$$

e facciamo variare ξ', η', ζ' in modo che i loro valori risultino in modulo inferiori o, al più, eguali a $\frac{\pi(2f + \sqrt{2|h|})}{4 - \pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(4 - \pi)}$, avremo, in virtù della (11),

$$|x'| \leqq |\bar{x}'| + |\xi'| \leqq \frac{4}{\sqrt{2\pi}\{4 - \pi\}} \, :$$

e similmente per $|y'|$ e $|z'|$.

7. Riassumendo: se facciamo variare le quantità $x\, y\, z\, x'\, y'\, z'$ nell'intorno di $\bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}\, \bar{x}'\, \bar{y}'\, \bar{z}'$, in modo che i moduli

$$|x - \bar{x}| \quad |y - \bar{y}| \quad |z - \bar{z}| \quad |x' - \bar{x}'| \quad |y' - \bar{y}'| \quad |z' - \bar{z}'|$$

si conservino sempre inferiori od uguali, i primi tre a $\sqrt{\frac{\pi}{32}}$, e gli altri a $\frac{\pi}{\sqrt{2}\{4-\pi\}}$: i secondi membri delle equazioni (9) saranno sviluppabili secondo le potenze ascendenti dei moduli stessi, e rimarranno sempre inferiori, o, al più, eguali, gli uni a $\frac{4}{\sqrt{2\pi}\{4-\pi\}}$, e gli altri a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ora, dato un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy_i}{dx} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

indicando con $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ i valori corrispondenti ad $x = x_0$, se i secondi membri sono sviluppabili in serie di potenze convergenti per $|y_i - y_{i0}| \leqq \lambda_i$, e se dentro questi limiti si ha sempre $|Y_i| \leqq L_i$; allora gl'integrali y_i sono sviluppabili secondo le potenze di $x - x_0$, e gli sviluppi convergono certamente se $|x - x_0|$ è inferiore, o, al più, eguale, al minore dei rapporti:

$$\frac{\lambda_1}{L_1}; \frac{\lambda_2}{L_2}; \frac{\lambda_3}{L_3}; \dots; \frac{\lambda_n}{L_n}.$$

Applicando questo teorema al sistema (9), abbiamo, per esso,

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\{4-\pi\}} & ; \quad L_1 = L_2 = L_3 = \dfrac{4}{\sqrt{2\pi}\{4-\pi\}}; \\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \sqrt{\dfrac{\pi}{32}} & ; \quad L_4 = L_5 = L_6 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

Nel nostro caso i sei rapporti risultano tutti eguali fra loro, avendosi:

$$(15)\qquad \frac{\sqrt{\frac{\pi}{32}}}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(4-\pi)}}{\frac{4}{\sqrt{2\pi}(4-\pi)}} = \frac{\pi}{4}.$$

Possiamo quindi concludere che gl'integrali x, y, z, x', y', z', sono sviluppabili in serie di potenze della quantità $t - \bar{t}$, convergenti per $|t - \bar{t}_0| \leqq \frac{\pi}{4}$. E, poichè $\bar{t}$ è un valore reale qualsiasi di t, ne segue che, se noi costruiamo una striscia di spessore $\frac{\pi}{2}$, limitata da due rette parallele all'asse reale e distanti da esso, da una parte e dall'altra, di $\frac{\pi}{4}$, questa

striscia è tutta interna alle stelle relative alle variabili $x\,y\,z\,x'\,y'\,z'$. Abbiamo allora, con una trasformazione conforme,

$$(16)\qquad \begin{cases} x = A_0 + A_1 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\} + A_2 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\}^2 + \cdots \\ y = B_0 + B_1 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\} + B_2 \left\{ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \right\}^2 + \cdots \\ \text{ecc. ecc.} \end{cases}$$

Le costanti A_i B_i ecc. sono facilmente determinabili, date le condizioni iniziali del moto; le (16), uniformemente convergenti per t reale qualsiasi, rappresentano l'integrale generale del sistema (9).

8. Riassumendo: *consideriamo un punto mobile* P *sottoposto all'attrazione di più centri fissi* $m_1\,m_2 \ldots m_n$ *posti in linea retta, e supponiamo che il momento della quantità di moto di* P *rispetto all'asse stesso non sia nullo. Allora, scegliendo le tre unità di misura secondo la* (3), *e costruendo una striscia di spessore* $\frac{\pi}{2}$ *limitata da due rette parallele e simmetriche rispetto all'asse reale dei tempi, essa risulta tutta interna alle stelle di Mittag-Leffler relative alle coordinate* $x\,y\,z$ *e alle velocità* $x'\,y'\,z'$.

In conseguenza sappiamo trovare delle serie procedenti secondo le potenze di $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ *le quali convergono uniformemente, per valori reali del tempo, da* $t = -\infty$ *a* $t = \infty$, *e ci rappresentano l'integrale generale delle equazioni del moto.*

Meccanica. — *Potenziali newtoniani dell' elasticità.* Nota I di Pietro Burgatti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

1. Gli ordinarî potenziali newtoniani di spazio, di semplice strato e di doppio strato, tanto importanti nella fisica-matematica, si presentarono anche ai primi matematici che tentarono lo studio dell'equazioni per l'equilibrio dei corpi elastici; e le loro proprietà ispirarono poi i matematici del nostro tempo nella ricerca dei metodi generali d'integrazione, o nella risoluzione di problemi particolari. La loro importanza in questa teoria non è occasionale; ma è dovuta alla speciale forma dell'equazioni per l'equilibrio. Tuttavia i legami, direi così, fra queste equazioni e i detti potenziali, non sono così semplici e diretti come quelli che li collegano coll'equazione di Laplace. Onde viene l'idea che esistano altre funzioni, dotate di proprietà analoghe ai detti potenziali, ma più direttamente collegate con l'equazioni del-

l'equilibrio elastico, e costituenti effettivamente per queste equazioni l'elemento analitico fondamentale. Orbene, coteste funzioni esistono, e son quelle appunto che io distinguo col nome di *potenziali newtoniani dell'elasticità*.

In questa prima Nota mi propongo di definirli e di accennare brevemente le loro proprietà.

Consideriamo l'equazione indefinita per l'equilibrio elastico dei corpi isotropi non soggetti a forze di massa nella forma [1]

$$(1)\qquad \mathrm{Es} = (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad\,div\,s} + \omega^2\Delta'\mathrm{s} = 0\,,$$

ove s è lo spostamento, E è un simbolo rappresentante l'operazione

$$(\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad\,div} + \omega^2\Delta'\,.$$

Siano P e O due punti; $r = \mathrm{mod}\,(\mathrm{P}-\mathrm{O})$, e a un vettore costante.

Si verifica immediatamente che

$$(2)\qquad \mathrm{s} = \gamma\mathrm{a} = \left(\frac{2\Omega^2}{r} - (\Omega^2 - \omega^2)\frac{d\,\mathrm{grad}\,r}{d\mathrm{P}}\right)\mathrm{a}$$

soddisfa la (1). La γ è una omografia vettoriale, e precisamente una dilatazione. Questo $\gamma\mathrm{a}$ si chiamerà il *potenziale newtoniano elementare della elasticità* prodotto da un vettore $\mathrm{a} = \mathrm{M} - \mathrm{O}$ sul punto P di massa unitaria. È un vettore finito e continuo per qualunque P dello spazio (tenuto fisso O); eccettuato per O, ove diventa di grandezza infinita come $\frac{1}{r}$.

Si osservi che grad r è uguale a $\frac{\mathrm{P}-\mathrm{O}}{r}$, e perciò è un vettore unitario che definisce la direzione di P — O.

Si ha

$$(3)\qquad \gamma\mathrm{a} = \frac{2\Omega^2}{r}\,\mathrm{a} - (\Omega^2 - \omega^2)\,\frac{d\left(\frac{\mathrm{P}-\mathrm{O}}{r}\right)}{d\mathrm{P}}\,\mathrm{a} =$$

$$= \frac{\Omega^2 + \omega^2}{r}\,\mathrm{a} - (\Omega^2 - \omega^2)\,\frac{a\cos\alpha}{r}\,\mathrm{grad}\,r\,.$$

ove $\alpha = \mathrm{ang}\,(\mathrm{P}-\mathrm{O}\,,\mathrm{a})$. Questa equazione prova che $\gamma\mathrm{a}$ è complanare con a e P — O, e risulta

$$\mathrm{mod}\,\gamma\mathrm{a} = \frac{a}{r}\sqrt{4\,\omega^4\cos^2\alpha + (\Omega^2 + \omega^2)^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,.$$

Si vede ancora che P — O è una direzione unita di γ; le altre, infinite, sono nel piano per O perpendicolare a P — O. Perciò la γ si potrebbe chiamare una dilatazione *simmetrica* rispetto all'asse O P.

[1] Per i simboli e le formule dell'analisi vettoriale vedi l'*Analyse vectorielle générale*, di Burali Forti e Marcolongo, tom. I. Per la teoria dell'elasticità, vedi il tom. II.

2. Sia ora $\mathbf{u}$ un vettore funzione dei punti O d'uno spazio S racchiuso dalla superficie σ; monodromo finito e continuo in tutto S.

Allora

$$\mathbf{w} = \int_S \gamma \mathbf{u} \, dS, \tag{4}$$

ove γ è la dilatazione precedentemente definita, sarà chiamato il *potenziale newtoniano di spazio dell'elasticità.* È un vettore funzione del punto P, finito e continuo in tutto lo spazio esterno ad S, e all'∞ tende a zero come $\frac{1}{r}$. Anche quando P è interno a σ, ha un significato ed è finito e continuo; come risulta dall'espressione (3) di $\gamma \mathbf{u}$.

Calcoliamo la *divergenza di* $\mathbf{w}$. Si ha, tenendo presente che $\mathbf{u}$ non dipende da P,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \int_S \operatorname{div} \gamma \mathbf{u} \, dS = \int_S \operatorname{grad} \gamma \times \mathbf{u} \, dS.$$

Ma

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \gamma &= 2\Omega^2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad} \left(\frac{d \operatorname{grad} r}{dP} \right) \\ &= 2\Omega^2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{grad} (\Delta r);\end{aligned}$$

e notando che $\Delta r = \frac{2}{r}$, si trova subito

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 2\omega^2 \int_S \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u} \, dS = -2\omega^2 \int_S \frac{\operatorname{grad} r \times \mathbf{u}}{r^2} \, dS.$$

Con la forma polare di dS si vede immediatamente che quell'integrale è finito e continuo in tutto lo spazio esterno e interno. All'infinito si annulla come $\frac{1}{r^2}$.

Inoltre, distinguendo gli operatori con l'indice o quando si riferiscono al punto O, e notando che $\operatorname{grad} r = -\operatorname{grad}_0 r$, risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -2\omega^2 \int_S \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r} \times \mathbf{u} \, dS = -2\omega^2 \int_S \left(\operatorname{div}_0 \frac{\mathbf{u}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div}_0 \mathbf{u} \right) dS;$$

e, pel teorema della divergenza,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 2\omega^2 \int_\sigma \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{n}}{r} \, d\sigma + 2\omega^2 \int_S \frac{\operatorname{div}_0 \mathbf{u}}{r} \, dS,$$

essendo $\mathbf{n}$ un vettore unitario parallelo alla normale interna a σ; la quale dimostra che $\operatorname{div} \mathbf{w}$ è la somma di due potenziali ordinarii di spazio e di semplice strato. Riferendoci alle proprietà di questi potenziali, si deduce

subito che grad div $\mathbf{w}$ è discontinuo attraverso σ, e che la discontinuità è rappresentata da $8\pi w^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Calcoliamo ora la rotazione di w.

Si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \int_S \operatorname{rot} \gamma \mathbf{u} \, dS = \int_S \operatorname{Rot} \gamma \,.\, \mathbf{u} \, dS \,.$$

Ma

$$\operatorname{Rot} \gamma = 2\Omega^2 \operatorname{Rot} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{Rot} \frac{d \operatorname{grad} r}{dP} = 2\Omega^2 \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge ;$$

quindi

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = 2\Omega^2 \int_S \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u} \, dS = -2\Omega^2 \int_S \frac{\operatorname{grad} r \wedge \mathbf{u}}{r^2} dS \,.$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = -2\Omega^2 \int_S \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u} \, dS = -2\Omega^2 \int_S \left(\operatorname{rot}_0 \frac{\mathbf{u}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{rot}_0 \mathbf{u} \right) dS$$

$$= 2\Omega^2 \int_\sigma \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{n}}{r} d\sigma + 2\Omega^2 \int_S \frac{\operatorname{rot}_0 \mathbf{u}}{r} dS ;$$

che sono due potenziali vettori ordinarii di spazio e di semplice strato. E però, riferendoci alle loro proprietà, deduciamo che rot $\mathbf{w}$ è finito e continuo ovunque, e che invece rot rot $\mathbf{w}$ prova attraverso σ la discontinuità $2\Omega^2[4\pi \mathbf{u} - 4\pi(\mathbf{u} \times \mathbf{n})\mathbf{n}]$.

Da tutto ciò risulta che

$$E\mathbf{w} = \Omega^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} - \omega^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

prova, attraverso σ, la discontinuità $-8 w^2 \Omega^2 \pi \mathbf{u}$.

Si verifica poi, subito, che all'esterno di S è

$$E\mathbf{w} = 0 ;$$

e allora dalle cose precedenti si deduce che nei punti di S è

$$E\mathbf{w} = -8\omega^2 \Omega^2 \pi \mathbf{u} ; \tag{1'}$$

teorema analogo a quello di Poisson. In conclusione: *il potenziale newtoniano di spazio dell'elasticità è finito e continuo ovunque insieme con la divergenza e con la rotazione; all'esterno di* σ *soddisfa l'equazione* (1); *all'interno la* (1').

3. Sia ora $\mathbf{u}$ funzione dei soli punti O di σ; e poniamo

$$\mathbf{v} = \int_\sigma \gamma \mathbf{u} \, d\sigma , \tag{5}$$

ove γ è sempre la dilatazione definita di sopra. Anche questo $\mathbf{v}$ è un vettore funzione del punto P, finito e continuo ovunque. Sarà chiamato il *potenziale newtoniano di semplice strato dell'elasticità.*

Risulta, come sopra,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 2\omega^2 \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u} \, d\sigma .$$

Posto

$$\mathbf{v}' = \int_\sigma \frac{\mathbf{u}}{r} \, d\sigma ,$$

che è un ordinario potenziale-vettore di semplice strato, si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{u} \, d\sigma ;$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 2\omega^2 \operatorname{div} \mathbf{v}' .$$

Siccome, per cose note, $\operatorname{div} \mathbf{v}'$ prova, attraverso σ, la discontinuità $4\pi(\mathbf{u} \times \mathbf{n})$, così anche $\operatorname{div} \mathbf{v}$ prova la discontinuità $8\pi w^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{n})$.

Analogamente, risulta, come sopra,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\Omega^2 \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u} \, d\sigma ;$$

e, per $\mathbf{v}'$, si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}' = \int_\sigma \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge \mathbf{u} \, d\sigma :$$

dunque

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{w}^2 \operatorname{rot} \mathbf{v}' ,$$

Attraverso σ, essendo $4\pi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$ la discontinuità di $\operatorname{rot} \mathbf{v}'$, $8\pi\Omega^2(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$ sarà quella di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

Poichè

$$E\mathbf{v} = 2\omega^2 \, \Omega^2 \, \Delta' \mathbf{v}' ;$$

e, per cose note, $\Delta' \mathbf{v}'$ è nullo ovunque, risulta, in ogni punto dello spazio,

$$E\mathbf{v} = 0 :$$

Si conclude*: il potenziale newtoniano di semplice strato dell'elasticità è finito e continuo ovunque, e ovunque soddisfa all'equazione* (1); *la divergenza e la rotazione son discontinue attraverso* σ.

4. Consideriamo ancora il potenziale precedente

$$\mathbf{v} = \int_\sigma \gamma \mathbf{u} \, d\sigma ;$$

e diamo ad ogni punto O di σ uno spostamento infinititesimo ε lungo la normale a σ. Otterremo una superficie σ_1 parallela a σ, il cui potenziale sarà

$$\mathbf{v}_1 = \int_{\gamma_1} \gamma_1 \mathbf{u}\, d\sigma .$$

Risulta evidentemente

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \int_\sigma d\gamma\mathbf{u}\, .\, d\sigma = \int_\sigma \frac{d\gamma\mathbf{u}}{dO}\, dO \quad d\sigma .$$

Ma essendo $dO = \varepsilon\mathbf{n}$, si ha ancora

$$(0) \qquad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \int_\sigma \varepsilon \frac{d\gamma\mathbf{u}}{dO}\,\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{d\gamma}{dO}\,\mathbf{n}\right) \varepsilon\mathbf{u}\, d\sigma ,$$

perchè, rispetto a cotesta differenziazione, l'$\mathbf{u}$ è costante. Possiamo pensare $\mathbf{u}$ grandissimo, per modo che $\varepsilon\mathbf{u}$ risulti finito; e poi scrivere semplicemente $\mathbf{u}$ al posto di $\varepsilon\mathbf{u}$.

Orbene

$$(5) \qquad \mathbf{v}_1 = \int_\sigma \left(\frac{d\gamma}{dO}\,\mathbf{n}\right) \mathbf{u}\, d\sigma$$

sarà chiamato il *potenziale newtoniano di doppio strato dell'elasticità*; perchè è il potenziale dell'elasticità relativo a due fogli σ sovrapposti, nei cui punti corrispondenti sono applicati due vettori $\mathbf{u}$ eguali ed opposti; come risulta dalla (0).

Dalla definizione stessa risulta che questo $\mathbf{v}_1$ soddisfa l'equazione (1). Esso è discontinuo attraverso σ; ma lo studio preciso della discontinuità richiede calcoli assai lunghi, che qui omettiamo.

In un'altra Nota mostrerò che questi potenziali sono gli elementi analitici fondamentali della teoria generale dell'elasticità.

Meccanica. — *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività.* Nota della sign.na Clarice Munari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

La traduzione matematica del principio di relatività si esplica nella determinazione di un gruppo di trasformazioni puntuali T, fra due quaterne (x, y, z, t) (x', y', z', t') (interpretabili come luogo e tempo d'un fatto determinato rispetto a due riferimenti diversi) dotate di particolari proprietà.

Le proprietà, in base a cui si caratterizzano le T sono state, per la prima volta, discusse da Einstein, il quale, nella celebre Memoria *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Annalen der Physik, 1905), le illustrò dal punto di vista fisico, includendovi in particolare (come fosse necessaria conseguenza dell'omogeneità dello spazio fisico) la condizione di linearità.

Dal punto di vista geometrico, la teoria dell'Einstein fu illustrata da Minkowski (1), con un criterio, si potrebbe dire, fusionista di spazio e di tempo.

Anche il Minkowski ammette però *a priori* la linearità della trasformazione.

Una formulazione fisica e matematica assai soddisfacente si trova nella Memoria di Brill (2).

Egli, partendo dalle medesime premesse di Einstein, si propone di trovare le formule di trasformazione, che ammettono come invarianti tutti i possibili sistemi di onde sferiche (propagantisi con velocità costante c), qualunque sia il centro $(x_0 y_0 z_0)$ e l'istante iniziale t_0 della perturbazione.

Ciò è quanto dire che l'equazione

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

deve costituire un invariante bipuntuale.

Però anche il Brill, nel procedere alla effettiva ricerca delle T, ne ammette ulteriormente la linearità (3).

In realtà, questa ipotesi complementare è superflua; ciò risulta dall'osservare che l'invarianza della (1) implica in particolare l'invarianza della

$$(2) \qquad dx^2+dy^2+dz^2-c^2\,dt^2=0$$

quando si suppongano le due quaterne infinitamente vicine.

Ora, se la (2) si conserva, basta interpretare le $x, y, z, ict=x_4$ come coordinate di uno spazio S_4 euclideo, ed imporre inoltre alle **T**, che *in tutto il campo reale*, a valori finiti di x, y, z, t, facciano corrispondere valori pure finiti di x', y', z', t'; per poter facilmente dimostrare, in base alla teoria dei gruppi conformi, che le formule in questione sono lineari.

Di ciò dovrò io pure occuparmi nella presente Nota, la quale (seguendo l'indirizzo delle lezioni tenute lo scorso anno dal prof. Levi-Civita all'Uni-

(1) Minkowski, *Spazio e tempo.* Nuovo Cimento, ser. 5ª, vol. XVIII, 1909. Oppure: Castelnuovo, *Il principio di relatività e i fenomeni ottici.* Scientia, vol. IX, anno V (1911).

(2) Brill, *Das Relativitätsprinzip.* Jahresbericht der deutschen Matematiker. Vereingung, 1912.

(3) A questo proposito rileverò che il sig. Kraft ha assegnato in una recente Memoria (*Ueber die Eingenschaften Linearer Raum-Zeit-Transformationen,* Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, décembre 1912) tutte le trasformazioni fra due quaterne (x, y, z, t) e (x', y', z', t') che, verificando parte dei postulati di Einstein, conservano *ogni* movimento uniforme (qualunque sia la velocità).

Ciò implica la linearità, come rileva il sig. Kraft.

La sua ricerca è però discretamente laboriosa, per deduzioni concettuali e sviluppi di calcolo, e fa direttamente intervenire, accanto alla condizione cinematica suaccennata (già per sè esuberante in quanto contempla tutte le velocità), la geometria relativistica, prescindendo solo dal postulato della costanza della velocità della luce.

versità di Padova) mira a sostituire alle intuizioni ed ipotesi più complesse da cui si fa discendere la forma analitica delle T, quest'unica condizione cinematica che: *un moto rettilineo uniforme con velocità* c, *si muti per effetto di* T *in un moto pure rettilineo uniforme con velocita* c.

Una tale condizione, oltre all'evidente vantaggio d'avere una forma semplice ed espressiva, costituisce ovviamente la vera traduzione schematica del postulato fisico della costanza della velocità della luce, in quanto, nell'ambito cinematico, i fenomeni luminosi altro non sono, se non casi particolari di movimenti i quali seguono con velocità c, e riescono (con speciali dispositivi) suscettibili di delicato apprezzamento sperimentale.

1. Problema. — *Determinare l'espressione più generale di una trasformazione puntuale fra due quaterne* (x, y, z, t), (x', y', z', t'), *per effetto della quale si conservano i movimenti uniformi dotati di una assegnata velocità* c; *ed in tutto il campo reale, a valori finiti di* x, y, z, t *corrispondano valori finiti di* x', y', z', t'.

Ove giovi per abbreviare la scrittura, indichiamo le x, y, z con x_1, x_2, x_3 e analogamente le x', y', z' con x'_1, x'_2, x'_3.

Le cercate formule di trasformazione siano:

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_r = f_r(x_1, x_2, x_3, t) & (r = 1, 2, 3), \\ t' = \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

colle conseguenti relazioni fra i differenziali delle due quaterne:

$$(2) \qquad \begin{cases} dx'_r = \dfrac{\partial f_r}{\partial t} dt + \sum_1^3{}_s \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s} dx_s, \\[2ex] dt' = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} dt + \sum_1^3{}_s \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_s} dx_s. \end{cases}$$

Mediante le (1), ad ogni moto $\mathfrak{M}$ definito dalle equazioni

$$x_s = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, 2, 3)$$

fa riscontro una curva dello spazio x', y', z', t' (risultando x', y', z', t' espressi in funzione del parametro t). Questa curva sarà essa pure interpretabile come un movimento $\mathfrak{M}'$, a patto che dall'ultima delle (1) [in cui si ponga $x_s = \varphi_s(t)$]

$$t' = \mathrm{F}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t)$$

si possa ricavare t in termini di t'. Di ciò si è assicurati se

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \dot{z}$$

riesce diverso da zero per il movimento $\mathfrak{M}$.

2. Per ipotesi, ogni qualvolta $\mathfrak{M}$ è rettilineo uniforme ed ha la velocità c, lo stesso deve accadere per $\mathfrak{M}'$. Ciò si può anche esprimere dicendo che, dall'essere per un *generico moto rettilineo uniforme*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2 = 0 \tag{3}$$

segue che si ha, nel sistema trasformato, un moto *pure rettilineo uniforme*, per cui

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\, dt'^2 = 0\,. \tag{3'}$$

Dico che posso risguardare, nel discutere le conseguenze dell'ipotesi [che (3') scende da (3) in virtù delle formule di trasformazione (1), (2)], $x, y, z, t, dx, dy, dz, dt$, come quantità legate dalla sola (3), ossia che posso attribuire a 7 di queste quantità, valori numerici arbitrarî, purchè l'8° si intenda ricavato dalla (3) stessa.

Ciò risulta ovviamente dal riflettere che, scelti a piacimento 8 valori numerici sotto la indicata restrizione, e quindi del tipo

$$x_0\,,\ y_0\,,\ z_0\,,\ t_0\,,\ dx_0 = c\alpha\, dt_0\,,\ dy_0 = c\beta\, dt_0\,,\ dz_0 = c\gamma\, dt_0$$

(con α, β, γ coseni di direzione) esiste effettivamente un moto rettilineo uniforme, per cui nell'istante t_0 il mobile occupa la posizione x_0, y_0, z_0, ed è animato da velocità c nella direzione α, β, γ.

3. Ora, sfruttando le (2), si ha:
$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 =$ forma quadratica nei differenziali delle primitive variabili x, y, z, t, a coefficienti che dipendono esclusivamente da x, y, z, t.

Dovendo la (3') essere conseguenza della sola (3), ne consegue la *identità*

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c\, dt'^2 \equiv \lambda\, (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2)$$

dove λ è funzione delle sole coordinate.

Pongo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,, \qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\,;$$

con ciò la nostra identità assume l'aspetto

$$ds'^2 - c^2\, dt'^2 \equiv \lambda\, (ds^2 - c^2\, dt^2)\,. \tag{4}$$

Riferiamoci a determinazioni delle $x, y, z, t, dx, dy, dz, dt$, per cui *non* sia $ds^2 - c^2 dt^2 \equiv 0$, e indichiamo per comodità e uniformità di notazione, i ct con x_4, i ct' con x'_4.

La (4) può allora scriversi

$$\sum_1^4{}_i\, dx_i'^2 \equiv \lambda \sum_1^4{}_i\, dx_i^2\,, \tag{4'}$$

e mette in evidenza che, fra le quaterne x_i, x'_i, interpretate come coordinate di uno spazio S_4 euclideo, passa una trasformazione conforme.

Ora il teorema di Liouville [1] dice che:

Le più generali trasformazioni conformi dello spazio euclideo di $n > 2$ dimensioni in se stesso, si ottengono combinando le inversioni per raggi vettori reciproci, coi movimenti e colle similitudini.

Da questo teorema risulta, che la nostra trasformazione sarà: o *lineare*, ovvero prodotto di trasformazioni lineari con una *inversione per raggi vettori reciproci.*

Alla condizione poi, imposta alle T, di far corrispondere, in tutto il campo reale, a valori finiti di x, y, z, t, valori finiti di x', y', z', t', soltanto le trasformazioni lineari soddisfano: possiamo così concludere, che l'espressione più generale delle formule cercate è

$$x'_i = a_i + \sum_{1}^{4}{}_j\, a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{5}$$

le a essendo costanti, e il determinante D dei coefficienti a_{ij} diverso da zero. Essendo λ il moltiplicatore (necessariamente costante) che, a norma della (4'), compete alla (5), pongasi

$$x_i^* = \sum_j \frac{a_{ij}}{\sqrt{\lambda}} x_j . \tag{6}$$

$$x''_i = \sqrt{\lambda}\, x_i^* . \tag{7}$$

$$x'_i = a_i + x''_i . \tag{8}$$

La (5) può manifestamente risguardarsi come prodotto delle tre sostituzioni lineari (6), (7), (8).

Dalle due ultime si ha

$$dx'_i = \sqrt{\lambda}\, dx_i^* ,$$

talchè la (4') equivale a

$$\sum_{1}^{4}{}_i\, dx_i^{*2} = \sum_{1}^{4}{}_i\, dx_i^2 . \tag{9}$$

La (9) mostra che la (6) è un moto rigido dello spazio euclideo S_4, più precisamente anzi (siccome l'origine $x_i = 0$ rimane fissa) una rotazione rigida attorno all'origine: quindi (nel campo reale x, y, z, t; x', y', z', t') una *trasformazione di Lorentz* [2].

[1] Cfr. per es. Bianchi, *Geometria differenziale*, vol. I, § 170.

[2] Cfr. in particolare, Marcolongo, *Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica*, in questi Rendiconti, vol. XV (1° semestre 1906).

Le (7) ed (8) interpretate nel campo x, y, z, t corrispondono manifestamente: la prima ad una trasformazione moltiplicativa, che opera egualmente sulle coordinate di spazio e su t, e lascia quindi inalterate le velocità; (quale per es. risulta da cambiamenti delle unità di lunghezza e di tempo vincolati alla condizione di non influire sulla misura delle velocità); la seconda ad un arbitrario spostamento dell'origine del sistema di riferimento, e dell'origine dei tempi.

Come si vede, le T coincidono essenzialmente (a meno cioè di trasformazioni elementari, *a priori* evidenti) colle trasformazioni di Lorentz. Nella loro totalità (in quanto cioè si combinino anche colle sopraddette trasformazioni elementari), esse costituiscono un gruppo lineare ∞^{11}.

4. Prescindendo dalla restrizione, che a valori finiti della quaterna x_i, corrispondano valori pure finiti della quaterna x'_i, possiamo facilmente vedere, che non soltanto le ∞^{11} trasformazioni (5), ma anche una generica trasformazione del gruppo conforme (∞^{15}, nel caso nostro di un S_4 euclideo), conserva i moti uniformi con velocità c.

Invero, sia $\mathfrak{M}$ un moto rettilineo uniforme con velocità c; e sia T una trasformazione del gruppo conforme. Se questa si riduce ad un movimento, o ad una similitudine, ricadiamo nell'ambito delle trasformazioni lineari.

Escluso tale caso particolare, si può sempre, come è ben noto, risguardare la T come prodotto di trasformazioni lineari [verificanti tutte la (4') e quindi la voluta condizione cinematica] per una inversione rappresentata sotto la forma tipica

$$(10) \qquad x'_i = \frac{x_i}{r^2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

con

$$r^2 = \sum_1^4 {}_i\, x_i^2 .$$

Tutto si riduce quindi a far vedere che tale inversione conserva i moti rettilinei uniformi con velocità c.

Poichè le (10) rimangono invariate, quando si fa subire a *entrambi* i triedri $Oxyz$, $O'x'y'z'$ una *qualsiasi* rotazione, possiamo, senza pregiudizio della generalità, supporre che il triedro $Oxyz$ sia orientato in modo che il piano Oxy contenga la retta sede del movimento $\mathfrak{M}$, e l'asse Ox risulti ad essa parallelo.

Allora le equazioni che definiscono il moto, rispetto al triedro $Oxyz$, sono

$$\begin{cases} x = a + ct, \\ y = b, \end{cases}$$

e passando dalle x_i alle x'_i per mezzo delle (10), abbiamo:

$$(11)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a + ct}{a^2 + b^2 + 2act}, \\[2ex] y' = \dfrac{b}{a^2 + b^2 + 2act}, \\[2ex] t' = \dfrac{t}{a^2 + b^2 + 2act}. \end{cases}$$

Dall'eliminazione di t fra le (11) risulta il moto corrispondente, definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} ct', \\[2ex] y' = \dfrac{b}{a^2 + b^2} - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} ct'. \end{cases}$$

le quali dicono che $\mathfrak{M}'$ è rettilineo uniforme, e segue ancora con velocità c.

Vediamo dunque che abbiamo bensì un gruppo ∞^{15} di trasformazioni, che conservano i movimenti uniformi con velocità c, ma non è rispettata la condizione qualitativa che rimanga sempre finita la corrispondenza nel campo reale: così per es. le nostre formole (11) ove a e b si facciano entrambi convergere a zero, dànno $x' = \infty$ per un generico valore di t.

Astronomia pratica. — *Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico.* Nota di G. Silva, presentata dal Socio Millosevich.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [1] il prof. G. A. Favaro, riassumendo quanto altri autori avevano già esposto sull'argomento indicato dal titolo qui sopra scritto, aggiungeva alcune considerazioni alle quali era stato condotto prendendo in esame la questione. Ricordava egli in particolare che nel determinare la cosidetta *correzione di run* può essere seguìto o il metodo del *run medio*, o quello del *run* da lui chiamato *attuale*, e si soffermava specialmente su questo secondo metodo per svolgere qualche procedimento di calcolo e per concludere con alcuni consigli pratici. Mi parve cosa di qualche interesse approfondire la questione della scelta dell'uno o dell'altro metodo, questione che mi si era già presentata altra volta studiando uno strumento universale, e qui esporrò il risultato al quale giunsi in questa particolare ricerca.

[1] *Sulle correzioni alle letture dei cerchi*, ecc. Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem. 1913, pag. 209.

2. Sieno A e $A + F$ i due tratti consecutivi della graduazione, tra i quali cade lo *zero micrometrico* o *linea di fede* del microscopio; con A intenderò anche quel numero di gradi e primi d'arco che corrisponde al tratto precedente, e con F il numero di secondi d'arco compresi fra due tratti successivi della graduazione. Sieno l_1 ed l_2 le letture al microscopio [1], fatte portando il doppio filo mobile a collimare rispettivamente i tratti A e $A + F$, e si supponga che nel movimento del filo mobile dal tratto $A + F$ allo zero micrometrico, e da questo al tratto A le letture sul tamburo della vite micrometrica vadano crescendo. Sia in fine F' quel numero di parti, multiplo del numero delle parti contenute in una intera o in una mezza rivoluzione, che *a microscopio esattamente aggiustato* corrisponde a un intervallo di F secondi del cerchio; generalmente F' è eguale ad F o alla sua metà. In pratica ad un intervallo di F secondi, invece di F', corrisponderanno $F' + r$ parti ed r sarà il cosidetto *run*.

Supposto che le letture l_1 ed l_2 sieno state fatte su due tratti della graduazione esattamente distanti di F *secondi, con un microscopio perfetto* (anche se non esattamente aggiustato per quanto riguarda la sua distanza dal cerchio), *senza alcun errore personale di collimazione e di lettura*, il valore esatto del *run* relativo alla particolare posizione del microscopio, è $r = l_1 - l_2$, e il valore p di una parte del microscopio, in secondi, sarà:

$$p = \frac{F}{F' + r} = \frac{F}{F'}\left(1 - \frac{r}{F' + r}\right).$$

Nella precedente ipotesi le *esatte* distanze della linea di fede del microscopio dai tratti della graduazione precedente e seguente, espresse in parti, sono l_1 e $F' - l_2$; quindi la lettura del cerchio che deriva dalle due letture l_1, l_2, separatamente o insieme considerate, può scriversi sotto una qualunque delle forme

$$L = A + \frac{F l_1}{F' + r} = A + \frac{F}{F'}\left[l_1 - l_1 \frac{r}{F' + r}\right] \tag{1}$$

$$L = A + F - \frac{(F' - l_2)\,F}{F' + r} = A + \frac{F}{F'}\left[l_2 + (F' - l_2)\frac{r}{F' + r}\right] \tag{2}$$

$$L = A + \frac{F}{F'}\left[\frac{l_1 + l_2}{2} + \left(\frac{F'}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2}\right)\frac{r}{F' + r}\right] \tag{3}$$

[1] Per prima lettura l_1 si deve intendere, come è noto, la somma della lettura a_1 effettivamente fatta sul tamburo della vite micrometrica quando si collima il tratto A, e del numero che risulta moltiplicando le intere (o mezze) rivoluzioni compiute dalla vite stessa per il numero, generalmente 60, delle parti in cui è diviso l'intero giro del tamburo (o per quello, generalmente 30, delle parti in cui è divisa ciascuna delle metà del

algebricamente identiche, come è facile verificare, ponendo $l_1 - l_2$ in luogo di r.

3. In pratica, per non essere soddisfatta la ipotesi sopra ammessa, le letture l_1 ed l_2 sono affette da errori e la lettura L del cerchio può essere allora calcolata o trascurando l'errore di *run*, o in uno dei due modi seguenti.

I) *Metodo del run medio.* — Da più coppie di letture l_1, l_2 fatte al microscopio nelle varie letture del cerchio di una serie di osservazioni si deducono più valori $l_1 - l_2$ del *run*, e se ne fa la media r. Sostituendo questa nella (1) e nella (2) si hanno due valori di L, indipendenti tra loro e generalmente non coincidenti; si adotta perciò come lettura del cerchio la loro media che ha l'espressione (3). Questa è, sotto forma molto più concisa, la espressione trovata dal Weineck [1] e, per $F = F'$ (nel qual caso una parte corrisponde a 1 secondo d'arco), il secondo termine di L nella (3), coincide con l'espressione data dall'Albrecht [2], ove si tenga conto della differenza del segno di r. Trascurando nella (3) i termini di secondo ordine in r, essa può essere scritta anche sotto la forma

$$(4) \qquad L_I = A + \frac{F}{F'}\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{F}{F'}\left(\frac{1}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right) r .$$

Salvo le differenti notazioni, a questa stessa forma, nel caso di $F = F'$, giunge lo Jordan nelle più recenti edizioni del suo *Handbuch der Vermessungskunde* [3].

II) *Metodo del run attuale.* — Se si adotta per r il *run* attuale, cioè la differenza $l_1 - l_2$ osservata nella stessa lettura del cerchio che si tratta di calcolare, si ha allora la lettura L sotto una qualunque delle formole (1), (2), (3) tra loro identiche, come si è detto, quando vi si metta $l_1 - l_2$ in luogo di r. La stessa L può assumere anche altre espressioni, sempre identiche algebricamente alle precedenti, come, ad esempio, la seguente che

---

tamburo). E per seconda lettura l_2 si deve intendere analogamente il numero di parti che si ottiene addizionando allo stesso prodotto la lettura a_2 fatta sul tamburo della vite micrometrica allorchè si collima il secondo tratto della graduazione $A + F$. In pratica questo piccolo calcolo di l_1 ed l_2 non viene fatto, poichè dal numero di rivoluzioni si ottengono senz'altro i minuti primi, e dalle letture effettive a_1 a_2 i minuti secondi.

(1) *Der Mikroskop-Run.* Astr. Nachr. N. 2605, Bd. 109.

(2) *Formeln und Hilfstafeln,* 1908, pag. 49.

(3) Cfr. vol. II, 3ª edizione, 1888, pag. 151 e 4ª ediz., 1908, pag. 240. Nella 2ª edizione (1877, vol. I, pag. 229) lo Jordan indicava invece con un esempio numerico il metodo del *run* attuale.

si può ottenere dalla (1) riducendo i termini entro la parentesi quadrata dell'ultimo membro allo stesso denominatore e semplificando

$$L = A + \frac{F}{F'} \frac{(F' - l_2)\, l_1 + l_1\, l_2}{(F' - l_2) + l_1}.$$

Questa esprime che, *quando per il run si assume la differenza delle due letture osservate ai microscopî (run attuale), queste, nel calcolo della lettura del cerchio, hanno peso inversamente proporzionale alla distanza della linea di fede dal tratto della graduazione al quale si riferiscono* [1].

Per il calcolo pratico di **L** si possono trascurare i termini di secondo ordine nella quantità di primo ordine $r = l_1 - l_2$, e in tal caso si ottiene per L, ad es. dalla (3),

$$(5) \qquad L_{II} = A + \frac{F}{F'}\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{F}{F'}\left(\frac{1}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)(l_1 - l_2).$$

Nel caso di $F = 2\,F'$ il terzo termine di questa formola è la correzione $\Delta(l_1 + l_2)$ da applicare alla somma delle due letture $l_1 + l_2$, già indicata dal Lorenzoni [2].

Nelle formole (4) e (5) i due primi termini, identici in entrambe, dànno la lettura del cerchio senza tener conto della correzione del *run*, il terzo termine, che differisce nelle due formole solo per l'ultimo fattore (che è il *run* medio nella prima e il *run* attuale nella seconda) dà la correzione di *run*.

4. L'errore sistematico della graduazione, comune a più tratti consecutivi, per il quale questi tratti sono tutti spostati in uno stesso senso rispetto alla esatta posizione che dovrebbero avere, rimane per intero nella lettura L, tanto se questa è calcolata col metodo del *run* medio, quanto se è calcolata con quello del *run* attuale. Prescindendo da questo errore sistematico considero i seguenti errori: errori accidentali di graduazione per i quali gli intervalli fra tratti consecutivi possono essere alquanto differenti tra loro, e dal valore F che dovrebbero avere; errori dovuti alle imperfezioni del microscopio e in particolare a quelle della sua vite micrometrica e della divisione del tamburo di questa; errori personali di collimazione e di let-

[1] Segue immediatamente da questa proposizione che quando l_1 ed l_2 sono eguali a circa la metà di F′, la precisione della lettura micrometrica è quella della media di due puntate (l_1 ed l_2); quando invece l_1 ed l_2 sono circa 0 o F′, la precisione della lettura micrometrica è quella di una sola puntata. Nei casi estremi, se $l_1 = 0$, la lettura L del cerchio è uguale ad A, qualunque sia la lettura l_2 al secondo tratto della graduazione, e se $l_2 = F'$, la lettura del cerchio è eguale ad $A + F$ qualunque sia la lettura l_1 al primo tratto.

[2] *Determinazioni di azimut*, ecc. Pubbl. della R. Comm. Geod. It. Padova, **1891**.

tura al microscopio. Si supponga determinato l'error medio μ del *run* attuale $l_1 - l_2$ dovuto a questi errori; l'error medio di l_1 o di l_2 sarà $\varepsilon_l = \mu : \sqrt{2}$ e da questo error medio sarà facile dedurre quello di una lettura L_{II} calcalcolata col metodo del *run* attuale.

Per dedurre l'analogo error medio di una lettura L_I calcolata col metodo del *run* medio, oltre all'errore medio ε_l di l_1 e l_2, occorre conoscere quello ε_r di r. Ora r è la media di un certo numero n di valori del *run* e l'error medio di essa, in causa degli errori sopra accennati, è $\mu : \sqrt{n}$. Ma i singoli valori del *run* non differiscono tra loro e dalla loro media solo per gli errori suddetti, ma anche per le eventuali variazioni che può subire la distanza reciproca tra microscopio e lembo nelle successive letture, o per altri errori che intervengono solo al variare delle posizioni del microscopio rispetto al cerchio. Sia ν l'error medio di un valore del *run* dovuto a questo secondo tipo di cause di errore. Introducendo nel calcolo di L_I il *run* medio, che corrisponde a una posizione media del microscopio rispetto al lembo, in luogo del *run* esatto attuale (incognito) relativo alla particolare posizione del microscopio nella lettura del cerchio che si considera, si commette quindi su r un errore dell'ordine degli scostamenti dei valori attuali del *run*, supposti privi degli errori di primo tipo, dalla loro media, scostamenti dai quali si dovrebbe dedurre, qualora fossero noti, l'error medio ν. In conclusione l'error medio ε_r del *run* medio, introdotto nella (4) per calcolare una determinata lettura, è l'insieme di due parti, e precisamente si ha

$$\varepsilon_r^2 = \mu^2 : n + \nu^2 .$$

Si applichi ora alla (4) nel caso del *run* medio e alla (5) nel caso del *run* attuale il teorema che permette di dedurre l'error medio di una funzione di più grandezze quando sono noti gli errori medî di queste grandezze; si trascurino le potenze superiori alla seconda di ε_l, ε_r, r, $l_1 - l_2$, e si otterranno gli errori medî M_I^2 ed M_{II}^2 di una lettura L, a seconda che è calcolata col metodo del *run* medio o con quello del *run* attuale, dalle relazioni

$$M_I^2 = \left(\frac{\partial L_I}{\partial l_1}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_I}{\partial l_2}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_I}{\partial r}\right)^2 \varepsilon_r^2 =$$

$$= \frac{F^2}{F'^2}\left[\frac{\varepsilon_l^2}{4} + \frac{\varepsilon_l^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_r^2\right]$$

$$M_{II} = \left(\frac{\partial L_{II}}{\partial l_1}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{\partial L_{II}}{\partial l_2}\right)^2 \varepsilon_l^2 = \frac{F^2}{F'^2}\left[\left(1 - \frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_l^2 + \left(\frac{l_1 + l_2}{2F'}\right)^2 \varepsilon_l^2\right].$$

Il fattore $F^2 : F'^2$ serve solo a trasformare il quadrato (contenuto fra le parentesi quadre) dell'error medio m espresso in parti, in quello dell'errore

medio M espresso in secondi. Determinando $m_{\rm I}$, $m_{\rm II}$ in parti, in luogo di $M_{\rm I}$, $M_{\rm II}$, sostituendo a ε_l^2 e ε_r^2 i loro valori e ponendo

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2\,F'}$$

si ha

$$m_{\rm I}^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \left(\frac{\mu^2}{n} + \nu^2\right)$$

$$m_{\rm II}^2 = (1-x)^2 \frac{\mu^2}{2} + x^2 \frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \mu^2 \,.$$

I due errori medî sono funzioni di x che può variare da 0 ad 1 al variare della posizione dello zero micrometrico rispetto ai due tratti della graduazione che lo comprendono. Il minimo di $m_{\rm I}^2$ ed $m_{\rm II}^2$ si ha per $x = \frac{1}{2}$, ed è uguale a $\frac{\mu^2}{4}$ in tutti e due i casi. Fuori del minimo è sempre

$$m_{\rm I}^2 \lesseqgtr m_{\rm II}^2 \quad \text{a seconda che} \quad \nu^2 \lesseqgtr \mu^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Se il numero n è sufficientemente grande, $1:n$ si può trascurare rispetto all'unità, e si può allora concludere che *quando si ritenga utile tener conto della correzione di run è (teoricamente) preferibile adottare il metodo del run medio piuttosto che quello del run attuale, o viceversa, a seconda che l'error medio ν di un valore del run dovuto essenzialmente alle variazioni di distanza del microscopio dal cerchio è minore, o maggiore, dell'error medio μ di un valore dovuto alle ineguaglianze degli intervalli fra tratti consecutivi della graduazione, alle imperfezioni del microscopio e agli errori personali di collimazione e di lettura.*

5. Per l'applicazione pratica di questo criterio teorico si può notare quanto segue. Spesso, nel caso di cerchi graduati di non grande diametro, gli errori personali di collimazione e di lettura sono dello stesso ordine di tutti gli altri errori insieme considerati [1], compresi quelli dovuti alla variabile posizione del microscopio rispetto al lembo; impropriamente l'insieme di tutti questi altri errori è detto da taluno errore accidentale di graduazione. In tali casi il metodo del *run* medio è certo preferibile a quello del *run* attuale.

In caso diverso, per la determinazione approssimata di μ e ν, si può seguire il metodo seguente. Si determini una serie di h valori del *run* rela-

[1] Cfr. A. Venturi, *Azimut di Monte Alfano*, ecc. Pubbl. della Comm. Geod. Ital. Palermo, 1892; V. Reina, *Azimut assoluto di Monte Cavo*, ecc. Idem, Padova, 1894; G. Silva, *Lo strumento universale « Bamberg »*, ecc. Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A., vol. LXX, 1910-11, pag. 1411.

tivi agli h intervalli fra $h+1$ tratti consecutivi della graduazione, per esempio quelli contenuti in un grado, avendo cura di far ruotare il microscopio rispetto al cerchio, o questo rispetto a quello con l'apposita vite dei piccoli movimenti. La stessa operazione si ripeta in k regioni del cerchio, distribuite uniformemente sull' intera circonferenza, o meglio su quella sola parte di essa che viene adoperata nelle osservazioni a cui serve lo strumento. Si facciano gli scostamenti degli h valori di ciascuna serie dalla loro media, e da essi si deduca l'error medio di un valore che sarà molto approssimativamente μ, inquantochè si può ritenere che con le opportune cautele nelle osservazioni il microscopio non si sia allontanato dal cerchio, o avvicinato ad esso durante una stessa serie; indi si facciano gli scostamenti delle medie delle k serie dalla media generale, e si determini l'error medio ν_1 della media di una serie; si avrà allora ν dalla relazione

$$\nu^2 = \nu_1^2 - \frac{\mu^2}{h}$$

6. All'atto pratico gioverà tener conto anche della maggior brevità del metodo del *run* medio rispetto a quello del *run* attuale. Per questo si usano ordinariamente tabelle a due argomenti, o, se viene usata per maggiore semplicità una tabella ad un solo argomento, questa non dà direttamente la correzione di *run*; al metodo del *run* medio possono bastare invece le ordinarie tavole di moltiplicazione. Si noti infatti che l'ultimo termine della (4) si può scomporre in due fattori, l' uno costante per tutte le letture del cerchio di una serie di osservazioni, l'altro variabile da una lettura all'altra, per es. si può considerare come costante il fattore $\frac{r}{F'}$, e come variabile, da $+\frac{F}{2}$ a $-\frac{F}{2}$, l' altro fattore $\frac{F}{2}-\frac{F}{F'}\frac{l_1+l_2}{2}$, che è la differenza tra $\frac{F}{2}$ e la lettura del microscopio non corretta per il *run* [il secondo termine della (4)]. Per fissare meglio le idee supponiamo il cerchio diviso di 3 in 3 primi, $F'=F=180$. Ai valori

$$\begin{array}{llll} +1 & +2 \;\ldots\ldots\; +89 & +90 \\ -1 & -2 \;\ldots\ldots\; -89 & -90 \end{array}$$

del fattore variabile corrispondono i valori

$$\begin{array}{llll} 1'29'' & 1'28'' \;\ldots\ldots\; 0'1'' & 0'0'' \\ 1'31'' & 1'32'' \;\ldots\ldots\; 2'59'' & 3'0'' \end{array}$$

della lettura del microscopio non corretta per il *run*. Trascriviamo questi rispettivamente alla destra e alla sinistra di un foro rettangolare tagliato

in un cartoncino per modo che, sovrapposto il cartoncino ad una tavola di moltiplicazione, apparisca nel foro la sola colonna che contiene i prodotti del fattore costante $\left|\frac{r}{F'}\right|$ per i successivi numeri interi 1, 2, 3, ... 90 e altresì in modo che i corrispondenti valori della lettura non corretti per il *run*, scritti qui sopra, vengano a trovarsi a fianco dei detti prodotti. Questi, col debito segno, saranno senz'altro le correzioni di *run* alle letture corrispondenti.

La scomposizione suddetta in un fattore costante e in uno variabile può essere fatta in varî modi a seconda dei differenti casi; nella mia Nota *Lo strumento universale « Bamberg »*, ecc. (citata più indietro) ne ho già dato un altro esempio.

1′ 29″		1′ 31″
1 28		1 32
1 27		1 3[illegible]
.....		.....
0 2		2 58
0 1		2 59
0 0		3 0

Nella stessa Nota feci pure osservare che se i due microscopî ordinariamente usati nelle letture dei cerchi sono bene rettificati, cosicchè le letture l_1, l_2 fatte su uno di essi sieno molto prossime a quelle l'_1, l'_2 fatte sull'altro, si può dedurre in una sola volta la correzione di *run* alla media delle due letture del cerchio eseguite con i due microscopî, anzichè le due correzioni separate: ciò rende il metodo di calcolo del *run* medio notevolmente più breve di quello del *run* attuale.

Meteorologia. — *L'influenza della orografia sulla distribuzione mensile della nebulosità.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Come è noto, dallo studio comparativo delle isanofele, delle isobare, delle isoterme e dei venti, sono state dedotte leggi generali sulla distribuzione della nebulosità, leggi che sono in stretta relazione con la posizione dei grandi centri di azione dell'atmosfera e che vennero enunciate dal Teisserenc de Bort in base all'insieme delle osservazioni raccolte.

La nebulosità nei diversi mesi ha una marcata tendenza a ripartirsi per zone parallele all'equatore: e mentre all'equatore trovasi il massimo di nebulosità, spostandosi, seguono strisce di minore nebulosità da 15° a 35° di latitudine sia nord che sud, a cui tengono dietro striscie di maggior nebulosità da 35° a 50° di latitudine; e a latitudini superiori, il cielo appare coperto da minor quantità di nubi. Vi sono però alcune circostanze che questa generale ripartizione modificano con perturbazioni, fra cui è da segnalare l'influenza dei venti i quali, se provengono dalle regioni marittime, fanno aumentare la nebulosità nei luoghi posti sotto la loro influenza; mentre se sono venti continentali, apportano sensibile diminuzione. E ancora i venti che si muovono da una regione calda verso una più fredda, dànno luogo ad un aumento di nebulosità. La presenza di elevate o basse pressioni dà luogo rispettivamente a diminuzione o aumento di nebulosità; e infine i rilievi terrestri, accelerando la condensazione o la rarefazione, vi esercitano anch'essi una azione preponderante.

L'interpretazione delle varie influenze locali può ottenersi solo in quelle regioni ove sono diversi osservatorii che posseggano uniformi serie di osservazioni; ma riesce più evidente, qualora si possa procedere a rappresentazioni particolari che permettano di abbracciare l'andamento generale del fenomeno: e credo che a ciò ben corrispondano le rappresentazioni isoplete. Per una generale ricerca sulla distribuzione della nebulosità, sono state esaminate le osservazioni nefoscopiche raccolte in Italia: e poichè quivi si riscontrano caratteristiche regioni tanto diverse dal punto di vista climatico, crediamo opportuno di effettuare tali rappresentazioni per la distribuzione della nebulosità nella valle Padana.

Nell'unita tabella trascriviamo i valori mensili della nebulosità rilevata nelle diverse città situate nell'anzidetta regione e il cui andamento generale viene dato dalle rappresentazioni isoplete che seguono.

	Venezia	Ravenna	Padova	Rovigo	Ferrara	Bologna	Modena	Mirandola	Verona	Mantova	Reggio Em.	Parma	Cremona	Piacenza	Milano	Pavia	Vigevano	Novi Ligure	Alessandria	Novara	Asti
Gennaio	62	60	54	67	62	57	61	61	50	55	62	62	66	60	64	66	57	53	55	53	47
Febbraio	59	51	53	60	54	48	53	51	46	42	53	53	54	49	55	53	46	46	42	45	40
Marzo	62	47	56	60	55	50	56	48	47	42	53	54	55	48	56	54	47	45	42	46	44
Aprile	59	44	53	57	55	49	55	46	48	35	53	55	56	49	58	54	48	43	41	48	43
Maggio	59	40	53	54	54	47	56	46	49	40	54	55	54	50	58	53	49	44	39	50	45
Giugno	54	33	48	51	47	40	49	36	42	33	46	47	49	41	52	49	42	45	31	41	40
Luglio	47	21	37	45	35	30	36	26	32	22	36	34	38	30	43	35	30	28	22	26	33
Agosto	41	19	32	39	32	26	33	27	28	21	32	34	36	28	44	35	29	27	22	28	32
Settembre	50	31	41	44	41	37	43	29	35	33	42	43	44	39	49	45	37	37	33	33	41
Ottobre	63	50	55	61	58	52	59	51	50	45	57	59	61	57	63	64	54	57	54	48	53
Novembre	65	62	57	70	66	61	66	63	59	56	65	67	68	66	71	71	65	65	64	60	56
Dicembre	67	63	59	71	67	61	66	62	59	58	66	66	67	63	66	67	60	58	60	56	48

	Bra	Fossano	Cuneo	Moncalieri	Torino	Desenzano	Bergamo	Brescia	Salò	Como	Sondrio	Stelvio	Treviso	Oderzo	Bassano	Conegliano	Udine	Belluno	Auronzo
Gennaio	48	48	39	48	48	45	50	51	43	39	34	40	55	46	40	42	51	50	37
Febbraio	44	43	36	41	42	44	50	48	43	41	37	41	55	49	42	46	53	55	43
Marzo	49	52	47	48	48	46	54	51	49	47	44	51	59	54	48	52	59	62	47
Aprile	52	55	51	51	51	46	59	52	51	51	47	58	56	54	48	53	62	67	53
Maggio.	53	58	52	54	54	45	61	51	52	50	50	63	58	57	48	53	62	72	60
Giugno.	48	54	45	50	51	37	53	43	44	44	42	63	52	52	44	49	57	70	57
Luglio	37	42	40	39	40	30	42	34	37	34	36	62	43	39	36	37	46	71	49
Agosto	38	41	41	39	38	26	39	34	32	36	36	53	36	35	32	34	41	55	42
Settembre.	46	51	49	46	45	33	49	42	38	42	41	53	42	43	36	38	46	58	41
Ottobre.	59	60	56	58	57	46	60	53	51	52	48	54	56	53	47	45	56	62	47
Novembre.	60	59	50	59	59	53	63	58	56	54	46	42	57	52	45	47	53	58	44
Dicembre	52	49	41	50	52	49	57	55	50	47	38	40	58	54	43	47	56	54	41

La rappresentazione relativa alla parte centrale della valle Padana (fig. 1) ove le città sono ordinate secondo la distanza dalle coste adriatiche, indica come nei mesi estivi, e specialmente in quelli di luglio e di agosto, la nebulosità sia maggiore a Venezia, Milano, Pavia, Fossano, e minime quantità si riscontrino a Ravenna, Bologna, Mirandola, Verona, Mantova, Piacenza, Vigevano, Novi Ligure, Alessandria e Novara; sembra adunque che in tali mesi vi sia un aumento di nebulosità in vicinanza delle coste, al quale segue diminuzione, quando ci si sposti verso l'interno fin quasi ad un terzo della valle, per quindi riapparire manifesto un aumento. Nei mesi da ottobre a gennaio, la nebulosità è elevata ancora sulle regioni costiere, e tale rimane per buon tratto, mentre, avvicinandoci alle Alpi Cozie e Grazie, si riscontra diminuzione. Nei mesi di settembre e giugno, quasi ovunque si ha lo stesso valore della nebulosità.

Come è stato rilevato in un'altra pubblicazione [1] in estate nella val Padana risiede una bassa pressione e vi dominano venti del secondo quadrante,

[1] *I venti in Italia,* Boll. della Soc. Aeronautica Italiana. Roma 1907-1909.

e specialmente di est, sud-est, sud, i quali, dovendo attraversare parte o tutto l'Adriatico, vi arrivano trasportando una discreta quantità di vapore: e giungendo sulle coste ove la temperatura dell'aria è poco diversa da quella dei luoghi da cui provengono, dànno luogo a formazioni di nubi, mentre sulle regioni interne, dovendosi riscaldare maggiormente il vapore acqueo, questo, resosi più leggero, si eleva dando luogo a condensazione per espansione quasi adiabatica soltanto a maggiori altezze.

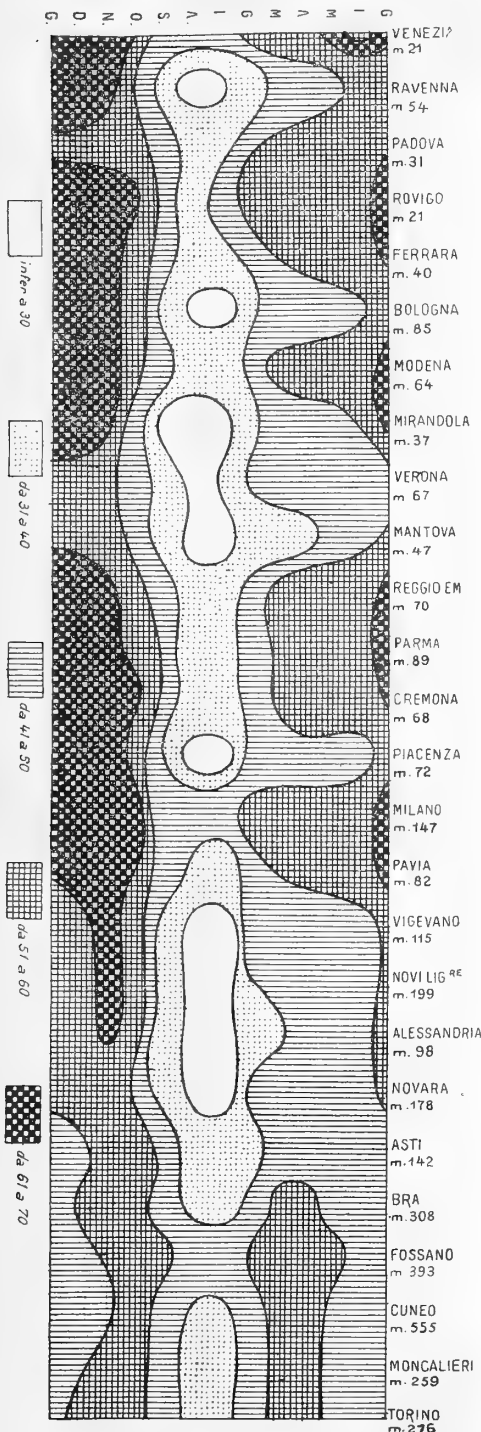



Fig. 1.

Però esaminando la distribuzione termica in val Padana, risulta come le località con temperatura elevata vengano a trovarsi più vicine alla costa, ossia in quella regione ove la nebulosità si mantiene alquanto elevata rispetto alle località vicine. Questo fatto parrebbe in certo qual modo contrapporsi all'opinione, comunemente ammessa, che il minimo di nebulosità sui continenti si riscontri nelle regioni più calde. Ma tale contraddizione è almeno attenuata, quando si pensi che le isoterme non possono fornire elementi sufficienti perchè rappresentano l'andamento della temperatura media; mentre nei fenomeni dipendenti da quelli termici, la maggior influenza è esercitata dalla temperatura intesa nella sua variazione diurna. Se passiamo pertanto ad esaminare l'escursione diurna nella anzidetta regione, riscontriamo che le regioni interne prevalgono sulle costiere per una superiore temperatura massima. Tali elevate temperature, che si manifestano con maggiore intensità sulle regioni centrali della valle, contribuiscono a rendere intense le correnti ascendenti e, causa la mancanza di

rilievi, a mantenere il cielo piuttosto sgombro da nubi; e tutto ciò trova conferma nelle osservazioni diurne della nebulosità eseguite a Milano, le quali mettono in evidenza una minima nebulosità nel pomeriggio. Abbiamo in tal modo una spiegazione del fatto che la nebulosità è soggetta a diminuzione progressiva dalla costa verso l'interno. E in riguardo agli aumenti che si riscontrano in alcune regioni, quali specialmente Milano e Pavia, quasi come una eccezione alla regolare distribuzione, ricordiamo che quivi l'escursione della temperatura diurna raggiunge valori elevati; cioè quivi, alla temperatura elevata diurna, succede una ragguardevole minima temperatura: e quindi nelle ore serali e notturne il vapore d'acqua può condensarsi più facilmente.

Nei mesi che seguono a luglio e agosto, la nebulosità aumenta: ma nei mesi autunnali si hanno valori ancora superiori a quelli dei mesi precedenti, e per alcune località sono superiori a quei che si raggiungono in inverno, per altre sono uguali. Ciò potrebbe attribuirsi alla grande quantità di vapore fornito dalla molto attiva evaporazione nell'estate; ma può essere dovuto, e forse ciò rappresenta la causa preponderante, al fatto che in tale stagione continuano a dominare vènti del secondo quadrante che, arrivando carichi di vapore, dànno luogo ad un aumento di nebulosità, perchè vanno incontro a regioni con temperatura bassa. E, difatti, tale aumento non si riscontra in fondo alla valle, in Piemonte, cioè in quella regione ove cominciano ad avere il predominio i vènti del quarto quadrante. Nei mesi invernali, la nebulosità raggiunge valori elevati nelle località vicine alla costa, e, salvo lievi interruzioni, tale rimane su tutta la pianura, ad eccezione del Piemonte ove invece si individualizza una sensibile diminuzione. E anche per tale distribuzione invernale contribuiscono i vènti del primo quadrante che dànno luogo a condensazioni più rilevanti in pianura, mentre arrivano poveri di vapor d'acqua sulle pendici.

L'azione del rilievo viene poco indicata dell'anzidetta rappresentazione, inquantochè, eccettuato il Piemonte, le città di cui i dati vennero presi in esame sono per lo più situate in pianura. Riesce invece oltremodo dimostrativa la seguente rappresentazione (fig. 2) ove le città si succedono dal centro della valle Padana (intorno a m. 70 sul mare) fino alla città di Stelvio, alta m. 2543 sul mare. Quivi, nei mesi estivi, notiamo scarsa nebulosità in pianura, che tale si mantiene anche per le località situate a media altezza (eccettuato il distretto di Milano e di cui abbiamo già parlato), mentre ad altitudini maggiori dimostra un ragguardevole aumento. E ciò a causa delle masse di vapore acqueo che per il riscaldamento dell'aria a contatto della superficie riscaldata si sollevano sotto forma di correnti ascendenti dando luogo a zone di nebulosità via via crescenti con l'altitudine, poichè vengono ad incontrarsi masse di aria a temperatura ed umidità differenti, condizioni favorevoli alla condensazione. Nei mesi di settembre e ottobre si riscontra

molta uniformità, eccetto nelle alte regioni ove al contrario, si ha aumento; nei mesi di novembre, dicembre e gennaio, la nebulosità è elevata al centro

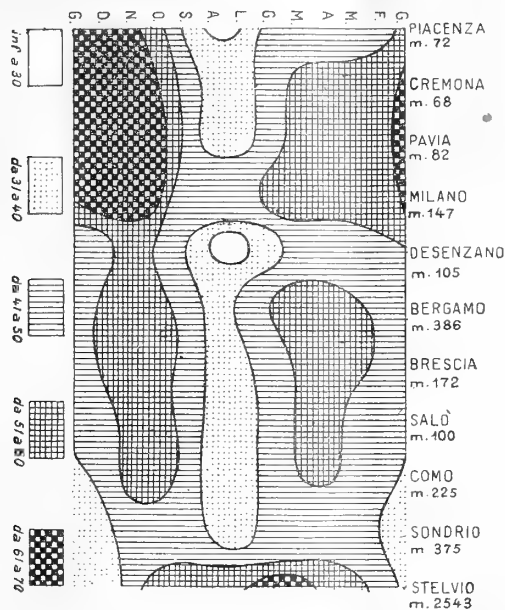



Fig. 2

della valle, mentre si succedono zone con minore nebulosità ad altitudini

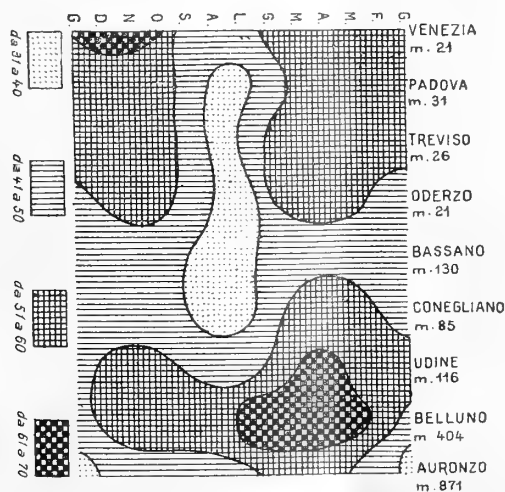



Fig. 3.

superiori fino a raggiungere valori minimi sulle località elevate. Nei mesi da febbraio a giugno permane questo aumento della nebulosità, con l'altitudine,

ad eccezione delle località vicine a Desenzano e a Sondrio che accusano, al contrario, una diminuzione.

L'azione condensatrice del rilievo, specie nei mesi in cui prevalgono le correnti ascendenti, risulta anche dalla figura seguente (fig. 3) ove è riprodotta la regione del Veneto dalle località costiere alle più elevate. Risalta distinto l'aumento della nebulosità nei mesi estivi sulle alte regioni rispetto alle basse, e la minima nebulosità nei mesi invernali sulle località a maggiore altitudine. Ma la rappresentazione forse non ha l'evidenza della precedente, a causa della ineguale distribuzione della temperatura dovuta all'accidentalità orografica del Veneto, e anche a causa del limitato numero delle stazioni meteoriche prese in esame.

Chimica. — *Sui fenomenni di trasformazione nei molibdati e wolframati di potassio* [1]. Nota II di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

Molibdato potassico. — Questo sale fu studiato termicamente per la prima volta da Hüttner e Tammann che ne stabilirono il punto di solidificazione a 926°: essi non trovarono termicamente alcun punto di trasformazione, ma dall' intorbidamente della massa solida arguirono che la trasformazione dovesse aver luogo a circa 200°.

Nelle mie ricerche precedenti il punto di solidificazione fu trovato a 926°, e nel raffreddamento della massa risultò un debole rallentamento ad una temperatura variabile da 475° a 460°. Assumevo perciò come punto di trasformazione la temperatura massima osservata, e cioè 475°, dando a questa temperatura non già un valore assoluto, ma un valore relativo, perchè come facevo notare, la trasformazione avviene con debole sviluppo di calore.

Nel raffreddamento del sale seguìto fino a 200° non osservavasi alcuna ulteriore modificazione termica.

Le ricerche di van Klooster proverebbero l'esistenza di 4 forme, e cioè di tre punti di trasformazione a 327°, a 454°, a 479°. Il punto di fusione fu ottenuto a 919°.

Da quanto riferisce l'autore sembra che queste esperienze sieno state eseguite solo riscaldando la massa salina: egli osserva che le mie ricerche stabilirono una sola trasformazione, quella cioè che avviene a temperatura più elevata e con minor sviluppo di calore, mentre mi sarebbero sfuggite le due trasformazioni che avvengono con maggior sviluppo di calore a temperature inferiori.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

Ho compiuto nuove ricerche sul molibdato potassico impiegando, come nelle precedenti, il sale proveniente da Kahlbaum, esente di solfato (all'analisi MoO_3 60.36 %; calc. 60.43 %). Il punto di solidificazione risultò a 928°.

Per raffreddamento della massa fusa e solidificata potei notare solo un rallentamento verso 475-455°: anche nel riscaldamento si notò una variazione termica alla stessa temperatura.

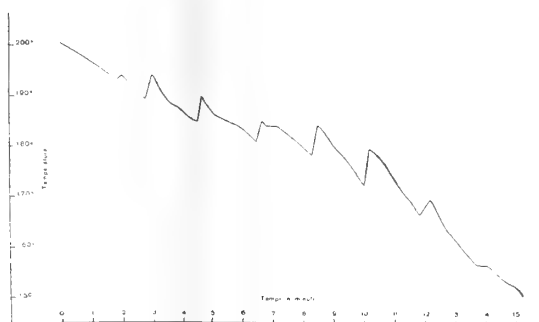
Secondo van Klooster intorno a questa temperatura si avrebbero due trasformazioni, a 479° con debole sviluppo di calore, a 454° con sviluppo di calore più forte.

Anche queste ultime mie ricerche mostrerebbero invece che si tratti di una trasformazione unica che avviene con piccolo sviluppo di calore, e si nota entro un certo intervallo di temperatura. La trasformazione avviene dapprima nelle parti esterne della massa e si fa sentire nelle parti interne con piccolissimo rallentamento nelle variazioni di temperatura, che continua per un breve intervallo e si accentua leggermente quando la trasformazione avviene nella parte interna della massa: per ciò come temperatura di trasformazione reale va presa questa ultima temperatura; la temperatura reale di trasformazione è forse un po' inferiore a quella data precedentemente cioè a circa 460°, ma credo sia da escludere una doppia trasformazione e l'esistenza di due punti di trasformazione distinti.

L'altra trasformazione osservata da van Klooster a 327°, come ho notato, non si osserva nel raffreddamento fino a 200°. Si nota però che se si porta la massa a temperatura ordinaria, questa assume un aspetto assai diverso e da compatta diviene granulosa. Se si versa la massa fusa in una capsula di platino in modo da avere uno strato dello spessore di 2-3 millimetri, si vede che a una temperatura piuttosto bassa la massa solida compatta cominciando dai bordi si polverizza, a tratti, con una certa violenza.

Ho seguito perciò il raffreddamento della massa al di sotto di 200°: è possibile allora osservare la trasformazione accennata che avviene con notevole sviluppo di calore: il sale che si trova in stato instabile subisce di tratto in tratto la trasformazione, e nella massa si hanno corrispondentemente tanti sviluppi di calore che portano a rallentamenti nel raffreddamento e addirittura a ripetuti innalzamenti di temperatura.

Credo interessante riprodurre la curva di raffreddamento del molibdato potassico quale risulta in questo intervallo di temperatura, costruita in base alle temperature date dal termoelemente e lette sul galvanometro di 10 in 10 secondi nel raffreddamento della massa fusa (15 gr.).

Riscaldando la massa dopo che è avvenuta la trasformazione tanto se la massa fu portata a temperatura ambiente, come se fu raffreddata solo a 120°, si osserva una sola trasformazione a 322-326°.

Se invece si riscalda dopo aver portata la massa nel raffreddamento solo fino a 200° non si ha alcuna trasformazione a 320°; il che significa che a 200° la trasformazione inversa non era ancora avvenuta.

Wolframato potassico. — Hüttner e Tammann trovarono la temperatura di solidificazione di questo sale a 906°, 926° (?) La temperatura di trasformazione di questo sale fu data dai detti autori a 300-200°, perchè essi avevano osservato che la crosta salina compatta che si forma su di un filo di platino per solidificazione del sale fuso intorno a questa temperatura, si polverizza.

Nella mie ricerche precedenti avevo trovato la temperatura di solidificazione del wolframato a 894° e una trasformazione a 575° circa, trasformazione che avveniva con piccola variazione termica come quella del corrispondente molibdato. La temperatura assunta era la massima avuta in varie determinazioni.

Successivamente van Klooster trovò la temperatura di solidificazione del wolframato potassico a 921°: egli non osservò alcuna variazione termica a 575° per cui, secondo l'autore, a questa temperatura non si avrebbe alcuna trasformazione, e l'effetto termico da me osservato sarebbe dovuto a una separazione eutettica. Con il metodo di riscaldamento van Klooster stabilì una trasformazione del wolframato a 388° che avviene con notevole sviluppo di calore: detta trasformazione non gli risultò nel raffreddamento della massa fino a 220°.

Il wolframato da me impiegato in queste come nelle ricerche precedenti fu il wolframato potassico Kahlbaum. All'analisi si ebbe un contenuto di WO_3 del 70,74 % (calc. 71,10 %); era esente completamente di solfati. Certo questo sale conteneva un piccolo eccesso di carbonato come si potè anche osservare aggiungendo al sale fuso una piccola quantità di anidride wolframica che produsse uno sviluppo di gas: questo fu osservato aggiungendo quantità crescenti di anidride fino ad una aggiunta di 0,25 gr. di WO_3 a 20 gr. di K_2WO_4.

La temperatura di solidificazione per l'aggiunta di queste quantità di anidride venne elevata da 894° a 898°.

Nel raffreddamento della massa solidificata venne nuovamente osservata quella variazione termica già avuta nelle precedenti esperienze a 575°. Nel sale contenente le piccole quantità di carbonato in eccesso la massima temperatura cui fu osservata la trasformazione fu di 585-580°. Nel sale a cui fu aggiunta l'anidride in quantità necessaria per la trasformazione del carbonato a wolframato la trasformazione fu osservata a una temperatura un po' superiore e cioè a 600-595°.

Uguali fenomeni si osservarono nel riscaldamento della massa.

Effettivamente la temperatura di questa trasformazione è un po' superiore a quella data nella precedente Nota, e cioè la trasformazione del wolframato puro avviene intorno a 600°.

Van Klooster, come fu detto, attribuisce il fenomeno termico da me osservato a un deposito eutettico: infatti anche il punto di solidificazione troppo basso del sale dovrebbe indicare, secondo il detto autore la non purezza del sale.

Il wolframato adoperato in queste ultime ricerche si dimostrò all'analisi sufficientemente puro, e l'aggiunta dell'anidride wolframica ha certo avvicinato maggiormente il sale al grado di purezza.

Di quale natura possa essere questo preteso eutettico non è detto da van Klooster. Tanto nelle precedenti, come in queste ricerche non si potrebbe supporre che la presenza eventuale di un eccesso di anidride o di carbonato.

L'eutettico wolframato-biwolframato che risulterebbe nella prima ipotesi giace a 542° como ho mostrato in un mio precedente lavoro [1]: nelle concentrazioni limiti dovrebbe trovarsi ad una temperatura piuttosto inferiore a questa, mai ad una temperatura superiore come si verifica per il wolframato puro. In una stessa miscela di wolframato anidride contenente 5,5 % mol. WO_3 avevo anzi osservato tanto il punto di trasformazione a 575°, come il deposito eutettico a 530°.

Anche un eutettico wolframato-carbonato è da escludere: infatti la presenza di piccole quantità di carbonato tende a far diminuire la temperatura a cui si ha l'effetto termico, e l'aggiunta di una quantità considerevole di carbonato fa addirittura scomparire questa variazione termica.

È quindi da escludere che l'effetto termico osservato a circa 600° sia dovuto a presenza di eccesso dell'uno o dell'altro sale.

Presenza di altre sostanze eterogenee, come anche dell'analisi quantitativa e qualitativa potè risultare, mi sembra da escludere; e credo che la variazione termica osservata non si possa attribuire a una separazione eutettica, ma si tratti di una vera trasformazione, probabilmente della stessa natura di quella osservata per il molibdato potassico intorno a 470°.

[1] Atti R. Istituto Veneto; LXXII, II, 893 (1912-13).

La diversità dei miei risultati da quelli di van Klooster va forse attribuita al vantaggio che può offrire la lettura diretta delle temperature sul galvanometro, per cui è più facile colpire le variazioni termiche deboli, ed anche forse alla troppo lenta velocità di riscaldamento e di raffreddamento adottata da van Klooster: infatti ho osservato che detta trasformazione è più visibile se la temperatura varia di 2-3° ogni 10 secondi, che se varia di 1-2° ogni 10 secondi.

Riguardo l'altra trasformazione del wolframato potassico noterò che essa non è visibile termicamente nel raffreddamento, come del resto era stato osservato da van Klooster: per il wolframato accade quello che abbiamo visto per il molibdato; nel raffreddamento si oltrepassa la temperatura di trasformazione senza che essa abbia luogo: anzi il wolframato ha maggior tendenza a mantenersi nella forma instabile, e se il raffreddamento è lento, può venire portato anche alla temperatura ambiente senza che la trasformazione abbia luogo.

Si notò inoltre, che agendo con il wolframato contenente il piccolo eccesso di carbonato, la trasformazione avviene più facilmente ad una temperatura superiore, forse perchè la presenza del carbonato rende meno compatta la massa che subisce con maggior facilità la trasformazione.

Anche nel raffreddamento rapido e di strati sottili viene facilitata assai la trasformazione.

Avvenuta la trasformazione nel raffreddamento la massa riscaldata subisce la trasformazione inversa a 370-374° con notevole arresto nella temperatura.

Dal complesso delle esperienze di raffreddamento e di riscaldamento credo si possa concludere:

1°) Il molibdato sodico è tetramorfo e presenta un primo punto di trasformazione a 634°; un secondo punto a circa 592°; il terzo punto di trasformazione si trova a 444°: questo ultimo come i precedenti sono le temperature di trasformazione ottenuti nel riscaldamento: nel raffreddamento le trasformazioni si manifestano a temperature inferiori: specialmente l'ultima trasformazione può venire molto ritardata per presenza di piccole quantità di sostanze estranee.

2°) Il wolframato sodico è trimorfo: i punti di trasformazione ottenuti nel raffreddamento sono a 582° e a 571°; nel riscaldamento della massa si ha un solo effetto termico a 580-584°. L'affermazione di van Klooster che si tratti di una sola trasformazione non appare dimostrata.

3°) Il molibdato potassico è trimorfo con un punto di trasformazione a circa 460°: il secondo punto di trasformazione nel riscaldamento delle masse risulta a 322-326°; non possono avere alcun valore i fenomeni termici che si osservano nel raffreddamento, per la grande tendenza che ha

questo sale a mantenersi in stato instabile nella forma stabile a temperatura più elevata.

4°) Il wolframato potassico è pure trimorfo con punto di trasformazione circa a 600° e un secondo punto di trasformazione che si osserva solo nel riscaldamento a 370°-374°: per la trasformazione inversa accade quanto fu osservato per il molibdato.

Queste ricerchè confermano pienamente i risultati ottenuti nelle mie precedenti ricerche compiute con il metodo adottato generalmente in questo genere di studî vale a dire raffreddando le masse fuse. Qualche diversità nei valori assoluti delle temperature di trasformazione che si verificano soprattutto là dove si tratta di fenomeni che avvengono con piccole variazioni termiche non hanno alcun significato e non infirmano affatto i risultati sull'andamento generale dei sistemi studiati.

Le ricerche di van Klooster mostrano in qualche caso la bontà del metodo di riscaldamento, così ad esempio per la determinazione dei punti di trasformazione del wolframato potassico: in qualche caso però anche questo metodo non sembra sufficiente, come ad esempio nella determinazione dei punti di trasformazione del wolframato di sodio per il quale io credo si tratti di una doppia trasformazione come risulta nel raffreddamento della massa, anzichè di un'unica trasformazione come risulta dal riscaldamento.

Ad ogni modo queste diversità non riguardano quei risultati che per i sistemi da me studiati furono in ogni caso ottenuti con il metodo comunemente seguito del raffreddamento delle masse fuse.

Chimica. — *Sul posto del cerio nel sistema periodico, e sui molibdati complessi del cerio tetravalente* (¹). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Recentemente sono state studiate, mediante l'analisi termica, alcune leghe di cerio. Nelle leghe cerio-stagno il Vogel (²) ha riconosciuto l'esistenza dei composti Ce_2Sn, C_2Sn_3, $CeSn_2$.

In base a questi risultati il Tamman (³) e il Vogel concludono che il cerio non può far parte, nel sistema periodico, dello stesso gruppo dello stagno, perchè è stato constatato che gli elementi di uno stesso gruppo, esclusi i primi termini, non dànno composti fra loro.

Il posto che il cerio occupa nel quarto gruppo del sistema periodico venne ad esso assegnato dal Mendeleeff ammettendo il cerio trivalente nei

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.
(²) Z. anorg. Chem., *72* (1911), 319.
(³) Z. f. Elektrochemie, *17* (1911), 641.

sali cerosi e quindi tetravalente nei sali cerici. Tutte le ricerche successive hanno confermato, non solo la trivalenza [1] del cerio nei sali cerosi, ma anche il posto assegnato al cerio tra il zirconio e il torio, giacchè vennero ottenuti parecchi sali del cerio tetravalente [2] analoghi ai corrispondenti sali di torio.

La conclusione alla quale giungono Tamman e Vogel viene dunque a contrastare con quanto si riteneva come acquisito e dimostrato intorno alla sistematica del cerio.

Data l'importanza dell'argomento, mi par lecita la domanda se la regolarità affermata dal Tamman, e riguardante l'incapacità degli elementi omologhi a combinarsi fra loro, presenti tale validità di legge naturale che, dinanzi alle deduzioni basate su di essa, debba cedere ogni altra considerazione chimica.

Nella forma nella quale è stata dapprima esposta [3], la regolarità su detta riguarda soltanto gli elementi susseguentisi nei gruppi naturali presi in senso stretto. Con questa denominazione il Tamman intende i sottogruppi del sistema periodico, fatta astrazione dal primo termine, cioè dai termini appartenenti ai piccoli periodi.

Ad esempio, rame argento oro costituirebbero un gruppo naturale in senso stretto; e in esso si verifica la regolarità su ricordata, giacchè il rame non dà composti con l'argento, e l'argento non dà composti con l'oro. Altrettanto si potrebbe ripetere per il gruppo zinco cadmio mercurio.

È evidente che la regolarità affermata dal Tamman non è applicabile, nella sua forma originaria, al caso cerio-stagno, perchè questi elementi, non solo non si susseguono, ma fanno parte di sottogruppi diversi.

Il Tamman, nella prima Nota [4] sull'argomento, s'era già proposta la questione se la detta regolarità potesse venir estesa, oltre che agli elementi susseguentisi, anche a tutti gli elementi di un gruppo naturale, preso sempre in senso stretto; e aveva lasciato insoluta la questione, causa la mancanza di dati sperimentali.

Nella seconda Nota [5] non accennò più alla condizione che gli elementi debbano immediatamente succedersi; e infine, nella discussione seguìta al rapporto di R. I. Meyer [6] intorno alle attuali conoscenze sulle terre rare, presentato al congresso del 1911 della Bunsen Gesellschaft, il Tamman ritenne di poter applicare la sua regolarità alle leghe cerio-stagno, considerando quindi come gruppo naturale in senso stretto Ti, Zr, Th, Ge, Sn, Pb.

[1] W. Muthmann, Ber., *31* (1898), 1829.

[2] I. Koppel, Z. anorg. Chem., *18* (1898), 305; R. J. Meyer e R. Jacobi, Z. anorg. Ch., *27* (1901), 389. G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, 1907, I, 644; 1910, II, 642; Ber., *43* (1910), 2214.

[3] Z. anorg. Chem., *49* (1906), 115.

[4] Ibidem.

[5] Z. f. anorg. Ch., *55* (1907), 294.

[6] Zeitschr. f. Elektrochem., *17* (1911), 633.

Se la regolarità del Tamman, limitata alle coppie di elementi vicini di un sottogruppo, soffre già un'eccezione, giacchè il bromo si combina con lo iodio, essa ne presenta molte altre qualora venga estesa a tutti gli elementi di ciascun gruppo del sistema periodico, anche facendo astrazione dai termini appartenenti ai piccoli periodi.

Giova ricordare che al settimo gruppo, oltre al bromo e allo iodio, appartiene il manganese; che il selenio dà composti col cromo, col molibdeno, col wolframio e con l'uranio; che il cesio si combina con l'oro, e il mercurio col bario (¹).

A me sembra che la regolarità affermata dal Tamman, o non è applicabile al caso cerio-stagno, o questo caso costituisce per essa un'eccezione di più.

Dopo le leghe cerio-stagno, il Vogel ha studiato le leghe cerio-alluminio (²). Il cerio si combina anche con l'alluminio, formando i seguenti composti: Ce_3Al, $CeAl$, $CeAl_2$, $CeAl_4$. Il Vogel conclude, da ciò, che il cerio « ist offenbar kein dem Aluminium nahestehendender Element »; e siccome il lantanio dà anch'esso un composto con l'alluminio (³), il Vogel vorrebbe togliere il lantanio dal posto che occupa nel terzo gruppo.

Qui mi pare opportuno di notare che l'alluminio fa parte di un piccolo periodo, e quindi, secondo Tamman, dovrebbe venir escluso dai gruppi naturali presi in senso stretto; che se poi si vogliono prendere in considerazione anche gli elementi metallici dei piccoli periodi, siccome lo zinco e il cadmio dànno composti col magnesio, si dovrebbe a maggior ragione togliere lo zinco e il cadmio dal secondo gruppo!

L'analisi termica delle leghe metalliche ha reso e renderà inestimabili servigi alla chimica inorganica in un campo finora quasi inaccessibile; ma io dubito ch'essa possa portare un grande contributo alla sistematica degli elementi: e ciò contrariamente all'opinione del Tamman (⁴) — secondo il quale, nei composti metallici delle leghe, l'individualità degli elementi si manifesterebbe con evidenza maggiore che non nei sali — e del Vogel (⁵) che, a risolvere la questione del posto del cerio nel sistema periodico, ritiene d'importanza decisiva lo studio delle leghe del cerio e degli altri elementi delle terre rare.

È certo che l'individualità di un metallo, cioè l'insieme dei caratteri ch'esso presenta allo stato libero, ha grande influenza sulla natura dei composti che forma nelle sue leghe: ossia la sua individualità non scompare totalmente in tali composti, mentre scompare totalmente nei sali. Ma dal

(¹) W. Guertler, ibidem, pag. 641.
(²) Z. f. anorg. Ch., *75* (1912), 41.
(³) Muthmann, Beck. Lieb. Ann., *331*, 46 (1904).
(⁴) Z. anorg. Chem., *55*, 290 (1907).
(⁵) Idem, *72*, 328 (1911).

dal punto di vista della sistematica, non è tanto l'individualità dell'elemento allo stato libero che c'interessa, quanto l'individualità chimica dell'elemento nei suoi composti.

Scriveva il Piccini (1): « Quando parliamo di classificazione degli elementi e discutiamo sul posto che si deve assegnare al fosforo e al carbonio, la questione non si aggira sul fosforo bianco o rosso, sul diamante o sulla grafite, ma sibbene su quello che rispettivamente hanno di comune questi corpi semplici, cioè sugli elementi fosforo e carbonio.

Il sistema periodico è una classificazione di elementi, non di corpi semplici. Ogni elemento vi occupa un posto corrispondente alla sua individualità chimica e, nel caso in cui l'elemento abbia più forme di combinazione (e, quindi, più individualità chimiche), il suo posto corrisponde all'individualità che manifesta nella forma-limite.

Si può parlare di forma-limite, o anche, semplicemente, di forma di combinazione, a proposito dei composti esistenti nelle leghe? Il Tamman (2) stesso ritiene fortuita la corrispondenza che talvolta si nota tra le formule dei composti metallici di certi elementi e le formule dei composti salini degli elementi stessi. Il campo dei composti metallici è ancora molto oscuro: trarne delle conseguenze per la sistematica degli elementi, mi sembra, almeno, prematuro.

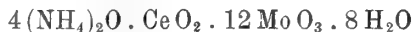
Il posto del cerio nel sistema periodico non potrà, almeno per ora, venir confermato o combattuto se non in base allo studio dei composti che il cerio può dare nella sua forma-limite.

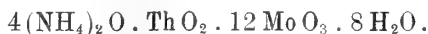
Le ricerche descritte in questa Nota si riferiscono appunto ai nuovi composti del cerio tetravalente.

In una Nota (3) precedente, io ho descritto alcuni molibdati complessi di torio analoghi ai silico-molibdati di Parmentier e ai titani- e ai zirconimolibdati di Péchard. L'esistenza dei torimolibdati sta in accordo col posto che il torio occupa nel quarto gruppo del sistema periodico.

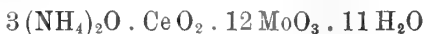
Se il cerio fa parte dello stesso gruppo e precisamente occupa il posto ch'è fra lo zirconio e il torio, è logico di prevedere che, nella sua forma-limite, esso deve dare molibdati complessi analoghi a quelli degli elementi omologhi.

L'esperienza ha confermato pienamente tale previsione. Io ho potuto ottenere il composto

$$4\,(NH_4)_2O\,.\,CeO_2\,.\,12\,MoO_3\,.\,8\,H_2O$$

che corrisponde perfettamente al torimolibdato neutro di ammonio:

$$4\,(NH_4)_2O\,.\,ThO_2\,.\,12\,MoO_3\,.\,8\,H_2O\,.$$

(1) Appendice al trattato di Chimica inorganica di von Richter, 1885, pag. 406.
(2) Z. anorg. Chem., *55*, 290 (1907).
(3) G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, XXII, 1° (1913), 781.

Il composto di cerio, come quello di torio, è cristallizzato in prismi, insolubile nell'acqua, solubile negli acidi diluiti. Dalle sue soluzioni acide, per aggiunta di un sale di ammonio, precipita il composto

$$3(NH_4)_2O . CeO_2 . 12 MoO_3 . 11 H_2O$$

che soltanto per una molecola d'acqua di cristallizzazione differisce dal composto

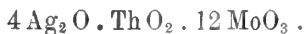
$$3(NH_4)_2O . ThO_2 . 12 MoO_3 . 12 H_2O$$

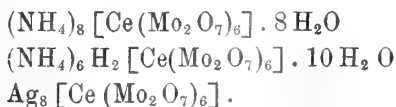
che si ottiene dal torimolibdato neutro nelle stesse condizioni.

Che l'acido cerimolibdico sia ottobasico, come l'acido torimolibdico, e che quindi il sale con sei molecole di ammoniaca sia un sale biacido, è provato dall'esistenza del sale di argento

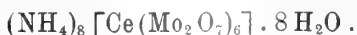
$$4 Ag_2O . CeO_2 . 12 MoO_3$$

che si può preparare tanto dal cerimolibdato neutro quanto dal cerimolibdato acido per trattamento con nitrato di argento, e che corrisponde al torimolibdato di argento

$$4 Ag_2O . ThO_2 . 12 MoO_3 .$$

Data la stretta analogia ch'esiste tra i tori- e i cerimolibdati, è naturale di attribuire a questi ultimi la costituzione che abbiamo attribuita ai primi in basealla teoria sugli acidi complessi, di A. Miolati. È da ammettere che attorno all'atomo di cerio siano coordinati sei gruppi Mo_2O_7 bivalenti; e le formule dei cerimolibdati vanno quindi scritte nel modo seguente:

$$(NH_4)_8 [Ce(Mo_2O_7)_6] . 8 H_2O$$
$$(NH_4)_6 H_2 [Ce(Mo_2O_7)_6] . 10 H_2O$$
$$Ag_8 [Ce(Mo_2O_7)_6] .$$

Parte sperimentale.

Cerimolibdato neutro di ammonio.

$$(NH_4)_8 [Ce(Mo_2O_7)_6] . 8 H_2O .$$

Se ad una soluzione concentrata di molibdato di ammonio si aggiunge a freddo la soluzione diluita di un sale cerico, si ha dapprima un precipitato amorfo biancastro; poi, riscaldando fino all'ebullizione, il precipitato si ridiscioglie a poco a poco, e il liquido diventa giallo-citrino. Continuando il riscaldamento, dal liquido giallo limpido si separa una polvere gialla cristallina costituita da bei prismi microscopici trasparenti. Infine, lasciando raffreddare, si deposita una nuova porzione della polvere cristallina; il liquido diventa quasi incoloro, e più non contiene se non traccia di cerio.

La polvere gialla così ottenuta è il cerimolibdato neutro d'ammonio. Per averlo direttamente allo stato cristallino, ho trovato opportuno di procedere nel modo seguente:

Nella soluzione di 30 gr. di molibdato di ammonio in 100 cc. di acqua, mantenuta all'ebullizione, si fanno cadere, a goccia a goccia, 50 cc. di una soluzione al 5 % di nitrato cerico ammonico. Si forma tosto un abbondante precipitato giallo-cristallino che viene separato per filtrazione alla pompa, lavato prima con soluzione di nitrato d'ammonio, poi con alcool metilico, e infine seccato all'aria su carta da filtro.

In questo composto, l'azoto venne dosato come ammoniaca per via acidimetrica, previa distillazione con soda caustica; il molibdeno venne separato come solfuro con H_2S dalla soluzione solforica, e poi trasformato in anidride molibdica; il cerio, dopo eliminato il molibdeno come solfuro, venne precipitato con ammoniaca e acqua ossigenata allo stato di perossido idrato, e pesato come CeO_2.

Si determinò la perdita di peso alla calcinazione scaldando una quantità nota del prodotto in un crogiuolo di platino contenuto in un altro crogiuolo pure di platino, il cui fondo veniva portato al rosso incipiente. Durante il riscaldamento il prodotto diventa bruno, perchè l'ammoniaca che si svolge riduce un po' di anidride molibdica ad ossidi inferiori di molibdeno; ma questi poi si riossidano all'aria, e si finisce coll'ottenere una polvere di color giallo-camoscio, nella quale il cerio è contenuto tutto allo stato ceroso. Durante la calcinazione si ha quindi eliminazione di acqua, di ammoniaca e di ossigeno.

Si ebbero all'analisi i seguenti risultati:

	Calcolato per $(NH_4)_8Ce(Mo_2O_7)_6 . 8H_2O$	Trovato
CeO_2	7,65	7.75 - 7,87
MoO_3	76,71	76,94 - 76,30
N	4,97	4,84 - 4,92 - 4,89
Perdita di peso alla calcinazione	16,0	16,44 - 16,22 - 15,9

Il cerimolibdato neutro di ammonio è insolubile in acqua; è solubile negli acidi minerali diluiti. Le sue soluzioni sono gialle. Il complesso che il cerio tetravalente forma con l'acido molibdico [a differenza di quello che coll'acido molibdico forma il cerio trivalente (1)] è molto stabile anche in soluzione: e infatti nei cerimolibdati il cerio non presenta parecchie delle sue reazioni più caratteristiche.

L'acqua ossigenata che, com'è noto, riduce istantaneamente il nitrato e il solfato cerico, aggiunta a una soluzione di cerimolibdato in acido sol-

(1) G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, XVII, 1° (1908), 540.

forico diluito, non esercita alcuna azione. Adoperando una quantità nota di acqua ossigenata, e rititolandola poi con permanganato, si trova ch'essa è rimasta inalterata in presenza del sale cerico.

L'acido ossalico non produce alcun precipitato in una soluzione di cerimolibdato; anzi il cerimolibdato stesso si scioglie facilmente in una soluzione di acido ossalico, con colorazione gialla. Soltanto dopo prolungata ebullizione, una parte del cerio precipita da tale soluzione, allo stato di ossalato ceroso. Questi fatti provano che, anche nelle soluzioni del cerimolibdato negli acidi diluiti, il cerio fa parte di uno jone complesso cerimolibdico.

Le reazioni di precipitazione con sali alcalini e alcalino-terrosi con sali di metalli pesanti e di basi organiche, che vennero descritte come caratteristiche dei torimolibdati, valgono anche per il cerimolibdato di ammonio: colla sola differenza che i precipitati che si ottengono sono gialli.

Il cerimolibdato acido di anilina, appena ottenuto, è giallo; poi, alla luce, diventa verde.

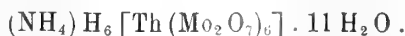
Cerimolibdato acido di ammonio.

$$(NH_4)_6 H_2 [Ce(Mo_2 O_7)_6] . 10 H_2O$$

Gr. 5 di cerimolibdato neutro vengono sciolti a freddo in circa 300 cc. di una soluzione di acido solforico al 2 %; poi il liquido giallo, così ottenuto, si versa in un egual volume di soluzione satura di nitrato d'ammonio. Si forma subito un abbondante precipitato giallo-chiaro cristallino, che viene separato per filtrazione alla pompa, lavato prima con soluzione di nitrato ammonico, poi con alcool metilico e infine seccato tra carta. L'analisi di questo prodotto venne eseguita come fu detto per il composto precedente e diede i seguenti risultati:

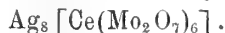
	Calcolato per $(NH_4)_6 H_2 [Ce(Mo_2O_7)_6] . 10 H_2O$	Trovato
CeO_2	7,65	7,80
MoO_3	76,65	77,13
N	3,73	3,87
Perdita di peso alla calcinazione	16,07	16,22

Al composto corrispondente di torio venne da me (¹) attribuita la formula

$$(NH_4) H_6 [Th(Mo_2 O_7)_6] . 11 H_2O .$$

È probabile ch'esso abbia in realtà la stessa idratazione del composto cerico. Il prodotto analizzato era forse un po' umido.

(¹) Questi Rendiconti (1913), 1°, 785.

Il cerimolibdato acido di ammonio è insolubile in acqua; è solubile negli acidi diluiti; presenta in soluzione le stesse reazioni del sale neutro.

Cerimolibdato di argento.
$Ag_8[Ce(Mo_2O_7)_6]$.

Se ad una soluzione di cerimolibdato neutro (o di cerimolibdato acido) in acido nitrico diluito si aggiunge nitrato di argento in eccesso, si ha un precipitato giallo-aranciato amorfo che contiene argento, cerio e anidride molibdica. Titolando l'argento rimasto in soluzione, si trova che per ogni atomo di cerio sono stati precipitati otto atomi di argento.

Per ottenere il cerimolibdato di argento cristallizzato, si fa digerire a freddo il cerimolibdato di ammonio neutro (o anche quello acido) in una soluzione al 10 % di nitrato di argento. Dopo circa ventiquattro ore, tutto l'ammonio del cerimolibdato è stato sostituito dall'argento. L'analisi venne eseguita sul prodotto seccato a 120° fino a peso costante.

	Calcolato per $Ag_8Ce(Mo_2O_7)_6$	Trovato
Ag	30,52	30,36
CeO_2	6,09	6,23
MoO_3	61,13	61,20

Chimica. — *Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni* [1]. Nota II di Livio Cambi, presentata dal Socio A. Angeli.

In una Nota precedente [2] mi occupai della reazione cromatica che diversi chetoni manifestano col nitroprussiato, in presenza di alcali. Le ricerche comunicate in quella Nota dimostrarono principalmente che i sali complessi colorati che si generano dal nitroprussiato e dai chetoni si scindono facilmente fornendo l'isonitrosochetone che deriva dal chetone impiegato.

Era già noto, per le ricerche sistematiche di Denigés [3] e di Belà von Bittò [4], che soltanto i chetoni contenenti aggruppamenti — CHn — CO —, aventi cioè idrogeno mobile congiunto a carbonio, potevano dare la reazione cromatica del nitroprussiato. La formazione del nitrosochetone dimostrava

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Elettrochimica del R. Istituto Tecnico superiore di Milano.

[2] Questi Rendiconti, XXII (1913), I, 376.

[3] Denigés, Bull., *15* (3), 1058.

[4] Belà r. Bittò, Annalen, *267*, 372.

appunto la necessità di tale aggruppamento: doveva avvenire una condensazione fra l'aggruppamento —NO del nitroprussiato ed il carbonio recante l'idrogeno mobile.

Sulla natura del composto complesso così generato non potevo decidere, soprattutto per l'instabilità, in soluzione acquosa, del sale prodotto dall'acetone che avevo tentato di isolare.

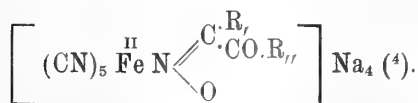
Si presentavano due ipotesi: che si formasse direttamente l'aggruppamento dell'isonitrosochetone, o che invece questo si producesse per una scissione secondaria da una cosiddetta isonitramina formatasi nella reazione principale.

Le ricerche che ora comunico vennero dirette a stabilire la natura dei sali prodotti nella reazione su ricordata.

Feci già osservare che dal nitroprussiato in soluzione acquosa insieme al prodotto di condensazione del chetone, per azione dell'alcali presente, si forma anche il ferronitritopentacianuro, il quale, almeno nel caso studiato, non si separa dal composto colorato [1].

Nelle ricerche presenti approfittai dell'osservazione fatta, che in alcool metilico assoluto [2] il nitroprussiato non reagisce, almeno in modo apprezzabile, a freddo con l'alcoolato sodico, sia metilico che etilico. Non si nota alcun cambiamento di colore, nè precipitazione del nitritocianuro che è insolubile in questo solvente [3].

Avendo presente d'altra parte, come è ben noto, che gli alcoolati favoriscono in generale le condensazioni del tipo di quelle cui doveva partecipare il nitroprussiato, feci reagire alcuni chetoni in queste condizioni col prussiato stesso. Infatti nei tre casi studiati, con l'acetofenone, l'acetobromofenone $\left(C_6H_4\begin{smallmatrix}CO\cdot CH_3\\ Br\end{smallmatrix}\right)$, l'acetilacetone, osservai la separazione di un sale avente tutti i caratteri di quelli generati in soluzioni acquose, la cui costituzione, come verrà dimostrato nella parte sperimentale, schematicamente rappresentata, è la seguente:

$$\left[(CN)_5\overset{II}{Fe}N\begin{smallmatrix}\diagup C\begin{smallmatrix}\cdot R_{\prime}\\ \cdot CO.R_{\prime\prime}\end{smallmatrix}\\ \diagdown O\end{smallmatrix}\right]Na_4\ [4].$$

[1] Loc. cit., pag. 377.

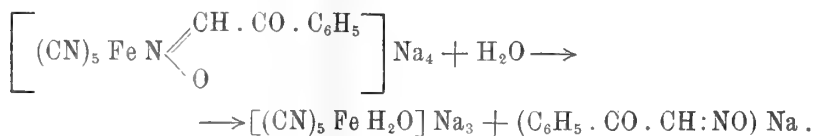
[2] Il nitroprussiato sodico mentre si discioglie facilmente nell'alcool metilico assoluto è quasi insolubile nall'alcool etilico assoluto.

[3] L'alcoolato potassico si comporta diversamente, genera un precipitato cristallino, che con tutta probabilità è nitroprussiato potassico.

[4] Ho usato in generale lo schema $\left[(CN)_5FeN\begin{smallmatrix}\diagup C\begin{smallmatrix}\cdot R_{\prime}\\ \cdot C.CO.R_{\prime\prime}\end{smallmatrix}\\ \diagdown OH\end{smallmatrix}\right]'''$ perchè appare probabile che l'aggruppamento dell'isonitrosochetone sia trattenuto da valenze secondarie, manifestantesi fra l'atomo di ferro e quello d'azoto ossimico.

Questi sali sono ferrocianuri contenenti per ogni aggruppamento $Fe(CN)_5$ una molecola od un residuo di isonitrosochetone. Nel caso dei due acetofenoni su citati, questi sali infatti si scindono per semplice azione dell'acqua nel sale di sodio dell'isonitrosochetone e nel ferroacquopentacianuro di K. A. Hoffmann:

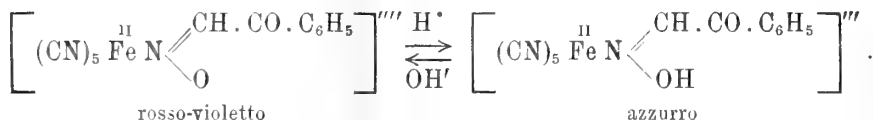
$$\left[(CN)_5\,Fe\,N\begin{matrix}\diagup CH\,.\,CO\,.\,C_6H_5\\ \diagdown O\end{matrix}\right]Na_4 + H_2O \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [(CN)_5\,Fe\,H_2O]\,Na_3 + (C_6H_5\,.\,CO\,.\,CH{:}NO)\,Na\,.$$

Questa reazione in condizioni opportune può procedere in modo pressochè quantitativo: per ogni atomo di ferro si libera una molecola di nitrosochetone.

È noto che nella reazione dei chetoni col nitroprussiato si ha una colorazione diversa a seconda che l'ambiente permanga alcalino o che divenga debolmente acido. Nel caso dell'acetofenone ho isolato il sale che si origina per azione degli acidi diluiti da quello ottenuto direttamente dal nitroprussiato, ad esso spetta la formola

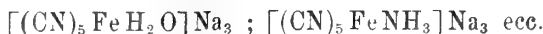
$$[(CN)_5\,Fe\,C_8\,H_7\,NO_2]\,Na_3\,.$$

Abbiamo cioè la trasformazione seguente:

$$\underset{\text{rosso-violetto}}{\left[(CN)_5\,\overset{II}{Fe}\,N\begin{matrix}\diagup CH\,.\,CO\,.\,C_6H_5\\ \diagdown O\end{matrix}\right]''''} \underset{OH'}{\overset{H^\cdot}{\rightleftarrows}} \underset{\text{azzurro}}{\left[(CN)_5\,\overset{II}{Fe}\,N\begin{matrix}\diagup CH\,.\,CO\,.\,C_6H_5\\ \diagdown OH\end{matrix}\right]'''}\,.$$

Il prodotto di condensazione diretta del nitroprussiato con i chetoni appartiene quindi alla serie di quei ferrocianuri contenuti, nell'ione complesso, un anione diverso in luogo di uno dei radicali —CN, come ad es.:

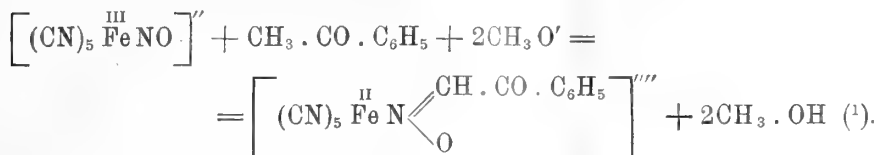
$$[(CN)_5\,Fe\,OH]\,Na_4\,(^1)\ ;\ [(CN)_5\,Fe\,NO_2]\,Na_4\ ;\ [(CN)_5\,Fe\,As\,O_2]\,Na_4\,.$$

Il sale acido invece che ho ricordato si aggruppa a quei ferrocianuri contenenti in luogo di un gruppo —CN una molecola cosiddetta neutra, ad esempio:

$$[(CN)_5\,Fe\,H_2\,O]\,Na_3\ ;\ [(CN)_5\,Fe\,NH_3]\,Na_3\ \text{ecc.}$$

(1) Come osserva A. Werner (Neure Anschaungen III Auf. 1913, pag. 172) è assai probabile che l'acquoferrocianuro $[H_2O\,Fe(CN)_5]Na_3$ in soluzione alcalina dia luogo allo idroxosale qui indicato.

La reazione complessiva del nitroprussiato con i chetoni in presenza di alcoolato si può adunque rappresentare con lo schema seguente:

$$\left[(CN)_5 \overset{III}{Fe} NO\right]'' + CH_3 . CO . C_6H_5 + 2CH_3O' =$$

$$= \left[(CN)_5 \overset{II}{Fe} N \begin{matrix} \diagup CH . CO . C_6H_5 \\ \diagdown O \end{matrix}\right]'''' + 2CH_3 . OH \text{ (1)}.$$

Non è possibile stabilire per ora quali siano le reazioni intermedie, certo tale condensazione richiama da un lato quelle dei nitriti alcoolici con gli stessi chetoni in presenza di alcoolato, dall'altro quelle che i veri nitrosoderivati organici possono fornire con diversi composti aventi pure idrogeno mobile congiunto a carbonio (2).

Parte sperimentale.

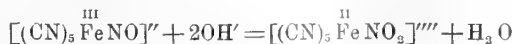
Nelle ricerche che comunico venne adoperato il nitroprussiato sodico parzialmente disidratato (3), ottenuto riscaldando il sale cristallino in stufa a 115°. Debbo però aggiungere che nel caso dell'acetofenone e dell'acetobromofenone per confronto ho usato anche il sale cristallizzato asciugato semplicemente a 100° e che questo mi fornì gli stessi risultati dell'altro.

L'acetofenone usato in queste ricerche bolliva a 200-202° a pressione ordinaria. L'acetobromofenone ($C_6H_4Br . CO . CH_3$) venne preparato dal cloruro di acetile e dal bromobenzolo, seguendo le indicazioni di Schweitzer (4), purificato dall'alcool fondeva a 54° (52° Schweitzer). L'acetilacetone del commercio rettificato bolliva a 135-7°.

Acetofenone. — Aggiungendo ad una soluzione di nitroprussiato in alcool metilico assoluto contenente acetofenone, raffreddando a 0°, una soluzione di alcoolato sodico metilico od etilico, si inizia dopo breve tempo la precipitazione di un prodotto in forma di polvere colorata in rosso-scuro. Dopo 2 o 3 ore, sempre mantenendo a 0°, la precipitazione è al termine.

Il prodotto così ottenuto venne separato filtrando alla pompa, in atmosfera secca, venne lavato ripetutamente con alcool metilico assoluto, ed infine

(1) Questo schema è analogo a quello della trasformazione del nitroprussiato in nitritocianuro:

$$[(CN)_5 \overset{III}{Fe} NO]'' + 2OH' = [(CN)_5 \overset{II}{Fe} NO_2]'''' + H_2O$$

(2) F. Sachs, Berichte *37*, 2341.

(3) Come è noto il nitroprussiato $Na_2Fe(CN)_5NO . 2H_2O$ a 100° trattiene l'acqua di cristallizzazione. Il prodotto da me usato aveva perduto all'incirca il 50 % dell'acqua contenuta; il riscaldamento non venne prolungato, perchè si manifestava in modo sensibile una decomposizione del sale.

(4) Berichte, *24*, 550.

con etere assoluto e posto nel vuoto su ac. solforico e potassa fusa. Tenuto nel vuoto per 48 ore circa all'analisi fornì i risultati seguenti:

	Trovato °/°			Calcol. per $\left[\begin{matrix}Fe(CN)_5\\ C_8H_6O_2N\end{matrix}\right]Na_4 . H_2O$
	I	II	III	
Na	20,60	20,28	20,70	20,72
Fe	12,92	12,99	12,56	12,57
N	19,06	18,74	18,90	18,93
C	—	—	35,56	35,14
H	—	—	1,95	1,81

Le analisi I riguardano il sale prodotto usando i rapporti:
1 Mol. nitroprussiato : 0,5 Mol. acetofenone : 1 Mol. alcoolato. Le II:
1 Mol. " : 1 Mol. " : 2 Mol. " . Le III:
1 Mol. " : 1 Mol. " : 3 Mol. " .

Variando quindi i rapporti dei tre reattivi si ottenne sempre lo stesso prodotto dal rapporto 1 Fe : 6 N : 4 Na, ed in cui dobbiamo pure ammettere il rapporto 1 Fe : 1 $CH_3 . CO . C_6H_5$.

Le condizioni nelle quali si può preparare questo sale sono: gr. 3,5 di nitroprussiato in circa 60 cc. di alcool metilico assoluto, gr. 1,5 di acetofenone e gr. 0,6 di sodio disciolto ia 25-30 cc. di alcool metilico od etilico assoluto. La reazione è opportuno compierla a 0°.

Nel sale da me analizzato ho dovuto ammettere una molecola d'acqua che si elimina difficilmente: con il riscaldamento il sale si decompone ed anche in essicatore a lungo si altera.

Questo sale si presenta in polvere rosso-viva, deliquescente, solubilissimo in acqua, la soluzione è colorata in rosso-violaceo intenso. Esso è insolubile negli alcooli metilico ed etilico assoluti, si discioglie nell'alcool metilico acquoso (contenente anche piccole percentuali di acqua).

Le soluzioni acquose con i sali ferrici dànno un precipitato azzurro-scuro, con quelli ferrosi violetto, con i sali rameici un precipitato pure violetto.

Il sale rameico venne precipitato versando, in un eccesso di soluzione di solfato di rame, una soluzione del sale appena preparata in acqua fredda a 0°. Venne raccolto su filtro, lavato, e seccato nel vuoto a peso costante. Aveva la composizione seguente:

	Trovato °/o	Calcol. per $\left(\begin{matrix}Fe CN)_5\\ C_8H_6O_2N\end{matrix}\right)Cu_2$
Cu	27,65	27.58
Fe	12,19	12,10

Le soluzioni acquoso-alcooliche del sale sodico perdono lentamente il loro colore per assumere quello giallo-scuro, e contemporaneamente si separa da esse uno strato acquoso denso che contiene disciolto un ferrocianuro.

Lo strato acquoso così separatosi venne raccolto, disciolto in acqua e riprecipitato con alcool: venne infine disseccato nel vuoto. Ottenni così un sale in forma di granuli gialli ed in esso ho riconosciuto, in tutte le sue proprietà caratteristiche, il ferroacquopentacianuro. A conferma l'analisi fornì i risultati seguenti:

	Trovato %	Calcolato per $Na_3Fe(CN)_5K_2O$
Fe	20,00	20,46
N	25,17	25,66

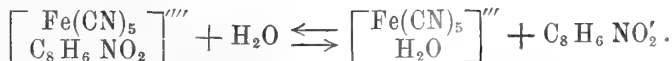
Abbiamo cioè il rapporto 1 Fe : 5 N.

La soluzione acquoso alcoolica da cui si è separato il pentacianuro contiene il sale sodio dell'isonitrosoacetofenone, infatti svaporato a freddo l'alcool, con ac. solforico diluito si precipita il nitrosochetone pressochè puro, fonde a 126°.

Una scissione analoga il sale violetto subisce anche lasciato a sè a lungo in atmosfera umida trasformandosi in una massa pastosa cristallina, giallo-verde [1]. Questa ripresa con acqua acidulata per ac. acetico dà una soluzione giallo-scura, in cui facilmente si riconosce il pentacianuro, ed un residuo di isonitrosochetone.

Il rendimento in isonitrosochetone in queste varie scissioni fu di circa l'80 % del teorico.

In soluzioni acquose il colore del sale violetto non scompare completamente, anche a lungo, si deve raggiungere uno stato d'equilibrio fra le due reazioni:

$$\begin{bmatrix} Fe(CN)_5 \\ C_8H_6NO_2 \end{bmatrix}'''' + H_2O \rightleftarrows \begin{bmatrix} Fe(CN)_5 \\ H_2O \end{bmatrix}''' + C_8H_6NO_2' .$$

Infatti aggiungendo ad una soluzione di pentacianuro (giallo-scura) una soluzione del sale sodico del nitrosoacetofenone (gialla), gradatamente col tempo si manifesta la colorazione violetta caratteristica, più o meno intensa a seconda delle concentrazioni dei due reattivi.

Il *sale acido* venne preparato aggiungendo ad una soluzione, in alcool metilico contenente circa il 10 % di acqua, del sale $\begin{bmatrix} Fe(CN)_5 \\ C_8H_6NO_2 \end{bmatrix} Na_4$ la quantità equivalente di ac. solforico od acetico diluiti in alcool metilico assoluto e raffreddando a 0°. La soluzione intensamente azzurra venne filtrata,

[1] Indubbiamente costituita dai due sali cristallizzati $Na_2Fe(CN)_5H_2O . 7H_2O$ $NaON:CH.CO.C_6H_5$.

sempre raffreddando, e dopo precipitata con etere. Ottenni così una polvere violetta che si discioglie in acqua col caratteristico colore azzurro: venne ridisciolta in alcool metilico al 90 % e riprecipitata con etere e seccata nel vuoto: dopo 48 ore aveva la seguente composizione:

	Trovato %		Calcolato per $\left[\begin{matrix}Fe(CN)_5\\C_8H_7O_2N\end{matrix}\right]Na_3$
	I	II	
Na	16.95	—	17,08
Fe	14.37	13,54	13,82
N	—	20,34	20,81

Le analisi I e II riguardano due diverse preparazioni del sale, nel quale troviamo adunque i rapporti 3 Na : Fe : 6 N. Esso è insolubile in alcool metilico assolulo, deliquescente, solubilissimo in acqua. Ha i caratteri dei ferrocianuri: non svolge iodo dalle soluzioni di ioduro potassico. All'aria umida si decompone lentamente assumendo colore giallo-verde: allora ripreso con acqua lascia un residuo di isonitrosochetone e in soluzione passa il ferropentacianuro.

Acetobromofenone. — Ho esteso la reazione del nitroprussiato a questo chetone per il fatto che in alcuni saggi preliminari il suo isonitrosoderivato si mostrò assai meno solubile nell'acqua, specie acidulata, del derivato dell'acetofenone e potevo così studiare più agevolmente l'andamento quantitativo della decomposizione del sale sodico violetto.

La reazione col nitroprussiato, nelle stesse condizioni descritte, procede con questo chetone in modo del tutto simile all'acetofenone. Il sale ottenuto ha pure caratteri del tutto simili a quello su descritto. Tenuto nel vuoto come l'analogo precedente fornì all'analisi le cifre seguenti:

	Trovato %			Calcol. per $\left(\begin{matrix}Fe(CN)_5\\C_8H_5BrNO_2\end{matrix}\right)Na_4 . CH_3OH$
	I	II	III	
Na	16,90	—	17,61	17,13
Fe	10,17	10,08	10,46	10,40
N	15,33	15,58	15,39	15,65
C	—	30,68	—	31,29
H	—	1,97	—	1,68

I risultati analitici portano ad ammettere come probabile la presenza di una molecola di alcool metilico.

Questo sale si decompone in soluzione acquosa in modo simile al precedente: ottenni anche da esso l'acquopentacianuro. La decomposizione del sale si pone pure in evidenza impastandolo con poca acqua, dopo breve tempo si ottiene una massa cristallina giallo-verde che, ripresa con acqua acidulata per acido debole, dà un residuo insolubile bianco-giallognolo di isonitroso-

bromoacetofenone ed in soluzione passa l'acquoferrocianuro. Il nitrosocomposto venne raccolto su filtro, lavato, fino ad eliminazione del ferrocianuro, con acqua acida per ac. acetico e seccato nel vuoto su ac. solforico e potassa. Ottenni in due scissioni usando rispettivamente gr. 1,15 e gr. 2,10 di sale, un rendimento dell' 87 % e dell' 89 % del teorico. Il prodotto ottenuto ha tutti i caratteri degli isonitrosochetoni, fonde decomponendosi a 162-4°: è solubile in alcool, poco solubile nell'etere, poco solubile in acqua. All'analisi dimostrò la composizione seguente:

	Trovato %	Calcolato per $C_6H_4Br.CO.CH_2.NO$
N	5,84	6,14
Br	34.66	35,07

Il sale violetto dell'acetobromofenone trattato con acidi deboli, in soluzione acquosa, assume anch'esso il colore azzurro, ma questo s'attenua lentamente rendendosi manifesta la decomposizione anche con la separazione dell'isonitrosochetone in minuti cristalli.

Acetilacetone. — Scelsi questo chetone alifatico data la notevole sensibilità della sua reazione col nitroprussiato e quindi la probabilità che la reazione procedesse, anche in ambiente alcoolico, con grande rapidità, per modo che si potessero fuorviare reazioni secondarie.

La reazione venne condotta nel modo su descritto, impiegando etilato sodico. Si separa un prodotto pastoso che si raccoglie con difficoltà: lavato, seccato nel vuoto e polverizzato si presenta di colore rossastro-scuro. È deliquescente, solubilissimo in acqua con colore rosso che con gli acidi deboli volge al rosso-violetto. Dà con i sali ferrici colorazione verde-azzurra, con quelli ferrosi precipitato rosso-scuro, con i sali rameici un precipitato pure rosso scuro.

Le analisi diedero i risultati seguenti:

	Trovato %		Calcolato per $\left[\begin{matrix}Fe(CN)_5\\ C_5H_6O_3N\end{matrix}\right]Na_4$ %
	I	II	
Na	22,93	23,13	22,66
Fe	14,09	13,75	13,75
N	20,13	20,83	20,71

Questo sale però in soluzione neutra si presenta alquanto stabile, ma in soluzione alcalina perde rapidamente il color rosso e si manifesta una decomposizione anche del ferropentacianuro. Il liquido alcalino venne acidificato con ac. solforico ed estratto con etere. Questo lasciò un residuo che conteneva ac. acetico ed isonitrosoacetone. L'isonitrosoacetone ricristallizzato fondeva a 68°. Evidentemente l'azione dell'alcali induce la decomposizione

dell'isonitrosoacetilacetone, contenuto nel sale complesso colorato, in acido acetico ed isonitrosoacetone (¹).

Riassumendo i caratteri dei composti che ho su descritti, osserverò che la molecola d'acqua trattenuta tenacemente a freddo dal sale dell'acetofenone e quella dell'alcool metilico con probabilità presente nel sale del bromoacetofenone indurrebbero a pensare che queste entrino nella costituzione del sale complesso colorato. Come se nella salificazione del pentacianuro $Na_3\begin{bmatrix} C_6H_5 . CO . CH : NOH \\ Fe(CN)_5 \end{bmatrix}$ fosse trattenuta un'intera molecola d'alcali e d'alcoolato senza eliminazione dell'acqua e dell'alcool metilico. Ma d'altra parte abbiamo il sale rameico che risponde bene alla composizione anidra $Cu_2\begin{bmatrix} C_6H_5 . CO . CH : NO \\ Fe(CN_5) \end{bmatrix}$ e così pure il sale sodico ottenuto dall'acetilacetone. Giova ricordare che nel nitroprussiato ad es. le due molecole di acqua sono trattenute anche a 100°.

Riguardo alla grande solubilità in acqua di questi sali, osserverò che essa trova riscontro nella solubilità pure notevolissima che hanno numerosi pentacianuri del ferro. Anche la decomponibilità con acqua richiama la dissociazione più o meno spiccata che alcuni pentacianuri possono subire;

ad es.: $$\begin{bmatrix} Fe(CN)_5 \\ H_2O \end{bmatrix}''' + NH_3 \rightleftarrows \begin{bmatrix} Fe(CN)_5 \\ NH_3 \end{bmatrix}''' + H_2O .$$

Noterò infine che il colore dei ferrocianuri che ho descritti, si differenzia da quello dei ferropentacianuri che è generalmente giallo od aranciato; ma ricorderò ancora che i sali complessi ferrosi delle diossime studiati da Tschugaeff (²) sono colorati in rosso-porpora o rosso-violetto, ed io ho osservato che anche i sali ferrosi degl'isonitrosochetoni hanno in soluzione un colore simile.

Le reazioni che ho esposte possono spiegarci come anche composti di natura assai diversa dai chetoni e dalle aldeidi possano fornire reazioni cromatiche intense col nitroprussiato, come ad es. alcuni indoli ed il nitrometano. Sono infatti sostanze che possono fornire isonitrosoderivati e quindi costituire un'ione complesso analogo a quello ottenuto da alcuni chetoni.

(¹) Analogamente a quanto avviene per l'acetilacetone che si decompone in acido acetico ed acetone per azione degli alcali.

(²) Zeit. Anorg. Chem., 16, 158.

Chimica. — *Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce* (1). Nota di R. Ciusa e A. Piergallini, presentata dal Socio G Ciamician.

H. v. Pechmann (2) per ossidazione del metiletilglicole con acqua di bromo alla luce ottenne l'acetilpropionile; recentemente G. Ciamician e P. Silber (3), e R. Ciusa e A. Milani (4) si servirono della stessa reazione per trasformare il dimetilglicole in diacetile. Pechmann nel suo lavoro accenna inoltre che anche l'acido tartarico e l'idrobenzoino si comportano analogamente: a noi parve perciò non privo d'interesse riprendere lo studio della reazione estendendola ad altri corpi ossidrilati (5).

Come era da prevedersi, e come è già noto in parte anche per le ricerche analoghe di Benrath (6), la luce ha un'influenza notevolissima sull'andamento della reazione, nel senso che al buio il bromo non ha alcuna azione, oppure la ha assai piccola. Per l'acido citrico si ha che la formazione del pentabromoacetone al buio avviene in piccolissima quantità e solo dopo un certo tempo, mentre avviene istantaneamente appena si fa arrivare un raggio di luce solare sul miscuglio della reazione (vedi più avanti). In tutti i casi il bromo fu fatto agire in soluzione acquosa in bottiglie di vetro bianco chiusi con turacciolo smerigliato: contemporaneamente si è fatto sempre la prova al buio mettendo accanto al recipiente di vetro bianco un altro identico coperto con carta nera.

Le esperienze furono eseguite nei mesi di giugno e luglio.

Acido lattico.

Gr. 9 di ac. lattico (una mol.) sciolti in 640 ccm. di acqua di bromo al 2,5 % (una mol.) furono esposti alla luce per una giornata. Al miscuglio della reazione, leggermente giallognolo per bromo ancora presente, si aggiunge successivamente anidride solforosa, acetato sodico e fenilidrazina: precipitò immediatamente il fenilidrazone dell'acido piruvico. Cristallizzato dall'alcool fonde a 182-183°

$$CH_3 . C(:N_2HC_6H_5)COOH \quad \text{Calc. N}:15,73 \; ; \quad \text{Trov. N}:16,07 \; .$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) H. v. Pechmann Berichte, XXIII, 2427.

(3) Rend. R. Acc. Lincei, XX, 1°, 716.

(4) Rend. R. Acc. Lincei, XXII, 2°, 684.

(5) Vedi R. Ciusa e A. Milani, loc. cit. pag. 682.

(6) Liebigs Annalen, *382*, 222.

L'acido lattico viene ossidato quindi dal bromo alla luce secondo la equazione

$$CH_3\,CHOH\,COOH + Br_2 = 2\,H\,Br + CH_3\,CO\,COOH\,.$$

In una seconda esperienza gr. 25,5 di acido lattico furono sciolti in 1900 ccm. di acqua di bromo al 2,5 %, ed il miscuglio esposto alla luce. Dopo 24 ore si prelevarono 100 ccm. (corrispondenti a gr. 1,34 di acido lattico) e si precipita l'ac. piruvico formatosi sotto forma di idrazone. Il precipitato seccato su ac. solforico pesava gr. 0,5 invece di gr. 2,17 : acido lattico ossidato ad acido piruvico il 23,0 %. Dopo altre 24 ore si prelevarono altri 100 ccm. ed il fenilidrazone dell'ac. piruvico ottenuto dopo il solito trattamento pesava gr. 0,75; che corrisponde all'ossidazione del 34,56 % di ac. lattico ossidato: il liquido della reazione era completamente scolorato e non conteneva più bromo.

La prova fu ripetuta al buio, esponendo alla luce del sole l'ac. lattico (una mol.) sciolto nell'acqua di bromo (una mol.) in una boccia coperta da carta nera. Dopo 30 ore circa di esposizione, il miscuglio della reazione trattato come sopra non dà con fenilidrazina alcun precipitato.

Acido tartarico.

Gr. 24 di ac. tartarico (una mol.) sciolti in 1950 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (2 mol.) furono esposti alla luce per 5 ore: si notò sviluppo di gas.

Allontanato l'eccesso di bromo con SO_2, dopo aggiunta di acetato sodico si ebbe con fenilidrazina un precipitato giallo aranciato voluminoso. Questo precipitato venne messo a digerire a 50-60° con alcool: una piccola parte rimase indisciolta.

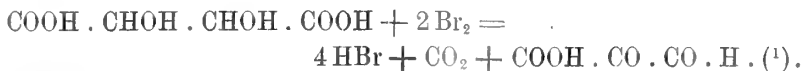
Dalla soluzione cristallizza per raffreddamento il diidrazone dell'acido formilgliossilico fondente a 209°.

$COOH\,.\,C(:N_2HC_6H_5)\,.\,C(:N_2HC_6H_5)H$ Calc. N:19,85 ; Trov. N:19,88 .

La parte rimasta indisciolta è il sale sodico del diidrazone dell'acido formilpiruvico, formatosi evidentemente per azione dell'eccesso di acetato sodico. Sciolto in acqua fornì per aggiunta di acido solforico diluito l'acido libero fondente a 209°.

In una seconda esperienza furono esposte due bottiglie contenenti ciascuno 12 gr. di acido tartarico (1 mol.) sciolti in 1000 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (2 mol.): una delle bottiglie era coperta di carta nera. Dal liquido che subì l'azione della luce si ebbe dopo il solito trattamento un precipitato giallo del diidrazone dell'ac. formilgliossilico pesante gr. 5. Non si ebbe invece alcun precipitato dal liquido al buio.

Alla luce il bromo in soluzione acquosa ossida quindi l'ac. tartarico ad acido formilgliossilico con eliminazione di anidride carbonica.

$$COOH\,.\,CHOH\,.\,CHOH\,.\,COOH + 2\,Br_2 = 4\,HBr + CO_2 + COOH\,.\,CO\,.\,CO\,.\,H\,.\ ^{(1)}.$$

Anche G. Ciamician e P. Silber ottengono nell'autossidazione dell'acido tartarico alla luce dopo trattamento con fenilidrazina la stessa sostanza [2]. Non siamo invece riusciti ad avere neanche in piccola quantità l'idrazone dell'ac. gliossilico che, secondo Renrath [3], si ottiene in grande quantità per ossidazione fotochimica dell'acido tartarico con bromo. La differenza è dovuta certamente alla differente durata dell'esposizione.

Acido mandelico.

Gr. 17 di acido mandelico (una mol.) sciolti in 720 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (una mol.) furono esposti alla luce. Dopo circa 6 ore tutto il bromo era scomparso. Aprendo la bottiglia si notò pressione gassosa ed odore di aldeide benzoica. Il liquido per raffreddamento lasciò depositare una sostanza cristallina bianca fondente a 121°: *ac. benzoico.*

Il liquido filtrato dall'ac. benzoico fu trattato con acetato sodico ed acetato di fenilidrazina, col che si ottenne un abbondante precipitato giallognolo: il precipitato filtrato e lavato fu fatto digerire con carbonato sodico.

La parte indisciolta era formata dal fenilidrazone della benzaldeide (fototropo, P. F. 155°). Dal liquido filtrato si ebbe per aggiunta di acido solforico diluito un precipitato giallognolo, che cristallizzato dall'alcool fuse a 176° come il fenilidrazone dell'acido fenilgliossilico.

$$C_6H_5C(:N_2HC_6H_5)COOH \quad \text{Calc. N}:11,66\,; \quad \text{Trov. N}:11,80\,.$$

In una seconda esperienza si esposero alla luce due bottiglie contenenti ciascuna gr. 43 di ac. mandelico (una mol.) sciolti in 1950 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (una mol.).

Una bottiglia era coperta da carta nera. Dopo 5 ore d'insolazione i due liquidi furono sottoposti allo stesso trattamento. Dalla prova al buio si ebbe pochissimo acido benzoico (quantità non pesabile) gr. 8,25 di fenilidrazone della benzaldeide e gr. 8,75 di fenilidrazone dell'ac. fenilgliossilico. Da quella

(1) L'emi-aldeide dell'acido tartronico, come anche l'acido ossi piruvico, possono dar luogo con fenilidrazina allo stesso osazone da noi ottenuto.

(2) Berichte, XLVI, 1558.

(3) Loc. cit.

alla luce si ebbero invece 12 gr. di ac. benzoico, gr. 6 di fenilidrazone dell'aldeide benzoica e gr. 14 del fenilidrazone dell'ac. fenilgliossilico.

Prodotto ottenuto		alla luce	al buio
Acido benzoico	gr.	12	Piccola quantità
Benzalfenilidrazone	"	6	8,25
Fenilidrazone dell'ac. fenilgliossilico	"	14	8,75

L'influenza della luce nell'azione ossidante del bromo è evidente: l'acido mandelico per azione del bromo in soluzione acquosa vien ossidato ad acido fenilgliossilico alla luce più che al buio: alla luce è pure assai più intensa l'eliminazione dell'anidride carbonica dall'ac. fenilgliossilico e l'ossidazione dell'aldeide così formatasi ad ac. benzoico.

Glicerina.

Gr. 15 di glicerina (una mol.) sciolti in 1000 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (1 mol.) furono esposti alla luce per 5 ore.

Il liquido trattato prima con anidride solforosa e successivamente con acetato sodico ed acetato di fenilidrazina dettero, tenendo il miscuglio a 50-60°, un precipitato giallo-arancio che cristallizzato da un miscuglio di ligroino e benzolo fuse a 134° come l'osazone del gliceroso.

$C_{15}H_{16}ON_4$ Calc. N:20,89 ; Trov. N:20,85

Dalla prova al buio non si ebbe alcun precipitato con acetato di fenilidrazina.

La glicerina vien quindi ossidata sotto l'azione della luce, dal bromo in soluzione acquosa, a gliceroso.

Prima dell'aggiunta della fenilidrazina il liquido dà tutte le reazioni degli zuccheri.

Mannite.

Gr. 14,2 di mannite sciolti in 500 ccm. di acqua di bromo al $2\frac{1}{2}$ % (1 mol.) furono esposti alla luce per 7 ore. Allontanato il bromo in eccesso con anidride solforosa si aggiunse acetato sodico e acetato di fenilidrazina. Dal miscuglio della reazione tenuto a b. m. si separò lentamente una sostanza giallognola che seccata su acido solforico e cristallizzata dall'alcool fuse a 205-206°, come l'osazone del mannosio.

$C_{18}H_{22}O_4N_4$ Calc. N:15,64 ; Trov. N:15,70

Anche dalla prova al buio si ottenne un liquido che, come quello che aveva subìto l'azione della luce, mostra, dopo aggiunta di anidride solforosa e neutralizzazione con alcali, le reazioni degli zuccheri, ma in grado molto

minore. Dal liquido esposto alla luce si ebbero gr. 0,7 di osazone, dalla prova al buio gr. 0,15.

Acido citrico.

Secondo Cloëz [1] il bromo non agisce sull'ac. citrico anche dopo una insolazione di parecchi mesi. Il cloro invece fatto passare sulla soluzione acquosa d'acido citrico alla luce diretta del sole dà origine a percloroacetone. Come abbiamo trovato noi anche il bromo agisce in modo analogo.

Gr. 30 di ac. citrico (1 mol.) vennero sciolti in 1000 ccm. di acqua di bromo al 2,5 % (1 mol.). La soluzione appena colpita da un raggio di sole s'intorbida immediatamente per la formazione di un composto cristallino bianco.

Dopo 24 ore si allontana il bromo con anidride solforosa, ed i cristalli formatesi vengono filtrati e cristallizzati ripetutamente dall'alcool leggermente diluito 80-85 %. All'analisi si ebbero dei numeri che concordano con quelli richiesti dal pentabromo-acetone.

$CHOBr_5$ Calc. Br: 88,29 ; Trov. 88,87 .

Fonde a 75°, il perbromoacetone fonde a 110°.

Se la soluzione dell'ac. citrico in acqua di bromo si prepara e si conserva al buio non si osserva alcuna azione: basta però esporre alla luce tale soluzione perchè si abbia immediatamente la precipitazione del pentabromoacetone. Solamente, dopo molto tempo (due mesi circa), cominciano a separarsi dalla soluzione tenuta al buio dei cristalli di pentabromoacetone.

Queste ricerche saranno continuate.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della miersite e della cuprojodargirite.* Nota III di E. QUERCIGH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

In seguito alle ricerche termiche ed ottiche, di cui ho reso conto nelle precedenti Note I e II [2], espongo qui le rimanenti esperienze eseguite sull'argomento, e le conclusioni che dal loro complesso si sono venute delineando.

4) *Esperienze sulla sintesi della miersite.*

Siccome nel giacimento di Broken Hill la miersite, rinvenuta da Spencer, non può essersi formata per fusione, ho cercato di avvicinarmi alle probabili condizioni naturali della sua formazione, ricorrendo, nei primi tentativi di sintesi, alla via idrotermale.

(1) J. *1861*, 370, vedi anche Benrath, loc. cit.

(2) Rend. Acc. Lincei XXIII (1914) 1° sem., pag. 446 e 711.

A tale scopo, riscaldai per circa 90 ore, in autoclave a 300°, un miscuglio, a parti eguali, di due minerali comuni di rame e d'argento, la calcosina e l'argentite, finamente polverizzati, con una soluzione concentrata di ioduro potassico. Ottenni in tal modo, frammisti alla maggior parte dei materiali posti a reagire rimasti inalterati, dei minutissimi cristallini biancastri, uno dei quali potè essere portato al goniometro e si manifestò della forma di una piramide esagonale combinata col pedione negativo; potei misurare tanto l'angolo di due facce di piramide, quanto quello di una di esse col pedione, ed ottenni i seguenti valori, i quali non lasciano alcun dubbio che si tratti di iodirite:

angoli	misurati	calcolati colle costanti di Zepharovich $a : c = 1 : 0.81960$
$(20\bar{2}1):(02\bar{2}1)$	52° 19′	52° 28 ½′
$(000\bar{1}):(20\bar{2}1)$	117 40	117 51

Essi presentano una combinazione assai semplice, simile a quella osservata da Seligmann nei cristalli di Dernbach (Nassau) (1), colla differenza che in questi ultimi le facce alterne possedevano sviluppo molto diverso, fatto, questo, che non si verifica nei miei.

Eseguendo l'esperienza colle stesse sostanze, ma tenendo l'autoclave a 185° per 150 ore, ottenni due minerali sintetici: la covellina e la jodirite.

La covellina, Cu S, si presenta in lamine bellissime a contorno esagonale, del diametro massimo di circa 4 mm., con colore azzurro cupo e riflessi metallici violacei; al microscopio restano opache; riscaldate in tubetto chiuso, dànno, a differenza della calcosina, un sublimato di zolfo. Questo minerale, ottenuto sinteticamente già da Knop (2). da Doelter (3), da Weinschenk (4), non era ancora stato riprodotto nelle condizioni suesposte; alla sua formazione non può essere estranea la presenza dell'argentite e dell' ioduro potassico, poichè, ripetendo l'esperienza nelle stesse condizioni, ma escludendo questi due componenti, la covellina non si forma.

La iodirite formatasi si presenta in cristalli prismatici esilissimi, lunghi fino ad 1 mm., nei quali, generalmente, non si possono riconoscere altre facce che quelle del prisma $\{10\bar{1}0\}$; in un individuo potei misurare approssimativamente anche le facce terminali, e stabilire così, che rappresentava la combinazione del prisma esagonale colle piramidi $\{30\bar{3}4\}$ e $\{40\bar{4}1\}$ e col pedione, come si vede dai valori seguenti:

angoli	misurati	calcolati come sopra
$(10\bar{1}0):(01\bar{1}0)$	60° 15′	60° 0′
$(0001):(30\bar{3}4)$	35 7	35 22
$(0001):(40\bar{4}1)$	76 19	75 12

(1) G. Seligmann, Zeitschr. f. Kryst. *6* (1882) 230.
(2) Knop., N. Jahrb. (1861) 533.
(3) Doelter, Zeitschr f. Kryst *11* (1886) 35.
(4) Weinschenk, Zeitschr. f. Kryst *17* (1890) 497.

Non avendo, però, con le esperienze riferite, potuto ottenere la miersite, ricorsi alla cristallizzazione di soluzioni concentrate, calde, di Cu I ed Ag I in acido iodidrico. Ottenni, così, dei cristalli tetraedrici, di mm. 3-5 di lato, costituiti da minutissimi individui pure tetraedrici, di color giallo chiaro ambrato, splendore tra adamantino e resinoso, monorifrangenti, fragili, simili a quelli ottenuti da Gossner [1] evaporando lentamente le soluzioni di Cu I in H I. L'analisi quantitativa dimostrò, però, che essi contenevano quasi il 24 % in peso di Ag I, quantunque i singoli cristalli mi si mostrassero al microscopio perfettamente omogenei ed isotropi. Avuta, così, una conferma della solubilità, allo stato solido, dell'Ag I nel Cu I, e trovato il metodo di ottenere tali soluzioni solide ben cristallizzate, sottoposi alla cristallizzazione frazionata, in essiccatore a vuoto, su potassa, una soluzione satura di quantità eguali di Cu I ed Ag I, in H I; separando di tanto in tanto ad intervalli regolari di tempo, le singole porzioni depositate. I risultati ottenuti sono i seguenti:

1ª porzione. È formata da aggregati tetraedrici, molto compatti, di 4-6 mm. di lato, che sono costituiti da piccoli tetraedri in associazione rigorosamente parallela, tanto che portati direttamente al goniometro dànno immagini bellissime, come se si trattasse di un unico individuo; misurato, infatti, un angolo fra due facce adiacenti, ottenni il valore di 109° 27′, mentre il teorico, come si sa, è di 109° 28′. Questi cristalli hanno colore giallo chiaro, ambrato, e lucentezza resinoso-adamantina; i frammenti esaminati a nicols incrociati appaiono privi di elementi birifrangenti; fusi al microscopio, nel raffreddamento, cristallizzano dapprima otticamente isotropi: in seguito manifestano, a circa 390°, un istante di netta birifrangenza, per ritornare subito monorifrangenti. L'analisi quantitativa di alcuni individui scelti fra i migliori diede un contenuto medio del 6, 91 % in peso di Ag I.

2ª porzione. È costituita da tetraedri, piccoli ma bellissimi (lato mm. 0.2 — 0.4), completamente monorifrangenti, con proprietà simili a quelle dei precedenti; fusi, però, non manifestano nè durante il raffreddamento, nè durante il riscaldamento susseguente, alcun indizio di birifrangenza. L'analisi diede 11.20 % di Ag I (peso).

3ª porzione. Essendosi verificata la cristallizzazione un po' più rapidamente, si osservano, fra i cristalli tetraedrici soliti, dei cristallini prismatici, birifrangenti, di iodirite; ed essendo difficile la loro separazione, ne fu trascurata l'analisi.

4ª porzione. Cristallini tetraedrici bellissimi, monorifrangenti, di color giallo canario; fusi al microscopio dànno una massa che si mantiene perfettamente isotropa fino a temperatura ordinaria. L'analisi diede il 62.8 % di Ag I in peso.

[1] Zeitschr. f. Krist., XXXVIII (1904), 131.

5ª *porzione*. Cristalli tetraedrici simili ai precedenti, monorifrangenti; qualche raro individuo porta attaccato un microscopico cristallino birifrangente: la quantità di iodirite che in tal modo si trova presente accanto alla soluzione solida, deve, però, per quanto ad occhio si può apprezzare grossolanamente, essere inferiore all' 1 %. Fondendo al microscopio questi cristalli, si osserva che nel raffreddamento a 147° si manifestano molti punti birifrangenti, similmente, ma in proporzione maggiore, a quanto accade per le miscele 8 AgI + 2 CuI.

L'analisi diede l'88.54 % di AgI in peso.

6ª *porzione*. Questo prodotto non si presenta nè bello nè omogeneo; vi si osservano, frammisti ai soliti cristalli tetraedici, molti prismi birifrangenti di iodirite, forse perchè fu raggiunto il limite di saturazione delle soluzioni solide di AgI in CuI, come farebbe credere la presenza di qualche piccolo individuo di iodirite attaccato ai cristalli della porzione precedente.

Risulta, ad ogni modo, dall'analisi della 5ª porzione, che la miersite di Spencer, analizzata da Prior non aveva, con tutta probabilità, la composizione limite di questa serie di soluzioni solide, poichè il limite di solubilità di AgI in CuI a temperatura ordinaria sembra superiore all'80 % molec. di AgI (miersite di Spencer) e non dev'essere molto lontano dall'88.5 % in peso, corrispondente all'86 % molec. circa.

A proposito della possibilità di ottenere queste soluzioni solide cristallizzate in individui distinti, ricorderò qui che anche per cristallizzazione diretta delle masse fuse non dovrebbe esser difficile di ottenerli, poichè, estraendo rapidamente il tubetto della pinza termoelettrica della massa fusa al 60 % CuI, ebbi ad osservare che un cristallo si era abbozzato alla sua estremità; aveva l'aspetto, per quanto incompleto di un rombododecaedro, il che fu confermato dalle misure. Quantunque le facce non fossero perfettamente piane, ottenni i valori $(1\bar{1}0):(110) = 90°$ e $(101):(110) = 59°$.

Discussione dei risultati.

Stabilito, mediante l'osservazione microscopica del processo di cristallizzazione dell' ioduro rameoso, che esso esiste al disopra di 440° in una modificazione cubica, si possono interpretare, in modo esauriente, i risultati dell'analisi termica del sistema CuI + AgI.

Infatti, se entrambi i componenti cristallizzano dalla fase liquida amorfa, nel sistema regolare, risulta evidente che possano formare cristalli misti in tutti i rapporti, come è indicato dal diagramma di fusione, che, completato in base agli altri risultati ottenuti per altra via, diventa il diagramma di stato del sistema riportato nella annessa figura.

La trasformazione di α CuI in β CuI birifrangente che è otticamente molto facile ad osservarsi, non è accompagnata da effetto termico apprezzabile

nelle condizioni sperimentali adottate per l'analisi termica, poichè non fu osservato nè da me, nè da Mönkemeyer nelle curve di raffreddamento, che al contrario dimostrano benissimo la trasformazione β CuI $\rightleftarrows$ γ CuI; dilatometricamente Rodwell non potè osservarne alcuna.

Facendo passare una retta per il punto E, in cui ha luogo la trasformazione: α CuI $\rightleftarrows$ β CuI, e per l'altro punto H, che rappresenta la temperatura di 400° a cui la miscela: 95 CuI + 5 AgI subisce analoga trasformazione dalla fase mono- alla birifrangente, essa rappresenterà schematicamente la separazione dei due campi di esistenza di dette fasi; come si vede dalla costruzione grafica, questa retta incontra la curva CD nel punto F al 90 % CuI, e ciò spiega, come si disse, il fatto che per miscele di questa concentrazione non fu possibile otticamente di osservare la comparsa della birifrangenza.

La fine della trasformazione dei cristalli misti, che ha il suo inizio lungo la curva CD, non si potè osservare termicamente per concentrazioni inferiori al 70 % CuI; per esse però possiamo servirci dei risultati dilatometrici di Rodwell che possono completare i dati termici, almeno da quanto risulta dalla seguente tabella I in cui sono riportati, accanto a questi ultimi, i dati corrispondenti che si ottengono per estrapolazione ed interpolazione, costruendo la curva secondo le esperienze di Rodwell [1].

TABELLA I.

% Mol. di AgI	Metodo dilatometrico Rodwell		Metodo termico Quercigh		Differenze	
	inizio	fine	inizio	fine	inizio	fine
100	151°	148°	147°	147°	4°	1°
95	172	149	175	147	3	2
90	197	150	205	?	8	—
80	239	151	245	?	6	—
70	275	180	270	?	5	—
60	280	215	278	?	2	—
50	297	235	298	?	1	—
40	310	265	319	?	9	—
30	325	300	335	307	10	7
20	347	337	350	334	3	3
10	370	360	370	354	0	6

[1] Rettifico, a tale proposito, un curioso errore insinuatosi nella letteratura sulla trasformazione α AgI $\rightleftarrows$ β AgI osservata dilatometricamente da Rodwell. Infatti, mentre egli (Phil. Trans. 173 (1883) 1136) scrisse che la contrazione « commenced at 142° C and terminated at 156°5 C; but mainly took place between 148° and 151°3 » in molti trattati fra cui citerò solo Liebisch Phys. Kryst. (1891) 96; Moissan, *Traité de chimie minérale*,

Come si vede, i risultati, data la diversità dei metodi di misura delle temperature e della purezza delle sostanze adoperate, si possono considerare molto concordanti e si possono completare per poter tracciare il prolungamento della curva Cf della fine di trasformazione. Si ottiene in tal modo la curva CfL che incontra in L la Dh. Essa rappresenta, però, la fine della trasformazione nelle condizioni, molto simili fra loro, delle ricerche termiche e dilatometriche in cui, evidentemente, l'equilibrio fra le varie fasi non si stabilisce in modo perfetto; ancor più spostata dalla reale, sarebbe quella costruita in base ai risultati di ricerche ottiche, sulla fine della trasformazione, poichè qui è ancora più difficile lo stabilirsi dell'equilibrio fra le varie fasi presenti ([1]).

La curva reale dovrebbe invece, secondo le analisi delle soluzioni solide ottenute per cristallizzazione, incontrare la Dh in h, cioè a circa 86 °/₀ mol. di AgI, ammettendo che la sua solubilità nel CuI non varii molto tra la temperatura ordinaria e 147° : dovrebbe, cioè, non esser molto discosta dalle Cfh, se si considera inoltre che, per alte concentrazioni in CuI, cioè da C ad f le differenze non possono esser molto forti.

Dal complesso delle osservazioni esposte risulta il diagramma di stato del sistema CuI + AgI riportato nella figura, nel quale:

1) Alla concentrazione 100 °/₀ mol. di CuI si ha: al disopra di 602° l'esistenza della sua fase liquida amorfa; nell'intervallo AE da 602° a 440° quella della sua I fase cristallina cubica, α CuI; nell'intervallo EC da 440°

V (1905) 537; Gmelin-Krant's, Handb. d. anorg. Chemie V (1908), 2°, pag. 215; Hintze, Handb. d. Mineralogie, I (1912) 2310 si riporta per le osservazioni di Rodwell la cifra di 142° o l'intervallo 142°-145°; lo stesso errore è ripetuto in generale da tutti gli sperimentatori che ebbero occasione di citare il Rodwell.

Invece tanto dal testo che dei coefficienti di contrazione dati dal Rodwell (loc. cit., pag. 1136) quanto dalla curva temperatura-volumi specifici, data da lui alla tav. 96, risulta chiaramente che si deve considerare come temperatura più verosimile di trasformazione quella di 148° come intervallo in cui il fenomeno della contrazione subordinata si presenta nel modo più spiccato, quello 148°-151°, adottato nella presente tabella.

([1]) Volli vedere se la velocità di diffusione a 100° nei preparati microscopici eterogenei ottenuti per fusione e descritti al § 3, fosse abbastanza forte per poter venire osservata in questo caso, in cui ciò sarebbe molto agevole data la diversità di comportamento ottico dei componenti: trovai che i preparati al 75, 80, ed 85 °/₀ AgI, tenuti per 350 ore a bagno maria, divennero perfettamente omogenei e monorifrangenti, ed in quelli al 90 e 95 °/₀ AgI il numero e le dimensioni degli elementi birifrangenti diminuì fortemente; identici risultati osservai nei preparati tenuti alla temperatura ordinaria per varie settimane; scaldati in seguito a 150°, tutti presentano, dopo raffreddamento, gli elementi birifrangenti derivati dallo smistamento, nelle proporzioni indicate al § 3.

Queste miscele si prestano così ad una nuova, elegante dimostrazione della diffusione nei cristalli, anche alla temperatura ordinaria.

a 402° quella di β CuI birifrangente; da 402° a temperatura ordinaria, quella della II fase cubica: γ CuI.

2) Alla concentrazione 100 % AgI si ha, al disopra di 557°, la fase amorfa liquida; nell'intervallo BD fra 557° e 147° quella cristallina monorifrangente e fluente, α AgI; da 147° a temperatura ordinaria, la esagonale.

3) Al disopra della curva *AmB* esistono le soluzioni liquide amorfe dei due componenti.

Diagramma di stato del sistema CuI + AgI.

4) Lungo il braccio di curva *Aam* si inizia la formazione dei cristalli misti monorifrangenti di AgI in CuI, cioè degli equilibrî monovarianti fra questa fase cristallina, la massa fusa ed il vapore, i quali possono coesistere nell'area *AcnmaA*.

Lungo la curva *Bbm* invece ha principio la formazione di cristalli misti fluenti di CuI in AgI, cioè analogamente si iniziano gli equilibri monovarianti fra questa fase cristallina monorifrangente plastica, la massa fusa ed il vapore, che possono coesistere soltanto nell'area *BbmndB*.

5) Lungo la curva *AcndB* si verifica, nel raffreddamento, l'aumento di un grado di varianza nei sistemi, per eliminazione della fase liquida.

6) L'esistenza delle soluzioni solide monorifrangenti di AgI in CuI è limitata all'area *AEHFrncA*, quella dei cristalli misti fluenti monorifrangenti di CuI in AgI, all'area *BdnrDB*.

7) Lungo la linea EHF, si verifica la trasformazione degli α-cristalli misti monorifrangenti, di AgI in CuI, nei β-cristalli birifrangenti il cui campo di esistenza è limitato all'area $EHFCE$.

8) La curva CF è il luogo del principio della trasformazione di tali cristalli misti birifrangenti, nella modificazione γ monorifrangente, stabile a basse temperature.

La Fr è invece quello della trasformazione diretta degli α- nei γ- cristalli misti.

Lungo la rD si verifica la trasformazione dei cristalli misti fluenti, monorifrangenti, di α AgI nell'α CuI, in quelli, pure monorifrangenti ma non plastici, di α AgI in γ CuI.

9) Lungo la curva CfL, ha termine, nelle condizioni sperimentali delle ricerche termiche e dilatometriche, la trasformazione suddetta; mentre nell'ipotesi di perfetto equilibrio fra le varie fasi durante il raffreddamento, tale curva dovrebbe avere la direzione Cfh, se non è molto errato il prendere come limite massimo di solubilità di AgI nel γ CuI, a 147°, quello trovato a temperatura ordinaria, cioè dell'86 % mol. AgI.

10) A 147°, lungo la retta DL si ha la trasformazione di α AgI rimasto puro, dopo la formazione degli ultimi cristalli misti di γ CuI a massima concentrazione in AgI, nella fase esagonale.

11) Nell'area $CfhMPC$ esistono soltanto soluzioni solide di AgI in γ CuI, mentre nell'area $MhDNM$ esistono, oltre ad esse, anche i cristalli birifrangenti di β AgI, ad esse meccanicamente commisti.

Se un composto si formasse fra CuI ed AgI, si sarebbe dovuto poter osservare termicamente alla temperatura della sua formazione o trasformazione, l'invarianza dell'equilibirio, mentre il complesso di tutte le esperienze riferite, esclude tale ipotesi e dimostra che il concetto universalmente accettato della costituzione della miersite è, come già *a priori* mi sembrava possibile, effettivamente errato.

Anche la cuprojodargirite, che, secondo Schulze, dovrebbe corrispondere ad un composto della formola CuI. AgI, dev'esser considerata come una soluzione solida analoga alla miersite, quantunque a minor concentrazione in AgI; ed entrambi questi minerali, date le loro strette analogie chimiche, fisiche e cristallografiche, riscontrate anche nelle soluzioni solide artificiali da me ottenute, si potrebbero raggruppare sotto un solo nome.

Seguendo il concetto della priorità, generalmente adottato in simili casi, si dovrebbe conservare il nome di cuprojodargirite proposto da Schulze nel 1892, ed abbandonare quello di miersite adottato da Spencer, sei anni dopo, per il minerale di Broken Hill; considerando, però, che quest'ultimo fu dallo Spencer studiato bene cristallograficamente, mentre del primo, a tale proposito, nulla si conosce, sembra più logico di conservare il nome di miersite, tanto più che l'altro sarebbe molto improprio, poichè presuppone in tale minerale un'ana-

logia colla iodirite, che, com'è ovvio, non esiste affatto dal punto di vista cristallografico.

Sotto il nome di miersite si potrebbero, dunque, comprendere le soluzioni solide naturali di Ag I nel γ Cu I, cristallizzate, cioè, nella classe tetraedrica del sistema cubico, ed aventi le proprietà fisiche descritte da Spencer per quella di Broken Hill, la quale, in base a quanto si disse, sarebbe da considerarsi uno dei termini, ed il meglio conosciuto, in natura finora, della serie.

CONCLUSIONI.

1) La miersite e la cuprojodargirite non sono composti definiti, ma soluzioni solide, appartenenti al sistema cubico, di ioduro d'argento nel γ Cu I.

2) Si stabilì la solubilità del Ag I nel γ Cu I, che non è completa, ma arriva fino a cira 86 % molec. di Ag I.

3) Si può ottenere l'intera serie di tali soluzioni solide, oltre che per fusione dei componenti, per cristallizzazione frazionata delle loro soluzioni in acido iodidrico.

4) L'ioduro rameoso può esistere in tre modificazioni cristalline, di cui due monorifrangenti, i cui campi di esistenza stanno uno al disopra e l'altro al disotto di quello della fase birifrangente intermedia.

5) È confermata l'esistenza di una fase cristallina fluente, monorifrangente, dello ioduro d'argento, già ammessa dal Lehmann, e contestata in vario senso principalmente da Tubandt e da Stoltzenberg e Huth.

6) Furono ottenuti sinteticamente altri due minerali: la covellina e la iodirite, in condizioni nuove.

Mi è grato e doveroso di ringraziare qui, ancora una volta, il prof. Ferruccio Zambonini per i preziosi incoraggiamenti e consigli di cui mi è prodigo nelle mie ricerche.

Geologia. — *Sulla geologia dei dintorni di Tobruk.* Nota di C. I. MIGLIORINI, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Scarsissime sono le notizie originali sulla costituzione geologica delle coste marmariche, essendo esse sino ad ora state visitate da due soli studiosi, lo Schweinfurth ed il Pachundaki. Il primo di questi si recò per via di mare a Tobruk nel 1883 ed a Marsa Badia nel 1890 (a N di Solum): su Tobruk egli scrisse un articolo [1] con qualche breve cenno geologico e da tutt'e due le località riportò alcuni fossili, che furono poi studiati dal

[1] Schweinfurth, U., *Une visite au port de Tobruk.* Bull. de l'Inst. Egypt., Deux. série, n. 4 (Cairo, 1884), pag. 63.

Blanckenhorn [1] e da altri. Il Pachundaki visitò nel 1902 la piccola baia di Matronh tra Solum ed Alessandria d'Egitto (e quindi, propriamente, fuori dei confini della Marmarica, che incomincia appunto colla baia di Solum), publicando in seguito le osservazioni geologiche fattevi, insieme ad una descrizione dei fossili raccolti, alla quale descrizione contribuirono Lambert e Fontan [2]. Tutto il rimanente della letteratura geologica su questa regione è fondato sui dati e sui fossili dello Schweinfurth e del Pachundaki, sull'esauriente lavoro dello Zittel sull'Oasi di Siuah [3] situata al declivio S dell'altipiano Marmarico, e sulle deduzioni che si sono volute ricavare dall'andamento del contorno costiero.

Durante un soggiorno di varî mesi a Tobruk (luglio-novembre 1913) ebbi la buona fortuna di poter raccogliere un discreto materiale paleontologico e di fare qualche osservazione geologica. A causa delle speciali condizioni in cui si trovava il paese, e per le esigenze del servizio militare, fui costretto a limitare le mie ricerche quasi esclusivamente alla penisoletta che forma il lato N della baia: per la scarsità delle notizie che abbiamo sulla regione, le mie osservazioni, per quanto incomplete, non saranno forse, prive di interesse.

Presso Tobruk l'altipiano Marmarico ha un'elevazione di 150 metri (Mdanar) e scende al mare con una serie di balze dovute forse a faglie (*fult-scarps* degli inglesi). Queste balze sono solcate trasversalmente da numerosi *uidian* paralleli fra loro, profondi, generalmente brevi. Non ho avuto occasione di esaminare alcuno degli *uidian* maggiori, come l'*Uadi* Bellgamal o l'*U.* Saal: per spiegare l'origine di quelli nei dintorni immediati di Tobruk non credo sia affatto necessario invocare l'effetto del « periodo diluviale » Sahariano degli autori, essendo l'odierna precipitazione nella regione costiera considerevole e sufficiente per scolpirli. Dal 15 ottobre al 21 novembre 1913, per esempio, vi furono 17 giorni piovosi [4], dei quali diversi con pioggia copiosissima: la grande impermeabilità della terra rossa che ricopre tutti i tratti pianeggianti, inoltre, fa sì che anche

(1) Blanckenhorn, M., *Neues zur Geologie und Palaeontologie Aegyptens.* Zeitschr. der. deut. geol. Gesell., vol. 53 (1901), pag. 52.

(2) Pachundaki, D. E., *Sur la constitution géologique des environs de Marsa Matrouh (Marmarique).* Comp. rend. Acad. des Sc., vol. CXXXVII, pag. 350, Parigi, 1903; *Contribution à l'étude géologique des Environs de Marsa Matrouh (Marmarique),* Revue Internationale d'Egypte, vol. IV, (1907).

(3) Zittel, A., *Beitraege zur Geologie und Palaeontologie der Libyschen Wüste,* Palaeontographica, vol. XXX, Cassel, 1883.

(4) L'Eredia (*Note meteorologiche per Tobruk,* Boll. R. Soc. Geograf., serie V, vol. III, n. 4 (aprile 1914) pag. 428) dà solamente 5 giorni piovosi per il mese di ottobre e 8 per il mese di novembre. Consultando il mio diario, trovo che, mentre in novembre vi furono effettivamente 8 giorni con pioggia, in ottobre ve ne furono invece 10, e cioè i giorni 13, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 29.

con una precipitazione abbastanza leggiera una considerevole massa d'acqua si riversi negli *uidian*. Forse l'attuale pricipitazione non sarà sufficiente per spiegare la formazione degli *uidian* maggiori a corso più lungo, ma non mi posso pronunciare in proposito, non avendone personalmente visitato alcuno, ed essendoci ignoto sino a dove perdurino verso l'interno le condizioni climatologiche costiere.

A questo proposito è da augurarsi che si istituisca al più presto possibile un regolare sistema di stazioni meteorologiche nella Cirenaica e Marmarica. A Tobruk esiste, è vero, sin dal luglio del 1913, una R. Stazione Aerologica, ed osservazioni meteorologiche vengono pure registrate dalla R. Marina in diverse località costiere; ma, per quel che io sappia, non si è ancora in alcuna località provveduto alla misurazione della precipitazione, che pur sarebbe il dato praticamente di gran lunga il più interessante: preziosi sarebbero, per citare un esempio, i confronti che ci offrirebbero i dati pluviometrici di Tobruk e di Mdanar, situato circa 20 chilometri nell'interno.

Prescindendo per ora dalle formazioni recenti, il terreno intorno a Tobruk è costituito da un calcare bianco-giallastro, tenero, poco compatto, ricco in resti organici marini.

In alcuni luoghi è un vero impasto di gusci di molluschi e di foraminifere; altrove si mostra pieno di *Lithothamnion*. Segue l'elenco dei fossili sinora rinvenuti a Tobruk: quelli contrassegnati con un § non furono raccolti da me, ma si trovavano già nel Museo geologico del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze, che li ebbe nel giugno 1913 dal sig. avv. Emilio Cetta per mezzo del prof. Annibale Baldacci.

Lithothamnion sp. [1].
Globigerina sp.
Foraminifere div. sp.
Briozoi div. sp.
* *Arca turonensis* Duj.
» *sub-Helbingi* d'Orb.
* *Pectunculus pilosus* (Lin.).
* *Ostrea digitata* Eichw.
Pecten subarcuatus Tourn.
» *scabriusculus* Math.
» *multiscabrellus* Sac.
» *scabrellus* (Lmk).
Mytilus fr. *scaphoides* Bron.
Radula sp.
Thracia pubescens Pult.
Venericardia antiquata Lin.
Chama gryphoides Lin., var. *austriaca* Hörn.
§ *Lucina columbella* Lmk.
* § » *ornata* Ag.
Lucina leonina Bast.
Cardium aculeatum Lin.
» fr. *erinaceum* Lmk.
§ » n. sp.?
* *Cardium multicostatum* Br.
» *aquitanicum* Mayer.
» sp. cfr. *paucicostatum* L.

[1] Sarà studiato dalla dottoressa C. de Sansonoff.

* *Dosinia orbicularis* Ag.
Venus casina L., mut. *asthena* Doll. e Dautz.
Venus tauroverrucosa Sac.
" *impressa* De Ser.
" *ovata* Penn.
* *Meretrix erycina* (Lin.).
" sp. n.
Tellina Cumingii Hanley.
Psammobia affinis Duj.
Abra cfr. *Degrangei* (Coss.).
Corbula carinata Duj.
§ *Trochus granulosus* Born.
Monodonta Amedei (Brongn.).
Crepidula crepidula (L.).
§ * *Xenophora Borsoni* (Bell.)
* *Turritella Archimedis* Brongn.
* " *terebralis* Lmk.
" *vermicularis* (Br.).
" cfr. *tauroverrucosa* Sacco.
Turritella cochleata (Br.).
Cerithium Bronni Part., var. *transiens* Sac.
§ *Cyprea* cfr. *orbignyana* Grat.
Cassis tuberosa Lamark.
§ *Voluta?* sp.
Oliva clavula Lmk.
Terebra fuscata Br.
Fusus rostratus (Olivi).
§ *Clavatula romana* Defr.
Conus elatus Micht.
§ " *subacuminatus* d'Orb.
Psammechinus Gaertneri Lamb.
" sp.
Scutella 2 sp.
Amphiope sp.
* *Clypeaster subplacunarius* Judis.
Echinolampas sp.
Crostacei malacostrachi (frammenti indeterminabili).
Dentex sp.
Sargus? sp.

Questa fauna è più che sufficiente per stabilire l'età mediomiocenica dei calcari. Mi riserbo di trattare della complessa questione dell'esatto coordinamento stratigrafico di questa formazione nel lavoro più esauriente che sto preparando. Osserverò solo che questa fauna di Tobruk corrisponde assai bene al complesso delle faune delle località egiziane raggruppate dal Blanckenhorn [1] nella parte inferiore dell'Elveziano. Nell'elenco ho contrassegnato con un asterisco le specie comuni a queste località egiziane. La nostra fauna corrisponde anche, in generale, all'Elveziano mediterraneo inteso come formazione littorale, ma ad un Elveziano abbastanza antico, corrispondente alle parti inferiori del Miocene medio.

Notevole è la presenza del *Pecten subarcuatus*, della *Venus casina* mut. *asthena* e della *Mactra sub-cordiformis*, tipi sinora ritenuti propri del Miocene atlantico della Francia, e di due specie viventi del Mar Rosso, la *Tellina Cumingii* e la *Cassis tuberosa*, specie sinora sconosciute al Neogene mediterraneo.

Anche il *Clypeaster subplacunarius* ci indica una minore differenziazione nelle faune marine mediterranee ed indo-pacifiche nel mediomiocene,

[1] Blanckenhorn, U., loc. cit.

essendo il vivente *Clyp. placunarius* del Mar Rosso talmente affine da rendere forse azzardata la separazione specifica delle due specie.

Le altre specie di Tobruk sono comuni nel Miocene Mediterraneo e Danubiano.

Gli strati componenti questa formazione miocenica, nei dintorni di Tobruk sono orizzontali od a debolissima pendenza, ed attraversati da numerose faglie; forse queste hanno dato origine non solo ai gradini che si incontrano salendo dal mare verso l'interno, ma anche al golfo stesso, poichè la penisoletta che lo limita a N potrebbe essere un *horst* subordinato.

Questi gradini sono regolarissimi in quanto ad andamento orizzontale, ma si mostrano, al contrario, molto variabili in quanto a livello, tanto che talvolta due gradini contigui, per la graduale diminuzione e finale scomparsa del dislivello che li separa, vanno a fondersi in uno solo.

L'unico rapporto stratigrafico che mi sia stato possibile constatare nei terreni miocenici nella penisoletta a N del golfo di Tobruk è stata la posizione elevata che occupano gli strati ricchi in *Lithothamnion* rispetto agli altri: le specie che si trovano in questi strati a *Lithothamnion* (*Venericardia antiquata, Venus ovata, Corbula carinata, Turritella vermicularis, T. cochleata*) si ritrovano, del resto, anche negli strati più bassi. Per poter stabilire una successione stratigrafica un po' completa dei terreni miocenici intorno a Tobruk, sarà necessario estendere le osservazioni dettagliate e la ricerca dei fossili alla sponda S del golfo: la penisola a N di questo non raggiunge mai i 50 metri sul livello del mare, non offre sezioni naturali di alcuna importanza, ed è attraversata da diverse faglie longitudinali (WNW-ESE), e forse anche da qualcuna minore trasversale; il crostone che riveste quasi tutti gli affioramenti rocciosi, poi, è di grande ostacolo ad un minuzioso esame dei singoli strati.

Nella regione da me esaminata i terreni quaternarî e recenti detritici terrestri non assumono l'importanza di quelli consimili della Tripolitania (¹) e Tunisia, e mancano affatto le panchine od altri depositi marini di recente formazione, se si eccettua la piccola spiaggia all'estremità N W del golfo di Tobruk e l'altra situata tra le due punte con cui termina la penisola a N del golfo stesso: dietro ambedue queste spiagge è situata anche una *söbca* (terreno acquitrinoso salmastro).

Nei tratti pianeggianti sono abbastanza estese le terre rosse, ed è probabile che lo siano ancor più sul vero altipiano marmarico, a S di Mdanar.

Il materiale, di cui è costituita questa formazione superficiale è derivato verosimilmente parte dal disfacimento dei calcari e parte vi è stato

(¹) Stella, A., *Sulla importanza dei terreni quaternarî in Tripolitania*, Boll. Soc. Geol. It. vol. XXXII (1913), pag 88; *La Missione Franchetti in Tripolitania* (Treves, 1914) pag. 108; Crema, C., Franchi, S. e Parona, C. F., *Sulla serie dei terreni in Tripolitania settentrionale*. Boll. Soc. Geol. It. vol. XXXII (1913). pag. 497).

trasportato dall' interno dal *ghibli*, la cui potenzialità, come mezzo di trasporto di enorme quantità di polvere, ebbi occasione di osservare personalmente.

Alla base dei costoni, poi, sono ovunque più o meno sviluppati i terreni detritici di falda. Sul fondo degli *uidian* più grandi non manca qualche deposito alluvionale (sempre ad elementi angolosi), ma in nessuna località ho osservato veri terrazzamenti interni.

Sviluppatissimo è il crostone calcareo, di cui si hanno due varietà diverse, a seconda che si sia formato sui pendii o sui tratti più o meno pianeggianti. Sui tratti pianeggianti esso è assai potente (in alcuni punti oltrapassa 1 m. di spessore); contiene parecchie impurità o inclusioni clastiche, e varia in consistenza da un vero calcare durissimo ad una terra rossa più o meno cementata; spesso racchiude numerose *Helix* e *Bulimus* appartenenti a specie tutt'ora viventi nella regione. Sui pendii più ripidi il crostone ricopre ovunque il calcare miocenico affiorante, e varia di spessore da pochi millimetri ad un decimetro e più; contiene poche impurità ed è sempre durissimo.

Le uniche dune mobili nei dintorni di Tobruk sono quelle situate presso alla più meridionale delle due punte con cui termina ad E la penisola a N del golfo. Esse si mostrano composte esclusivamente di foraminifere e di frammenti di conchiglie marine: interessante è il fatto che contengono numerosi pezzi di gusci d'uovo di struzzo, essendo quest'uccello scomparso attualmente dalla regione.

In questa regione pre-costiera a gradinate la configurazione del terreno e la natura del sottosuolo non favoriscono la formazione di sorgenti o di veli acquiferi: nella stagione asciutta qualche traccia di umidità è osservabile solo lungo il fondo degli *uidian*, rivelata più che altro all'aspetto più rigoglioso della vegetazione. Che in antico gli abitanti dipendessero per la loro provvista d'acqua dall'acqua piovana accumulata è provato dalla grande cisterna, ritenuta romana, che si trova in un piccolo *uadi* a N dei ruderi del forte saraceno, e dalle numerosissime cisterne arabe, quasi tutte in uno stato di abbandono, che si incontrano tutt' intorno a Tobruk; di queste si hanno due tipi diversi, quelle semi-naturali e quelle intieramente artificiali. Le prime non sono altro che cavità naturali sistemate: queste cavità sono situate tra il crostone calcareo e la roccia sottostante, specialmente là dove quest'ultima è di natura poco coerente, e devono la loro origine all'azione meccanica delle acque piovane che hanno trovato una via attraverso al crostone: sono generalmente situate presso all'orlo di un *uadi*. Le cisterne intieramente artificiali consistono in vaste camere scavate sotto il crostone; e comunicanti coll'esterno per mezzo di una stretta apertura praticata nel crostone stesso.

Non ho trovato alcun terrazzamento costiero od altro indizio di sollevamento: le basse piattaforme, che spesso si osservano lungo la riva del mare,

credo che siano dovute all'erosione marina agente sugli strati orizzontali di diversa resistenza. Mi è sembrato, all'incontrario, vedere prove di un recente abbassamento, specialmente lungo la costa settentrionale della penisola a N del golfo, dove il crostone celcareo, in questo punto pieno di *Helix* e di *Bulimus* scende sotto al livello del mare.

Fisiologia vegetale. — *Alcune ricerche quantitative sull'assunzione di ioni nelle piante.* Nota preventiva del dott. F. PLATE, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In collegamento, ed a maggiore conferma dei risultati ottenuti dall'Acqua nelle sue ricerche sulla localizzazione degli ioni nel corpo della pianta, ho volute procedere ad alcuni saggi quantitativi sull'assunzione degli ioni nelle piante.

Le piante prese in esame furono il *Triticum sativum* ed il *Hyacinthus orientalis*, e le soluzioni sperimentate furono quelle di manganese.

Ho sperimentato con i sali seguenti: $Mn\,Cl_2$, $Mn\,Br_2$, $Mn\,(NO_3)_2$, $Mn\,SO_4$.

Di ogni sale furono presi due grammi e sciolti in 2 litri di acqua distillata; da questa soluzione ho prelevato mezzo litro per determinarne il titolo, e gli altre tre mezzi litri furono impiegati per le colture, e precisamente mezzo litro per ogni prova. Le colture furono fatte su speciali apparecchi di vetro, in modo da eliminare tutte le cause di perdita o assorbimento della soluzione per parte di altri corpi estranei alle piante.

Triticum sativum.

I chicchi di grano furono messi a germinare in termostato; e dopo 8 giorni quando le piantine avevano raggiunto un determinato sviluppo (alt. media del germoglio cm. 11; lungh. med. della radice 14 cm.), furono poste nelle soluzioni preparate e preventivamente titolate. Dopo 24 ore dall' immersione delle piantine nella soluzione di nitrato manganoso in cominciano a manifestarsi zone più o meno imbrunite nelle radici, che specialmente verso l'apice sono quasi nere. Invece, per il cloruro ed il bromuro l'oscuramento delle radici comincia a manifestarsi dopo 48 ore; e finalmente, per il solfato, dopo 4 giorni. È da notare che per il cloruro ed il bromuro l'imbrunimento è un po' minore che non per il nitrato; altrettanto può dirsi del solfato. Ho voluto accennare a questo fatto del tempo necessario alla formazione dei detti depositi, perchè sembrami oltremodo interessante dal lato biologico; tanto più che il medesimo fatto mi si è ripetuto con il giacinto, benchè in periodi di tempo molto maggiori e dipendenti molto probabilmente dalla diversa struttura delle radici prese in esame. Dopo 8 giorni

le piantine venivano tolte dalle soluzioni, e di queste veniva determinata la quantità dell'anione e catione rimasti.

Cloruro di manganese.

In mezzo litro erano contenuti Mn 0,1366 e Cl 0,1763.

1ª prova. Per gr. 8,8680 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1896 di Mn_3O_4 = 0,1306 Mn = Mn assorbito gr. 0,0060
" 0,6790 " ClAg = 0,1684 Cl = Cl " " 0,0078.

2ª prova. Per gr. 9,5354 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1904 di Mn_3O_4 = 0,1312 Mn = Mn assorbito gr. 0,0054
" 0,6846 " ClAg = 0,1693 Cl = Cl " " 0.0070.

3ª prova. Per gr. 8,9920 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1922 di Mn_3O_4 = 0,1324 Mn = Mn assorbito gr. 0,0042
" 0,6914 " ClAg = 0,1712 Cl = Cl " " 0,0051.

Bromuro di manganese.

In mezzo litro erano contenuti Mn gr. 0.0952 e Br gr. 0,2770.

1ª prova. Per gr. 7,3344 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1326 di Mn_3O_4 = 0,0914 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0038
" 0,6240 " Br Ag = 0,2656 " Br = Br " " 0,0114.

2ª prova. Per gr. 9,4993 di sost fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1282 di Mn_3O_4 = 0,0884 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0068
" 0.6042 " Br Ag = 0,2572 " Br = Br " " 0,0198.

3ª prova. Per gr. 10,2766 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1262 di Mn_3O_4 = 0,0870 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0082
" 0,5994 " Br Ag = 0,2546 " Br = Br " " 0,0224.

Nitrato manganese.

In mezzo litro erano contenuti Mn gr. 0,1010 e NO_3 gr. 0,2310.

1ª prova. Per gr. 7,6354 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1392 di Mn_3O_4 = 0,0964 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0046
" 1,0840 " $C_{20}H_{16}N_4 . HNO_3$ = 0,2190 di NO_3 = NO_3 assorb. gr. 0,0120.

2ª prova. Per gr 8,3386 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1410 di Mn_3O_4 = 0,0972 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0038
" 1,1048 " $C_{20}H_{16}N_4 . HNO_3$ = 0,2230 di NO_3 = NO_3 assorb. gr. 0,0080.

3ª prova. Per gr. 11,4110 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1346 di Mn_3O_4 = 0,0928 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0082
» 1,0538 » $C_{20}H_{16}N_4 . HNO_3$ = 0,2128 di NO_3 = NO_3 assorb. gr. 0,0182.

Solfato di manganese.

In mezzo litro erano contenuti Mn gr. 0,0860 e SO_4 gr. 0,2976.

1ª prova. Per gr. 10,2346 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1162 di Mn_3O_4 = 0,0802 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0058
» 0,6735 » $BaSO_4$ = 0,2775 » SO_4 = SO_4 » » 0,0201.

2ª prova. Per gr. 7,8412 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1194 di Mn_3O_4 = 0,0824 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0038
» 0,6912 » $BaSO_4$ = 0,2848 » SO_4 = SO_4 » » 0,0128.

3ª prova. Per gr. 8,8462 di sost. fresca ho trovato nella soluzione:

gr. 0,1174 di Mn_3O_4 = 0,0810 di Mn = Mn assorbito gr. 0,0050
» 0,6806 » $BaSO_4$ = 0,2804 » SO_4 = SO_4 » » 0,0172.

Le prove qualitative eseguite sui germogli da una parte e le radici dall'altra davano come presente l'anione nei germogli. Queste prove furono eseguite su una piccola porzione dei germogli e delle radici fresche spappolandole separatamente in acqua distillata.

Ebbene: nell' acqua in cui erano spappolati germogli provenienti dalle culture in soluzioni di bromuro e cloruro, si aveva col nitrato d'argento immediatamente un intorbidamento delle soluzioni dovuto alle formazioni dei rispettivi sali di argento. Lo stesso fatto si aveva con le piante provenienti da colture in soluzione di $MnSO_4$, in cui con $BaCl_2$ precipitava $BaSO_4$. Le radici, qualche volta non davano reazione; qualche altra volta, invece, solo una traccia.

Riunendo le ceneri delle radici di ogni serie di prove, ne ho fatta la analisi. Riporto, qui per brevità, solamente i risultati ottenuti per il manganese; e riferito al °/₀ delle ceneri totali:

1ª porzione.	$MnCl_2$	- Ceneri	0.0522.	Trovato	0.0146	di Mn	= 27.9 °/₀
2ª »	$MnBr_2$	- »	0.0474.	»	0.0168	»	= 33.8 »
3ª »	$Mn(NO_3)_2$	- »	0.0444.	»	0.0148	»	= 34.0 »
4ª »	$MnSO_4$	- »	0.0432.	»	0.0132	»	= 30.5 »

Sull'andamento generale delle analisi eseguite riferirò più ampiamente nella pubblicazione del mio lavoro.

Intanto però credo opportuno di riunire in uno specchietto la media dei valori ottenuti per ogni sale e riportandoli poi a 1000 parti di sostanza fresca.

Cloruro di manganese.

Per gr. 9.1318 di sostanza fresca	=	assorbito	0.0052	di	Mn	=	5.6 ‰
" "	=	"	0.0066	"	Cl	=	7.2 "

Bromuro di manganese.

Per gr. 9.0346 di sostanza fresca	=	assorbito	0.0062	di	Mn	=	6.8 "
" "	=	"	0.0178	"	Br	=	19.6 "

Nitrato di manganese.

Per gr. 9.1283 di sostanza fresca	=	assorbito	0.0055	di	Mn	=	6.2 "
" "	=	"	0.0127	"	NO_2	=	13.8 "

Solfato di manganese.

Per gr. 9.9743 di sostanza fresca	=	assorbito	0.0048	di	Mn	=	5.4 "
" "	=	"	0,0167	"	SO_4	=	18.6 "

Hyacinthus orientalis.

I bulbi furono fatti germogliare in acqua comune; e solo quando le radici ebbero raggiunto una lunghezza media variabile fra gli 8 e i 12 cm., furono messi in speciali caraffe contenenti le soluzioni previamente titolate. Siccome però nella caraffa il bulbo doveva mantenersi, stante la forma del recipiente, ad un'altezza fissa, non era possibile di ottenere una esatta misura del volume; così, dopo avere aggiunto $^1/_2$ litro, si riportava, occorrendo, a volume, con alcune diecine di $cm.^3$ di acqua distillata. Come ho già accennato in principio, le radici cominciano ad oscurarsi per il giacinto molto più tardi; e la media è la seguente calcolando dal giorno dell'immersione: 9 giorni per il $Mn(NO_3)_2$, 14 per $MnCl_2$, 17 per $MnBr_2$, e 22 per $MnSO_4$.

Alla fine dell'esperienza si presentano tutti gli apici radicali scuri o anche completamente anneriti: cioè quelli in cui il deposito è comparso prima, sono sempre più scuri di quelli in cui il deposito è comparso dopo. Questi depositi sono dovuti alla localizzazione dell' MnO_2, come fu già dimostrato da C. Acqua, E. Houtermans e E. Boselli, e oggi da me confermato. Per il giacinto mi sono limitato a contare il numero delle radici per ogni bulbo, ed all'assaggio quantitativo delle soluzioni. E colgo questa occasione per avvertire che in tutte le esperienze, nelle quali le radici erano protette dall'azione diretta della luce, non si era mai verificata scomposizione spontanea della soluzione, e quindi o intorbidamento o deposito sulle pareti dei recipienti.

Cloruro di manganese.

Le soluzioni contenevano gr. 0.1296 di Mn e gr. 0.1664 di Cl.

1ª prova, 63 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1786 di Mn_3O_4 = 0,1232 di Mn; assorbito Mn gr. 0,0064
» 0,6380 » ClAg = 0,1582 » Cl ; » Cl » 0.0082.

2ª prova, 46 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1824 di Mn_3O_4 = 0,1256 di Mn; assorbito Mn gr. 0,0040
» 0,6480 » ClAg = 0,1608 » Cl ; » Cl » 0,0056.

Bromuro di manganese.

Le soluzioni contenevano gr. 0,0938 di Mn e gr. 0,2724 di Br.

1ª prova, 59 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1310 di Mn_3O_4 = 0,0904 di Mn; assorbito Mn gr. 0,0034
» 0,6140 » BrAg = 0,2625 » Br ; » Br » 0,0099.

2ª prova, 76 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1250 di Mn_3O_4 = 0,0862 di Mn; assorbito Mn gr. 0,0076
» 0,5866 » BrAg = 0,2508 » Br; » Br » 0,00216.

Nitrato di manganese.

Le soluzioni contenevano gr. 0,0998 di Mn e gr. 2278 di NO_3.

1ª prova, 60 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1348 di Mn_3O_4 = 0,0930 di Mn; assorbito Mn gr. 0,0068
» 1,0588 » $C_{20}H_{16}N_4 . HNO_3$ = 0,2138 di NO_3; assorbito NO_3 gr. 0,0140.

2ª prova, 38 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1404 di Mn_3O_4 = 0,0968 di Mn; assorbito Mn 0,0030
» 1,0954 » $C_{20}H_{16}N_4 . HNO_3$ = 0,2212 di NO_3; assorbito NO_3 gr. 0.0066.

Solfato di manganese.

Le soluzioni contenevano gr. 0,0876 di Mn e gr. 0,3074 di SO_4.

1ª prova, 68 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1120 di Mn_3O_4 = 0,0812 di Mn ; assorbito Mn gr. 0,0064
» 0,6838 » $BaSO_4$ = 0,2818 » SO_4; » SO_4 » 0,0256.

2ª prova, 61 radici. Nella soluzione ho trovato:

gr. 0,1184 di Mn_3O_4 = 0,0816 di Mn ; assorbito Mn gr. 0,0060
» 0,6902 » $BaSO_4$ = 0,2844 » SO_4; » SO_4 » 0,0230.

Riassumendo anche per il giacinto i risultati, avremo la seguente media, riferita poi a 100 radici:

Cloruro di manganese.

Per 54 radici = assorb. gr. 0,0052 di Mn = per 100 radici gr. 0,0096 di Mn
" = " 0,0069 " Cl = " 0,0127 " Cl

Bromuro di manganese.

Per 68 radici = assorb. gr. 0,0055 di Mn = per 100 radici gr. 0,0080 di Mn
" = " 0,0158 " Br = " 0,0232 " Br

Solfato di manganese.

Per 65 radici = assorb. gr. 0,0062 di Mn = per 100 radici gr. 0,0095 di Mn
" = " 0,0243 " SO_4 = " 0,0373 " SO_4

Nitrato di manganese.

Per 49 radici = assorb. gr. 0,0049 di Mn = per 100 radici gr. 0,0100 di Mn
" = " 0,0103 " SO_4 = " 0,0210 " SO_4

Da questi brevi cenni quantitativi risulta che l'anione ed il catione vengono assunti nelle proporzioni medesime in cui trovansi nelle soluzioni; e che l'anione emigra prevalentemente nel germoglio, mentre che il catione si localizza specialmente nelle radici.

Fisiologia. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. I. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico* [1]. Nota dei dottori G. Quagliariello ed E. D'Agostino, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi.

Per consiglio del prof. Bottazzi abbiamo intrapreso una serie di ricerche sullo stato dell'acido carbonico nel sangue, argomento tuttora poco chiaro, a cui i moderni concetti degli equilibrî chimici potrebbero essere applicati con successo. Esporremo nelle Note successive la via da noi seguìta per lo studio di tale questione: nella presente Nota viene esposto il metodo che ci è servito per il dosamento dell'acido carbonico.

Esistono moltissimi metodi per determinare l'acido carbonico di una soluzione; ma a noi interessava prescegliere quello che meglio si adattasse al dosamento di quantità piccolissime. Escludendo perciò senz'altro i metodi per pesata, abbiamo prescelto il metodo della titolazione ideato da Winkler, e raccomandato dal Küster (Zeitschr. f. anorg. Chem. *13*, 127, an. 1897), secondo il quale dà risultati « assolutamente esatti ». Per l'estrazione del-

(1) Ricerche fatte nell'Istituto fisiologico della R. Università di Napoli.

l'acido carbonico dalle soluzioni ci siamo serviti del metodo ideato da Vesterberg (Zeitsch. f. physik. Chem. *70*, 551, an. 1910), che abbiamo sostanzialmente modificato, come appresso esporremo.

Il principio su cui si basa il metodo di Winkler è il seguente: l'acido carbonico viene raccolto in un eccesso di alcali; il carbonato che si forma viene precipitato sotto forma di carbonato di bario mediante aggiunta di cloruro di bario in eccesso, e l'alcali eccedente, non combinato con acido carbonico, si titola con acido cloridrico; fino a che vi è dell'alcali libero, il precipitato di carbonato di bario, reso del tutto insolubile dal cloruro di bario, che ha con esso un ione a comune, non viene affatto attaccato dall'acido stesso. L'alcali più opportuno è indubbiamente la barite, sia perchè in tal caso la quantità di cloruro di bario richiesta è minore, avendo questo sale il solo scopo di deprimere la solubilità del carbonato, sia perchè ci si può perfettamente assicurare che l'alcali è perfettamente libero da acido carbonico.

Il metodo di estrazione del Vesterberg consiste nel far bollire ad un decimo o ad un ventesimo di atmosfera, in presenza di un acido minerale, la sostanza o la soluzione contenente l'acido carbonico, raccogliendo l'acido carbonico, che si sviluppa, in una bottiglia contenente una quantità nota di barite e di cloruro di bario, e titolando in secondo tempo la barite eccedente nella bottiglia stessa.

Al metodo di Winkler è stato però mossa dal Sörensen e Andersen (Zeitschr. f. analyt. Ch., *47*, 279, an. 1908) una grave obbiezione Secondo questi autori, precipitando, a temperatura ordinaria, dei carbonati alcalini con $Ba\,Cl_2$, il precipitato è costituito in parte di carbonato normale $Ba\,CO_3$, e in parte di carbonato acido $Ba\,H_2\,(CO_3)_2$; se la precipitazione è fatta a caldo, il precipitato è invece costituito di $Ba\,CO_3$, purchè per altro non vi sia alcali libero, nel qual caso il precipitato è costituito, in parte più o meno notevole, a seconda della maggiore o minore quantità dell'alcali libero, di carbonato basico $Ba(OH)_2\ Ba\,CO_3$.

Preoccupati da tale obbiezione, abbiamo voluto studiare separatamente l'influenza della precipitazione a caldo ed a freddo, e l'influenza degli eccessi notevoli di alcali.

Per lo studio della prima questione ci siamo serviti del dispositivo originale del Vesterberg, estraendo l'acido carbonico da quantità determinate (5 cmc.) di una soluzione 0,1167 di $Na_2\,CO_3$, e raccogliendo l'acido carbonico in una soluzione costituita da 35 cmc. di $Ba(OH)_2$ 0,0193 n. + 50 cmc. di $Ba\,Cl_2$ al 10 % + circa 65 cmc. di H_2O priva di CO_2. Il recipiente contenente tale miscela, in alcuni casi, venne riscaldato; in altri, no. Il risultato dell'analisi fu, in ogni caso, corretto, con un errore medio di circa 1 %. Per lo studio della seconda questione, si è aumentata successivamente, in quattro estrazioni, la quantità della barite, estraendo ogni volta 5 cmc. della soluzione 0,1167 n. di $Na_2\,CO_3$, e usando del pari il dispositivo, non ancora modificato, del Vesterberg. Per tutte le prove furono aggiunti all'atto del dosamento 50 cmc. di $Ba\,Cl_2$ 10 %, tranne per l'ultima, in cui il $Ba\,Cl_2$ fu introdotto nella bottiglia insieme con la barite prima della estrazione. I risultati ottenuti furono i seguenti:

Soluz. 0,0485 n. $Ba(OH)_2$	HCl $^n/_{40}$ occorsi per titolare l'eccesso di $Ba(OH)_2$	$^1/_2$ mol CO_2 estratte	$^1/_2$ mol CO_2 in 5 cc sol. $Na_2\,CO_3$
15	5,4	$0,0_3\,575$	$0,0_3\,584$
31	37,4	$0,0_3\,569$	»
45	63,8	$0,0_3\,587$	»
45	64,1	$0,0_3\,580$	»

Queste prove mostrano dunque che anche notevoli eccessi di barite non producono la precipitazione del sale basico. (Dimostrano, pure, che è indifferente l'aggiunta preventiva, o meno, del cloruro di bario).

Eliminati i dubbî sôrti per le obbiezioni di Sörensen e Andersen, ci siamo preoccupati dell'errore, non trascurabile a giudicare dalle misure surriferite, che dà il metodo di Vesterberg applicato alla determinazione di piccole quantità di CO_2. Gli errori dipendono essenzialmente dal fatto che il riempimento della bottiglia con $Ba(OH)_2$ e con $BaCl_2$, come pure la titolazione finale con HCl, avviene all'aria libera, che è sempre più o meno ricca di CO_2. Le nostre modificazioni, in conseguenza, sono state appunto queste: tanto il riempimento della bottiglia, quanto la titolazione finale, avvengono fuori del contatto dell'aria libera. Un altro miglioramento apportato è stato quello di evacuare i recipienti a $^1/_{50}$ invece che a $^1/_{20}$ di atmosfera; con ciò, non solo abbiamo raggiunto una maggiore attenuazione delle impurità eventualmente contenute nei nostri recipienti, e si è avuto un più perfetto lavaggio terminale dell'acido carbonico rimasto nel pallone di estrazione: ma ci è stato anche possibile di estrarre soluzioni di sostanze organiche (ad es. siero-albumina) riscaldando appena a 40° C., evitando in tal modo una eventuale scissione o coagulazione per calore.

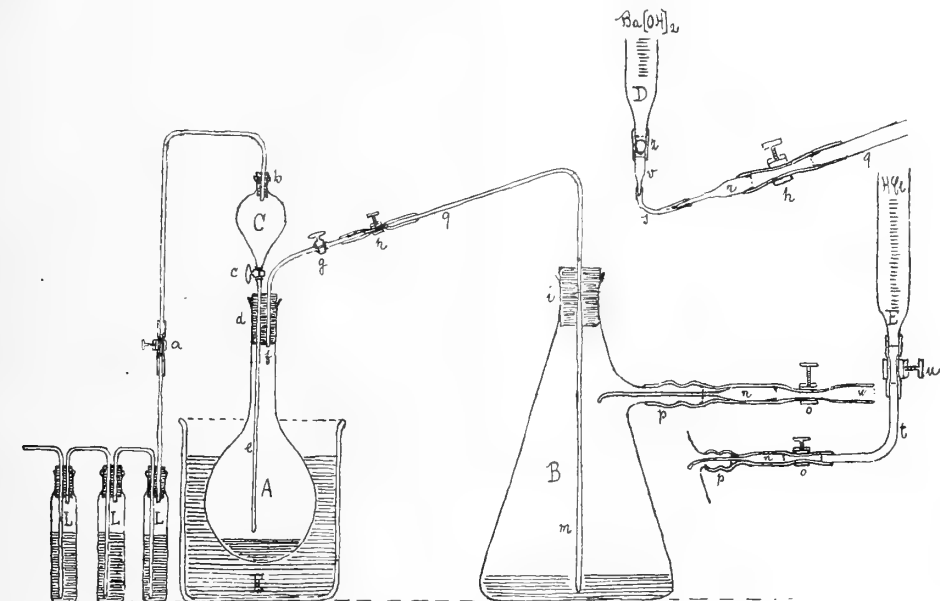
Ed ora esponiamo senz'altro il metodo di Vesterberg, così come è stato da noi modificato.

L'apparecchio, disegnato nella figura, è costituito da un pallone di estrazione *A*, della capacità di circa 250 cmc., di vetro di Jena a pareti piuttosto spesse. Esso è chiuso da un tappo di gomma *d* a due fori: per uno passa il tubo terminale *e* di un comune imbuto a separazione *C*, provvisto di rubinetto *c*; per l'altro passa il tubo *f* piegato ad angolo ottuso e provvisto di rubinetto *g*. Il tubo *e* scende fino a 3-4 cm. dal fondo del pallone; il tubo *f* si arresta immediatamente al disotto del tappo. L'imbuto *c* è chiuso in alto da un tappo di gomma *b*, attraverso il quale passa un tubo di vetro che stabilisce una comunicazione con una serie di 3 bottiglie di lavaggio a soda (L, L, L): tale comunicazione può essere interrotta mediante la pinza di Hoffmann *a*. L'altra parte dell'apparecchio è costituita da una comune bevuta a filtrazione *B*, della capacità di circa un litro. La bevuta è chiusa da un tappo di gomma *i*, attraversato da un lungo tubo di vetro piegato ad angolo acuto, la cui estremità inferiore *m* tocca quasi il fondo della bevuta, mentre l'altra estremità *q*, mediante tubo di gomma e pinza di Hoffmann *h*, è connessa col tubo *f* del pallone di estrazione. Il tubo laterale *p* della bevuta è rivestito da un tubo di gomma, nel quale è stato preventivamente introdotto un tubicino di vetro *n* assottigliato ad una estremità, la quale, lievemente ripiegata ad uncino, arriva fin nell'interno della bevuta, di modo che un liquido introdotto nel tubo di gomma possa cadere goccia a goccia nella bevuta stessa, senza bagnare menomamente il tubo *p*. Il tubo di gomma porta la pinza *O*.

A) *Lavaggio ed estrazione dei recipienti* — I recipienti *A*, *B* e *C* vengono puliti e lavati scrupolosamente con acqua distillata bollita; e dopo aver introdotto nella bevuta *B* alcune gocce di fenolftaleina, si ricompone l'apparecchio, badando a che tanto i tappi quanto le connessioni con i tubi di gomma siano a perfetta tenuta.

Aperti tutti i rubinetti e le pinze, e chiusa soltanto la pinza *a*, con una pompa ad acqua, applicata all'estremità *w*, si estrae l'aria dai recipienti fino ad $^1/_{50}$ di atmosfera, leggendo tale valore su un comune manometro intercalato fra la pompa e *w*. Fatta l'estrazione, e chiusa la pinza *o*, si apre gradatamente la pinza *a*, in modo che si stabilisca una assai lenta corrente di aria priva di CO_2. Quando tutto il sistema è giunto alla pressione atmosferica, si chiude il rubinetto *c*, si apre la pinza *o*, e si estrae di nuovo sino a $^1/_{50}$ di atmosfera.

B) *Riempimento della bevuta B.* — Chiusi il rubinetto *g* e la pinza *h*, si stacca la bevuta dalla connessione col pallone; si riempie con acqua bollita l'estremità libera del tubo di gomma *h*, alla quale si adatta un tubo di vetro *r* affilato ad un'estremità, che si continua con un sottile tubo di gomma *s*, di circa 1 mm. di diametro. Tubo di vetro e tubo di gomma sono stati preventivamente riempiti con acqua bollita, e la connessione

col tubo h vien fatta in modo che nessuna bollicina di aria penetri nel sistema. Si adatta ora l'estremità libera del tubo di gomma s alla estremità affilata v di una buretta automatica D ripiena di barite. Se tutte le connessioni son fatte bene, aprendo la buretta alla sua estremità inferiore (premendo sulla pallina di vetro z), finchè la pinza h resta chiusa, il livello del liquido della buretta deve restare immobile. Assicuratisi di ciò, si porta allo zero il liquido della buretta: e tenendo *sempre* premuta la pallina z, aprendo cautamente la pinza h, si lascia entrare nella bevuta la voluta quantità di barite ; dopo di che, chiusa la pinza h, e interrotta cautamente la connessione fra la buretta e il tubicino di gomma s, si innesta quest'ultimo all'estremità del sifone dell'acqua bollita, e, manovrando

la pinza h, si fa entrare nella bevuta una discreta quantità (25-50 cmc.) di acqua, in modo da trascinare nella bevuta ogni traccia di barite rimasta nel tubo di gomma. È opportuno di adoperare soluzioni di barite molto diluite (da $^1/_{20}$ a $^1/_{100}$ n.): dato il metodo di riempimento della bevuta, si può infatti, occorrendo, introdurre nella bevuta stessa quantità notevoli di soluzione senza pericolo che questa si alteri. Ad ogni modo, è sempre utile, completato il riempimento, assicurarsi che la barite nella bevuta sia perfettamente limpida. Si stabilisce adesso la connessione col pallone d'estrazione, e si apre cautamente la pinza h, in modo che quella piccolissima quantità di aria compresa fra essa pinza e il rubinetto g, penetri dolcemente nella bevuta. Ciò fatto, si riunisce w colla pompa ad acqua, e aprendo la pinza o, ci si assicura che la pressione nella bevuta sia rimasta presso che immutata. Si riporta, comunque, a $^1/_{50}$ di atmosfera, e si apre il rubinetto g: anche in questo caso, se le tenute sono perfette, la pressione deve restare immutata.

C) *Estrazione dell'acido carbonico.* — Se la sostanza da analizzare è solida (ad es. $CaCO_3$) essa può essere introdotta nel pallone A all'inizio delle operazioni. Se invece si deve estrarre una soluzione (e questo è stato il caso per i nostri esperimenti), si toglie dallo imbuto a separazione il tappo b, si versa nell'imbuto la soluzione in esame, e, aprendo cautamente il rubinetto c, la si fa scendere nel pallone sottostante, avendo cura di chiudere il rubinetto c quando l'ultima goccia di liquido si trova nel foro del rubinetto stesso

Si lava l'imbuto *C* una o due volte con piccole quantità di acqua bollita, facendo ogni volta scendere l'acqua di lavaggio con le stesse precauzioni indicate per la soluzione [1]; e, dopo averlo riempito con soluzione 0,1 n. di HCl [2], lo si tappa. Aprendo il rubinetto *c*, l'acido scorre nel pallone, e nell'imbuto penetra aria pura che ha attraversato le bocce di lavaggio *L*. È bene di richiudere il rubinetto *c* quando ancora 4 o 5 cmc di HCl restano nell'imbuto. Si versa ora nel recipiente di ferro smaltato, *F*, acqua calda (50-60° C): si ha subito una vivace ebullizione del liquido, la quale, mediante successive aggiunte di acqua calda, vien mantenuta per 15 o 20'. (Esperienze particolari ci hanno infatti dimostrato che, dopo 5', già la massima parte di CO_2 è stata estratta, e che dopo 10' l'estrazione si può dire completa).

D) Lavaggio terminale del pallone d'estrazione. — Completata l'estrazione, si apre cautamente il rubinetto *c*: si stabilisce in tal modo una corrente di aria priva di CO_2 che trasporta nella bevuta tutte le eventuali tracce di CO_2 rimaste nel pallone di estrazione e nel tubo *f*. Tale lavaggio dovrà durare circa 5'. Esperienze speciali, fatte estraendo con bevute nuove palloni già estratti, dimostrano che nel pallone di estrazione non rimane nessuna traccia di acido carbonico.

Terminato il lavaggio, si toglie la connessione della bevuta col pallone, previa chiusura della pinza *h*.

E) *Titolazione dell'eccesso di barite nella bevuta.* — È necessario che la bevuta resti in riposo per circa 12 ore, e ciò per varie ragioni. Innanzi tutto, perchè, contro quello che sarebbe da aspettarsi, l'acido carbonico non si combina con la barite se non con una certa lentezza: infatti, in esperienze fatte al riguardo, intercalando varie bevute l'una dietro l'altra, abbiamo visto ad es. che la 1ª bevuta non trattiene che il 53,3 % dell'acido carbonico totale, la seconda il 24,7 %, e il rimanente (ossia il 22 %) si raccoglie nelle bevute successive. Per favorire la combinazione dell'acido carbonico colla barite è opportuno l'agitare di tanto in tanto la bevuta messa a riposare. Oltre a ciò, è necessario che il precipitato di carbonato di bario, che forma in un primo tempo quasi una pseudo-soluzione, e che in un secondo tempo si presenta amorfo, diventi cristallino, depositandosi al fondo della bevuta, e lasciando perfettamente limpido il liquido soprastante. Pare infatti accertato che l'acido cloridrico attacchi più facilmente il carbonato amorfo che non il cristallizzato.

Dopo il riposo di 12 ore circa, allorchè cioè si è sicuri che tutto l'acido carbonico è combinato alla barite, si connette il tubo *h* della bevuta con l'estremità del sifone di una boccia contenente soluzione al 10 % di $BaCl_2$ perfettamente neutra e priva di CO_2; e manovrando la pinza *h*, si fa penetrare nella bevuta tanta soluzione finchè il volume del liquido nella bevuta aumenti di una metà, così che il $BaCl_2$ viene a trovarsi nel liquido alla concentrazione di circa il 3 % [3]. Si applica ora in *w* la pompa ad acqua, e si estrae aria dalla bevuta fino a $^1/_2$ atmosfera; e, dopo avere con ripetute scosse scacciato ogni eventuale residuo di $BaCl_2$ nel tubo di gomma libero di là dalla pinza *h*, aprendo cau-

[1] Nel caso, le quantità di CO_2 da estrarre siano straordinariamente tenui, è bene di tralasciare i lavaggi, coi quali si potrebbe apportare una quantità di CO_2 maggiore di quella contenuta nei residui della soluzione rimasti aderenti alle pareti dell'imbuto.

[2] È indispensabile di notare come sia erronea l'opinione che l'HCl debba in ogni caso esser privo di CO^2: giacchè fino a quando non abbiamo preparato l'HCl con le cautele necessarie per averlo libero da CO_2, dovevamo lamentare errori piuttosto notevoli, dovuti a tale inconveniente.

[3] Il $BaCl_2$ penetra nella bevuta perchè in questa vige una debole pressione negativa, dipendente sia dal fatto che, durante il riposo, quella parte del gas contenuto nella bevuta che è costituita da CO_2 è stata assorbita dalla barite, sia perchè la temperatura della bevuta è discesa da 25-35° C., quale è sempre verso la fine dell'estrazione, a quella dell'ambiente.

tamente quest'ultima, si porta la colonna liquida nel tnbo *m* a livello del liquido della bevuta.

Resta ora da titolare l'eccesso di barite non combinata con CO_2. Per ciò si unisce l'estremità *w* del tubo di gomma della bevuta con il tubo di vetro *t*, piegato ad angolo retto, di una buretta automatica *E* ad HCl $^1/_{25}$ - $^1/_{100}$ n. Si apre la pinza *u* della buretta e, osservando il livello dell'HCl, ci si assicura che tutte le connessioni tengono perfettamente. Dopo di che, tenendo la bevuta inclinata in modo che il tubo *n* venga ad assumere una direzione assai prossima alla verticale, si apre cautamente la pinza *o*, sorvegliando contemporaneamente la discesa del liquido nella buretta *E*; il liquido scende dapprima piuttosto rapidamente: ma allorquando esso è giunto alla pinza *o*, si arresta di colpo, e occorre aprire ancora un poco questa pinza perchè il liquido ricominci a discendere lentissimamente. Lo si lascia discendere così fino a che esso riempie tutto il tubo *n*; si chiude allora la pinza *o*. Si rimette ora la bevuta nella sua posizione normale, si porta a zero il liquido nella buretta, e, aprendo di nuovo la pinza *o*, si fa cascare a goccia a goccia l'HCl nella bevuta, agitando ad ogni goccia, fino a completa scolorazione della fenolftaleina. Si rinchiude allora la pinza *o* e si rilegge il livello del liquido nella buretta. La titolazione eseguita in questo modo richiede parecchio tempo (da 10 a 20'); ma essa è, in compenso, molto esatta.

In quanto al tempo, esso non intacca il rigore del dosamento come nelle ordinarie titolazioni fatte in contatto dell'aria. Pare inoltre assai vantaggioso, per una esecuzione rigorosa del metodo di Winkler, che non si formino, per cattiva diffusione, piccole zone di acido cloridrico, nelle quali un po' del precipitato potrebbe venire disciolto: agitando ad ogni goccia, viene evitato qualsiasi pericolo di tal genere.

Abbiamo infine cercato di definire gli errori proprî del metodo così trasformato. In una prima serie di ricerche, già innanzi ricordate, ci siamo preoccupati della possibilità che l'acido carbonico non venisse estratto in modo completo. Ma esperienze, fatte estraendo nello stesso pallone liquidi già estratti, non lasciano alcun dubbio che l'*acido carbonico viene estratto completamente*. In una seconda serie di ricerche abbiamo cercato di determinare a quanto ammonti l'acido carbonico acquistato per impurità dei liquidi di lavaggio e per l'inevitabile apertura dell'imbuto a separazione, apertura che i liquidi da esaminare e quelli di lavaggio porta a contatto, sia pure per brevissimo tempo, con l'aria ambiente. Da un notevole numero di esperienze fatte al riguardo estraendo soltanto l'acqua di lavaggio e l'HCl, si desume che tale acquisto è poco variabile, ed è sempre compreso fra $0{,}0_5 25$ e $0{,}0_5 50$ mol. CO_2 (corrispondenti a 0,5 - 1,00 cmc di HCl $^n/100$). Tuttavia, in esperienze, in cui importa determinare esattamente quantità assai piccole di CO_2, è opportuno il determinare tale acquisto per un'intera serie di ricerche, rimanendo esso per una stessa serie, quando i liquidi di lavaggio e la soluzione $0{,}1_n$ di HCl restano immutati, sensibilmente costante.

Per esperienze accurate occorre inoltre che il titolo della barite sia determinato per ogni serie di ricerche. Si riempie perciò una bevuta nello stesso modo col quale si riempiono le bevute destinate a raccogliere l'acido carbonico; e, previa aggiunta del $BaCl_2$, si titola nel modo innanzi descritto, fuori del contatto dell'aria. È notevole che il titolo della barite ricavato in

questo modo risulta costantemente un po' inferiore a quello ricavato titolando all'aria libera l'acido cloridrico contro la barite di circa $0{,}0_5 4$ gr. eq. $Ba(OH)_2$ in cifra assoluta. Tale differenza resta immodificata aggiungendo all'acido cloridrico, prima della titolazione, $Ba\,Cl_2$. La causa di tale divario va perciò ricercata, con ogni probabilità, nelle inevitabili impurità dell'acqua di lavaggio, dell'aria residua nella bevuta ecc.

In una serie di ricerche, infine, abbiamo determinato l'errore proprio del metodo, adottando le norme sopra esposte circa l'acquisto di CO_2 per le manovre di versamento del liquido da esaminare e dei liquidi di lavaggio, e circa la titolazione della barite.

In questa serie di ricerche, l'acquisto fu di $0{,}0_5 5$ mol. CO_2, ed il titolo della barite fu trovato essere 0,04055 n. In quattro esperienze furono estratti 1, 2, 5 e 10 cmc. di una soluzione 0,115 n. di $Na_2\,CO_3$, ed i risultati furono i seguenti:

Sol. 0,115 *n* $Na_2\,CO_3$ estratti cmc.	$Ba(OH)_2$ 0,04055 *n* nella bevuta cmc.	HCl 0,025 *n* per dosare l'eccesso di $Ba(OH)_2$ cmc.	CO_2 estratto mol	CO_2 estratto corretto dell'acquisto mol	CO_2 calcolato mol	Differenza assoluta mol	Differenza percentuale
1	10	11,25	$0{,}0_4 621$	$0{,}0_4 571$	$0{,}0_4 575$	$-\ 0{,}0_6 4$	0,7
2	10	6,55	$0{,}0_3 1208$	$0{,}0_3 1158$	$0{,}0_3 1150$	$+\ 0{,}0_6 8$	0,7
5	15	0,97	$0{,}0_3 2920$	$0{,}0_3 2870$	$0{,}0_8 2875$	$-\ 0{,}0_6 5$	0,2
10	30	2,15	$0{,}0_3 5813$	$0{,}0_3 5763$	$0{,}0_3 5750$	$+\ 0{,}0_5 13$	0,2

Come si vede, le differenze fra quantità trovata e quantità calcolata di CO_2 sono tali che, avuto riguardo alla quantità minima di CO_2 determinata, permettono di affermare che il metodo di cui ci siamo occupati è assolutamente preciso, e degno della massima fiducia.

Storia della Matematica. — *Sull'*"Εφοδος *di Archimede*. Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella introduzione al suo scritto sul *Metodo*, Archimede [1] rileva l'importanza della nuova via, non solo per i risultati da lui scoperti, ma anche per quelli che i matematici futuri avrebbero un giorno ritrovati.

Gli storici della matematica hanno ben posto in luce da questo punto di vista l'opera di Archimede, dimostrando quanto sarebbe stato più semplice il còmpito di Keplero, di Cavalieri, e degli altri scopritori del calcolo infinitesimale se avessero potuto aver conoscenza dell'opera del geometra Siracusano.

Io desidero in questa breve Nota richiamare l'attenzione sui teoremi nuovi che propriamente si prefigge di dimostrare Archimede in questo scritto, cioè

[1] Archimedis, *Opera omnia*, ed. I. L. Heiberg, II edit., vol. II, Lipsia, Teubner, 1913, p. 426-428.

la determinazione del volume dell'unghia cilindrica [1], e del volume della parte comune a due cilindri circolari retti, aventi per basi due circoli inscritti in due faccie adiacenti di un cubo.

Questi volumi, come Archimede stesso ha osservato, sono commensurabili con quelli del cubo circoscritto, ed offrono, nella geometria solida l'analogo della quadratura delle lunule di Ippocrate, della geometria piana.

Mentre però l'opera di Archimede completa, fu ignorata e rimase nascosta fino ai nostri giorni, questi due risultati, furono noti e destarono l'attenzione dei matematici dei secoli scorsi.

2. Nella sua *Metrica*, Erone [2] aveva riferito come le conoscenze del volume interno a due cilindri di egual diametro, che s' intersecano ad angolo retto sia interessante per la pratica, trovandosi raffigurato un tale solido nella costruzione delle volte, delle fontane e dei bagni, cioè nei luoghi nei quali non è conveniente adoprare coperture in legname. Egli enunciava quindi la regola data da Archimede per calcolare quel volume.

Malgrado che anche questi passi di Erone siano stati scoperti e pubblicati soltanto di recente, ciò che essi contengono fu tuttavia fatto conoscere e pubblicato nel 1509 da Luca Paciolo, e nel 1639 da Bonaventura Cavalieri.

3. Luca Paciolo in appendice al trattato dei cinque corpi regolari [3] (del quale egli non è probabilmente autore, come ha dimostrato in un lavoro in corso di stampa nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei il cav. Gerolamo Mancini), riferisce infatti questo problema.

« Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo è 4, cioè de « ciascuna sua basa, ed un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogo- « nalmente, domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella « foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso ».

Il Paciolo enuncia dapprima la regola per il calcolo del volume, che consiste nel prendere i due terzi del cubo del diametro delle basi delle due colonne (cioè $42\frac{2}{3}$ nel caso del diametro 4, dell'esempio da lui dato).

Egli fa poi seguire questo risultato da un tentativo di dimostrazione, insufficiente ed inesatto. Esso consiste nell'ammettere che, come il volume di una sfera è doppio di quello del doppio cono inscritto in essa, avente per base un circolo massimo e per vertici i due poli di questo circolo (come risulta dal volume della sfera dato da Archimede), così il volume del solido

[1] Il nome *ungula cylindrica* si trova nell'opera: *Quadratura circuli*, tomus II, auctore R. P. Gregorio a S. Vincentio, S. I., Antverpiae, 1647, liber nonus, pag. 955.

[2] Heronis Alexandrini, *Metrica*, ed. Hermann Schöne, Leipzig, Teubner, 1903 (Opera, vol. III, p. 130).

[3] Fa seguito alla *Divina proportione* ed è intitolato: *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis, D. Petro Soderino principi perpetuo populi Florentini a M. Luca Paciolo Burgense, minoritano particulariter dicatus.* Tractatus tertius, casus 10, fol. 24; Venetiis, 1509, impressum per probum virum Paganinum de Paganinis.

che è parte comune dei due cilindri sia doppio della bipiramide a base quadrata inscritta in esso. E poichè questa bipiramide vale un terzo del cubo circoscritto, il solido comune ai due cilindri deve esserne i due terzi. Il Paciolo non sa dare altra ragione di questo risultato (che del resto è vero), che questa sola, che cioè nelle due sezioni fatte nei due piani diagonali (passanti cioè per le due ellissi intersezioni dei due cilindri), il rapporto tra l'area sezione del solido comune ai due cilindri (che è una ellissi) e l'area della sezione della bipiramide (che è una losanga inscritta nell'ellissi), è eguale al rapporto delle aree delle sezioni fatte con un piano passante per l'asse della sfera e del doppio cono in essa inscritto.

Il ragionamento contorto, non è che un tentativo non riuscito, di giustificare il risultato [1], forse tratto da Erone, od almeno da qualche matematico bizantino il quale abbia riferito il passo di Erone [2].

4. Ma il Paciolo continua proponendo un altro problema:

« *Casus* 11. — Egli è una volta a cruciera et per ciascuna faccia 8, et « è alta 4, così nel colmo degli archi commo nel mezzo della volta; doman- « dase de la sua superficie concava:

« Tu dei sapere che la volta in cruciera è composta de doi mezzi canoni, « intersegandose l'uno l'altro nelle loro congiuntioni fanno quattro puncte « de scacheti de palle, et i posamenti sopra le quattro basa se congiungano « a do a do puncte terminando in uno solo puncto... »

Anche qui il Paciolo giunge ad un risultato esatto ($73\frac{1}{7}$, supposto $\pi = \frac{22}{7}$), con un ragionamento insufficiente, il che porta a credere che anche di questo risultato egli non è autore. D'altra parte l'area della volta a crociera, che si trova oggi facilmente, era un problema della stessa difficoltà di quello risolto da Archimede.

A me sembra quindi probabile che ad Archimede stesso si debba questo risultato, dato sotto questa o sotto altra forma, in qualche altra delle sue opere perdute, forse quella « περὶ πλινθίδων καὶ κυλίνδρων », ovvero quella « *de superficiebus et corporibus irregularibus* » [3].

5. È poi notevole che il Paciolo si proponga ancora il problema.

« *Casus* 15. — Egli è uno corpo sperico che l'axis suo è 10. Uno lo « fora nel mezzo con uno trevello et passalo de l'altro canto, et il diametro

[1] Si noti che Keplero con un metodo analogo, giustifica la misura dell'area di un emisfero data da Archimede, osservando che è *verisimile* che essa sia (come è difatti), media geometrica tra quella del cono circolare retto inscritto ad esso e quella del cono circoscritto. Cfr. *Nova stereometria doliorum*, 1615, prima pars, theor. VI (Kepleri, *Opera omnia*, vol. IV, pag. 561).

[2] È interessante il confronto dell'opera di Erone, coi trattati di Luca Paciolo. L'identità di varî esempi numerici, del metodo seguito nelle dimostrazioni, dimostrano chiaramente l'origine greca dei trattati.

[3] Cfr. Archimedis, *Opera omnia*, ed., I. L. Heiberg, vol. II, pp. 542-543, Leipzig, 1913.

« del tondo del buso 2, domandase che leva de quella quadratura del corpo « sperico per quella foratura ».

Senza seguire il Paciolo nel suo stile contorto, basterà dire semplicemente che il suo problema conduce ad osservare che *la porzione di sfera esterna ad un cilindro inscritto in essa, ha lo stesso volume di una sfera avente per diametro l'altezza del cilindro.*

Forse anche questo risultato fu conosciuto da Archimede, o da alcuno dei suoi discepoli?

Concluderò queste notizie su Luca Paciolo osservando, che egli infine, precorrendo Keplero [1], si propone il problema di trovare il volume di una botte, e dà perciò varie regole.

6. Bonaventura Cavalieri nel 1639 [2] senza citare nè il Paciolo, nè altri autori, si propone nel suo problema 80 (p. 435) di « misurare la capacità delle botti », e nel suo probl. 81 (p. 450) « come si possi misurare il vano o capacità delle volte fatte a croce ».

Egli dà soltanto regole empiriche, poichè (p. 458): « la ragione della « detta misura depende dalli principî della mia geometria conforme ai quali « l'ho dimostrata, quale però tralascio come che sia assai lunga.... »

7. È da notarsi che Bonaventura Cavalieri sebbene in questi suoi problemi non citi alcuno, conobbe e studiò l'opera di Keplero [3].

Rimane soltanto il dubbio se Keplero a sua volta abbia conosciuto l'opera di Luca Paciolo [4].

Aggiungerò infine che queste mie note bibliografiche completano quelle aggiunte da T. Reinach [5] alla sua versione del trattato di Archimede.

(1) *Nova Stereometria Doliorum vinariorum,* Lincii, 1615 (Kepleri, *Opera omnia,* ed. Frisch Frankofurti, 1863, vol. IV, p. 551.

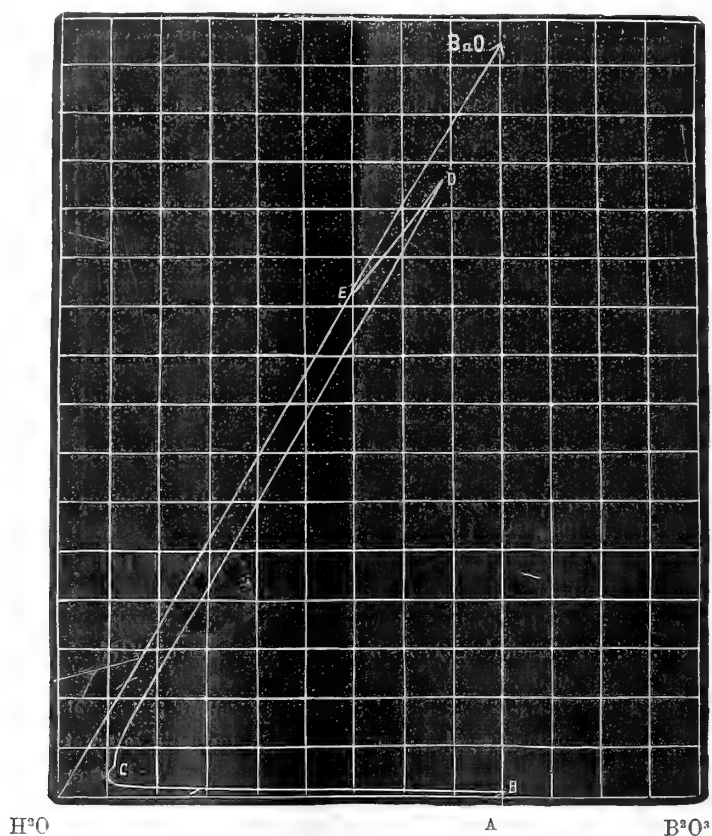
(2) B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi,* Bologna, Monti, 1639.

(3) Che egli cita infatti nella prefazione alla sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* Bononiae, 1635 (fol. *b,* recto).

(4) Negli indici del Frisch dell'*Opera omnia* di Keplero, vol. VIII, 2, il nome del Paciolo non appare mai citato.

(5) *Revue générale des sciences,* Paris, 1907, 15 decembre. Il Reinach attribuiva a Leopold Hugo, al principio del sec. XIX, la scoperta dei volumi delle volte, etc.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* BaO-B^2O^3-H^2O a 30°. Nota III di U. SBORGI, presentata dal Socio R. NASINI [1].

Nella seguente figura sono riportate le curve di solubilità costruite in base alle esperienze della tabella pubblicata in una Nota precedente [2]. Non è stato riportato per intero il diagramma triangolare, perchè in esso la più estesa delle curve di solubilità in una figura, p. e. della grandezza della seguente, avrebbe la lunghezza soltanto di alcuni millimetri e risulterebbero quindi incomprensibili le relazioni tra le varie curve. Ma è stato eseguito naturalmente a parte un diagramma molto più in grande che può del resto ricavarsi sempre dai dati della tabella colle note regole di costruzione.

Le curve di solubilità sono quattro: la AB che parte dal punto A rispondente alla solubilità dell'acido borico puro a 30° e arriva al punto B

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Pisa.
(2) Rend. Accad. Lincei, vol. XXIII, 1° sem., fasc. 9°, pag. 717.

in cui si hanno per corpo di fondo acido borico ed il triborato coesistenti in quel punto. La soluzione ha qui la composizione seguente 3,65 % di B^2O^3, 0,045 % (in media) di BaO come risulta dalla tabella. Cristallizza in questo punto dalla soluzione estratta dal termostato l'acido borico. Da B a C si ha la curva di solubilità del triborato in presenza di quantità a mano a mano decrescenti di acido borico. Come si vede la solubilità è minima: il contenuto in BaO sale lentamente da 0,04 % fino a 0,22 %: in questo punto si ha la soluzione del triborato in acqua pura, punto individuato sia teoricamente dalla costruzione grafica, sia sperimentalmente ponendo il triborato preformato in presenza di acqua. I resultati sperimentali dettero come composizione della soluzione di triborato in acqua pura 0.2971 % B^2O^3, 0,2265 % BaO, 99,4764 % H^2O: dalla costruzione grafica si ricaverebbe 0,30 % B^2O^3, 0,22 % BaO, 99,48 % H^2O.

Da questo punto la curva di solubilità del triborato sale, e si ha ora che esso si trova disciolto in soluzioni a contenuto crescente di BaO. In C si ha per corpo di fondo triborato e metaborato; la soluzione in questo punto contiene 0,31 % B^2O^3, 0,31 % BaO (in media): e da qui decorre la curva di solubilità del metaborato fino al punto D, in cui coesistono barite e metaborato. Il punto rispondente alla solubilità del metaborato in acqua pura ha la seguente composizione, 0,49 % BaO, 0.23 % B^2O^3, 99,28 % H^2O determinata sperimentalmente: dalla costruzione grafica si avrebbe 0,48 % BaO, 0,22 % B^2O^3, 99,30 % H^2O. Lungo la linea CD a partire da circa un terzo della sua lunghezza dal basso, la soluzione estratta dal termostato depone cristalli che sembrano e sono presumibilmente di barite: questo avviene anche in D e lungo la linea susseguente DE. La composizione del punto D è 5,80 % BaO, 0,26 % B^2O^3 93,94 % H^2O, come si vede dalla tabella. Lungo la linea DE si ha, per corpo di fondo, barite.

Per quanto riguarda le linee di coniugazione uscenti dalle varie curve occorre notare quanto segue Dai punti D, C e B, escono linee divergenti interposte rispettivamente tra la linea della barite e quella dei metaborati (1 - 1 - x), tra quella dei metaborati e quella dei triborati (1 - 3 - x), e tra quella dei triborati e quella dell'acido borico. Dalle linee BC e CD, curve di solubilità dei due soli composti che si hanno come fasi stabili a 30°, i fasci di linee sono convergenti nella direzione della linea dei triborati e dei metaborati rispettivamente. Si può dunque concludere che si ha formazione di questi due composti, il che è confermato da molti altri fatti e cioè dalla posizione relativa delle linee stesse nel diagramma, dal fatto che su queste linee si trovano i punti rispondenti alla solubilità dei due composti in acqua pura etc. etc. Ma le linee ottenute non convergono in un punto solo; cosicchè è impossibile ricavare con sicurezza il contenuto di acqua di cristallizzazione spettante ai due composti. Questo fatto è inevitabile: linee di coniugazione uscenti da curve di una estensione minima, come quelle che si ottengono per

gli alcalino terrosi decorrono così vicine le une alle altre, che bastano pochi centigrammi, talvolta persino milligrammi di BaO o di B^2O^3 di differenza su cento grammi del miscuglio analizzato, perchè esse si incontrino in un punto piuttosto che in un altro: se si pensa che le determinazioni venivano di necessità eseguite su alcuni grammi di sostanza e se si tien conto delle difficoltà analitiche a cui ho accennato in principio, si comprende come fosse quasi impossibile ottenere resultati certi su questo punto: sicura è la direzione delle linee di coniugazione, quindi l'individuazione dei composti formantisi, ma sicuro non può essere il punto di convergenza di quelle linee, quindi non sicuro il numero di molecole di acqua di cristallizzazione spettante ai varî composti. Malgrado questo si hanno alcuni indizî che permetterebbero qualche conclusione anche a questo proposito, ma preferisco risolvere con certezza la questione determinando — dopo conosciuti i composti che si formano a varie temperature — i punti di trasformazione dei loro idrati. Del resto la questione è del tutto secondaria; chè lo scopo di queste ricerche sui borati è quello di determinare gli aggruppamenti molecolari che si formano come fasi stabili a varie temperature tra B^2O^3 e le varie basi, e le solubilità dei composti formantisi.

Ho già detto come a conferma dei resultati ottenuti, ponendo a reagire il metaborato con acido borico o con barite (ed acqua), furono fatte esperienze anche cogli altri borati: fu adoprato specialmente il triborato essendo questo uno dei composti stabili a 30°. I punti ottenuti per questa via si disponevano regolarmente sulle curve già individuate colle esperienze fatte con metaborato. Ponendo metaborato e triborato con acqua, o triborato con acqua o il composto 2-3-6 con acqua — adoprando, si capisce, i composti preparati nel modo detto nella Nota I — si osservava sempre nella soluzione un contenuto in barite, nei primi giorni dacchè il miscuglio era in termostato, leggermente più alto di quello rispondente alle curve di solubilità. Dopo, il valore si avvicinava al normale.

Ciò era dovuto — credo — al fatto che questi borati per le ragioni dette nella Nota I non erano del tutto puri: lavando il miscuglio dei composti prima di porre in termostato e decantando l'acqua di lavaggio, si osservava una maggior rapidità nel raggiungere i valori definitivi. Valgano per esempio i resultati della esperienza 22 e della 17 ottenuti i primi senza questo lavaggio, i secondi con lavaggio. Comunque dall'insieme dei resultati sperimentali si ricava che i composti formantisi a 30° sono il triborato e il metaborato, le curve di solubilità dei quali sono quelle della figura riportata. Il resultato ottenuto è interessante anche in quanto stabilisce già una certa regolarità, nella formazione dei borati di bario e di calcio a 30°. Per il bario manca come composto stabile a questa temperatura il 2-3 che si ebbe invece per il calcio. Anche nella preparazione dei borati di bario un composto rispondente alla formula 2-3 si forma solo intermediariamente nella

preparazione del metaborato. Invece nella preparazione dei borati di calcio questo composto 2-3 si ottiene con abbastanza facilità. Per quanto riguarda il triborato io ottenni nella preparazione dei borati di bario un precipitato rispondente alla formula di un triborato; Atterberg aveva ottenuto un precipitato simile, ma con le ragioni che ho dette nella Nota I aveva ritenuto trattarsi di un miscuglio di borati. Dal diagramma della figura qui riportata, e dai resultati della tabella si vede come — per lo meno a 30° — questo composto esista stabilmente come tale. Le oscillazioni di composizione riscontrate da Atterberg potrebbero anche riportarsi alle cause a cui ho accennato nella Nota I. Comunque il triborato esiste come fase stabile a 30°, e con questo si stabilisce una certa regolarità per i borati dei due alcalino terrosi sperimentati a questa temperatura: accanto alla curva dell'acido borico si ha subito la curva del triborato: accanto a quella della base si ha la curva del metaborato: intermediariamente per il calcio si ha il composto 2-3, cioè per il calcio successivamente i composti 1-3, 2-3, 3-3 (ossia in formula più semplice 1-1, metaborato): per il bario manca invece il composto 2-3, il quale a 30° manca anche per i borati alcalini, sodio, potassio, ammonio.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Volterra, a nome dell'autore prof. Pionchon dell' Università di Digione, presenta in omaggio all'Accademia l'opera: *Notice sur la vie et les travaux de Charles Meray, correspondant de l'Institut, Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Dijon* (*1835-1911*). Il Socio Volterra discorre della pubblicazione suddetta mostrandone l'interesse. In essa si rievocano la figura e le opere di un matematico di molto valore da poco tempo scomparso il quale, in maniera originale, ha dato in alcuni libri ormai classici, una esposizione sistematica dei fondamenti dell'Analisi, ed in altri pure molto apprezzati ha svolto con metodo proprio i fondamenti della Geometria.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 10°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXII. (1892-1913).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Maggio 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Issel. Lembi fossiliferi quaternarî e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal professore D. Lovisato . . . . . Pag. 759
Armellini. Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta (pres. dal Socio *Volterra*) . . . . » 770
Burgatti. Potenziali Newtoniani dell'elasticità (pres. dal Corrisp. *Marcolongo*) . . . . » 776
Munari. Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . . » 781
Silva. Sulla correzione di r u n alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico (pres. dal Socio *Millosevich*) . . . . » 787
Eredia. L'influenza della orografia sulla distribuzione mensile della nebulosità (pres. *Id.*) » 795
Amadori. Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di potassio (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 800
Barbieri. Sul posto del cerio nel sistema periodico, e sui molibdati complessi del cerio tetravalente (pres. *Id.*) . . . . » 805
Cambi. Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni (pres. dal Socio *Angeli*) . . » 812
Ciusa e *Piergallini.* Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 821
Quercigh. Sulla vera natura della miersite e della cuprojodargirite (pres. dal Socio *Struever*) » 825
Migliorini. Sulla geologia dei dintorni di Tobruk (pres. dal Socio *De Stefani*) . . . . » 833
Plate. Alcune ricerche quantitative sull'assunzione di ioni nelle piante (pres. dal Socio *Pirotta*) » 839
Quagliariello e *D'Agostino.* Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. I. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico (pres. dal Corrisp. *Bottazzi*) . . . . . . » 844
Vacca. Sull' Ἔφοδος di Archimede (pres. dal Socio *Volterra*) . . . . » 850
Sborgi. Sui borati. Sistema BaO-B^2O^3-H^2O a 30° (pres. dal Socio *Nasini*) . . . . . . » 854

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Volterra. Presenta un'opera del prof. *Pionchon* e ne parla . . . . » 857

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 6 giugno 1914.* N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 11°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXIX del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Nella presente Nota pubblichiamo alcune esperienze, che servono a colmare qualche lacuna contenuta in certi nostri precedenti lavori; cogliamo poi l'occasione per fare alcune osservazioni relative ad una Memoria del prof. Paternò, comparsa lo scorso febbraio sulla Gazzetta Chimica.

Benzofenone e benzaldeide. — Noi abbiamo già in due riprese [1] studiato questa reazione ed abbiamo potuto accertare che, per azione della luce sul miscuglio delle due sostanze suindicate, si ottiene un composto fusibile a 245°, della formula $C_{27}H_{22}O_3$, che può essere considerato come un prodotto di addizione di due molecole d'aldeide benzoica ed una di benzofenone:

$$2\,C_7H_6O + C_{13}H_{10}O = C_{27}H_{22}O_3\,.$$

Ora il prof. Paternò, trascurando completamente le nostre ricerche, descrive la stessa esperienza [2]; e senza analizzare il prodotto ottenuto, in base ad una determinazione di peso molecolare, suppone che si tratti del trimero della benzaldeide, che fonde a 250°, scoperto da Mascarelli.

[1] Vedi le nostre Note V e XX in questi Rendiconti, vol. XII, I, pag. 238 (1903); e vol. 20, I, pag. 882 (1911).

[2] Gazz. chim., vol. 44, I, pag. 153.

Noi abbiamo purificato ulteriormente il nostro prodotto per ripetute cristallizzazioni dall'etere acetico, e non possiamo che confermarne la composizione.

Analisi col metodo del prof. Pregl:

	Trovato		Calcolato per	
	I	II	$C_{27}H_{22}O_3$	$C_{21}H_{18}O_3$
C	81,78	81,95	82,23	79,24
H	5,73	5,82	5,58	5,66

Peso molecolare coll'apparecchio Pregl in acido acetico:

Trovato		Calcolato per $C_{27}H_{22}O_3$
403	422	394

Il composto in soluzione acetica, in cui è assai poco solubile, non si combina nè colla semicarbazide, nè colla fenilidrazina.

Acetofenone ed alcool etilico. — Nella nostra prima Nota [1] avevamo ottenuto in questa reazione, oltre all'ordinario acetofenonpinacone, dal punto di fusione 122°, anche un'altra sostanza fusibile fra 80 e 90°, che avrebbe potuto essere l'isomero ottico del primo; siccome in seguito s'è visto che l'acetone coll'alcool etilico dà un prodotto di condensazione, il glicole trimetiletilemico [2], insieme con altri corpi, così credemmo utile di rifare le nostra vecchia esperienza per accertare la composizione della sostanza in parola.

Abbiamo esposto tre tubi, contenenti ciascuno 25 cc. di acetofenone e 125 di alcool assoluto, dal maggio al novembre 1912. Il prodotto, che più non odorava di acetofenone, venne liberato dall'alcool, che conteneva molta *aldeida acetica*, a b. m. ed il residuo rimase abbandonato a se stesso per un mese. Lentamente la massa finisce per riempirsi di cristalli.

Per estrazioni ripetute con etere petrolico, questi passano in soluzione, mentre resta indietro una materia resinosa (14, 8 gr.), che non siamo riusciti a ridurre in forma cristallina. Dalla parte solubile in etere petrolico, con un lungo e paziente trattamento, avvicendando i solventi etere petrolico, alcool metilico e benzolo, siamo in fine riusciti a separare, dall'ordinario *acetofenonpinacone*, dal punto di fusione 122°, l'altra sostanza, che, allo stato puro, fonde a 86°-87°. Anch'essa ha la composizione del suddetto pinacone

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{18}O_2$
C	79,32	79,34
H	7,41	7,44

e però deve essere riguardata come l'altro isomero ottico.

[1] Questi Rendiconti, vol. X, I, pag. 98 (1901).
[2] Ibid., Nota XVIII, vol. XX, I, pag. 715 (1911).

Per quanto facessimo ulteriori ricerche per rinvenire altri prodotti, crediamo di poter affermare che, come il benzofenone, anche l'acetofenone non dà, con l'alcool etilico, composti di addizione.

Benzofènone ed alcool isopropilico. — Per studiare l'azione di un alcool secondario sul benzofenone e sull'acetofenone, abbiamo fatto questa e la seguente esperienza.

In due tubi venne esposta una soluzione di 75 gr. di benzofenone in gr. 60 d'alcool isopropilico, dal maggio all'ottobre 1913. Il prodotto contiene una abbondante massa di cristalli. Separati per filtrazione e purificati dall'alcool, si dimostrarono formati esclusivamente dal *benzopinacone*, dal punto di fusione 186°. Il filtrato contiene, oltre all'alcool, notevoli quantità di *acetone*; distillato, lasciò un residuo che non era altro se non il suddetto pinacone.

Acetofenone ed alcool isopropilico. — Vennero esposti alla luce, in due tubi, 70 gr. del primo sciolti in 70 del secondo, dal giugno al novembre 1913. La soluzione, rimasta incolora, venne distillata prima a b. m.; e così si ottenne l'*acetone*, e poi con vapor acqueo per eliminare l'acetofenone se fosse rimasto inalterato. Di questo, peraltro, non si rivenne traccia. Il residuo (69.5 grammi) venne sottoposto ad un trattamento simile a quello già descritto: e così, dopo un paziente lavoro, abbiam potuto separare i due *acetofenonpinaconi* isomeri, dai punti di fusione 122° e 86-87°.

Anche in questa esperienza non si formarono altri prodotti.

I due chetoni aromatici in parola hanno dunque con gli alcooli etilico ed isopropilico, alla luce, un contegno assai diverso da quello dell'acetone.

Etilfenilchetone ed alcool etilico. — Appariva però necessario di studiare ancora il comportamento di questo chetone alla luce, per vedere se esso fosse in grado di subire una condensazione analoga a quella, assai interessante, dello etilmetilchetone [1].

Dopo le esperienze ora descritte, non era molto probabile che si formasse il difenacile ossia il dibenzoiletano.

Alla luce venne esposta in 6 tubi una soluzione di 150 gr. di etilfenilchetone in 750 cc. d'alcool assoluto, dal 7 maggio al 1° novembre 1912. La soluzione limpida, giallina, risultante, venne distillata a b. m. per eliminare tutto l'alcool, il quale nelle prime porzioni conteneva *aldeide acetica*.

Il residuo sciropposo, che aveva ancora l'odore del chetone inalterato, restò abbandonato a se stesso per un mese sull'acido solforico; e durante questo tempo andò riempiendosi di cristalli. Questi, raccolti e spremuti fra carta (25 gr.), furono purificati dall'etere petrolico.

Il composto fonde a 138°-139°, ed è uno dei due *etilfenilpinaconi* isomeri.

[1] Vedi la nostra XXII Nota in questi Rendiconti, vol. XXI, I, pag. 547.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{22}O_2$
C	79,67	80,00
H	8,32	8,15

Esso si presenta in squame o prismi, solubili nell'alcool e nel benzolo, e poco solubili nell'etere petrolico a freddo.

La parte sciropposa, da cui furono separati i cristalli ora descritti (110 gr.), venne distillata col vapor acqueo per eliminare l'etilfenilchetone rimasto inalterato; se ne ebbero 58 grammi. La trasformazione non è dunque così completa come lo è con l'acetofenone: il residuo vischioso, estratto con etere petrolico, lascia indietro una materia resinosa brunastra (7 gr.), da cui non si poterono ricavare sostanze cristalline. L'estratto etereo invece (45 gr.) cristallizza lentamente, e con l'aiuto dell'alcool metilico si potè separare l'altro pinacone fusibile a 138-139°.

La parte rimasta ancora sciropposa fu ripresa nuovamente con etere petrolico, separando così altra resina; e per spontaneo svaporamento del solvente, si ebbe una successiva cristallizzazione, la quale potè essere purificata, con alcuni opportuni artificî, impiegando l'etere petrolico e l'etere ordinario. Il prodotto si separa da questo ultimo solvente per evaporazione spontanea, in grossi cristalli che fondono a 113°.

Esso ha la stessa composizione del precedente *etilfenilpinacone*, fusibile a 138-139°, di cui costituisce l'altro isomero ottico.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{22}O_2$
C	80,18	80,00
H	8,22	8,15

L'etilfenilchetone si comporta dunque, alla luce, coll'alcool etilico, come l'acetofenone.

Acetofenone ed alcool benzilico. — Noi abbiamo già in altra occasione rilevato, a proposito delle reazioni fotochimiche descritte dal prof. Paternò, che esse non sono essenzialmente diverse dalle nostre [1]. Ora nella citata Memoria egli descrive, insieme con G. Perret, l'azione reciproca dei due corpi suindicati, la quale non è che una semplice variante di quella che ha luogo fra il benzofenone e l'alcool benzilico. Questa reazione, che è divenuta tipica per tutta una serie di analoghe trasformazioni, non conduce peraltro ad un solo prodotto: ma, come noi abbiamo dimostrato nel 1903 [2], insieme col glicole trifeniletilenico, si formano il benzopinacone e gli idrobenzoini.

[1] Questi Rendiconti, vol. XIX, I, pag. 648 (1910).
[2] Questi Rendiconti, vol. XII, II, pag. 235; e Gazz. chim., vol. 34, II, pag. 132.

Il prof. Paternò, non tenendo nessun conto, anche in questo caso, del nostro lavoro, non si preoccupa della presenza delle sostanze che accompagnano il composto d'addizione, il glicole difenilmetiletilenico, ed analizza il prodotto greggio della reazione non ottenendo naturalmente numeri soddisfacenti [1]. Siccome noi avevamo, per le ragioni già indicate, preparato questa esperienza ne pubblichiamo i risultati.

Alla luce furono esposti 100 gr. di acetofenone sciolti in 100 di alcool benzilico, dal maggio al novembre 1913. Il prodotto venne distillato anzi tutto con vapore acqueo per eliminare l'acetofenone e l'alcool benzilico rimasti inalterati. Il residuo della distillazione, una massa gialla sciropposa, ripresa con etere e liberata dal solvente, rimase abbandonata a se stessa sull'acido solforico sino a che cominciarono a formarsi cristalli. Siccome, per altro, una separazione diretta di questi ultimi appariva poco vantaggiosa, abbiamo estratto a caldo tutto il prodotto con un miscuglio di poco benzolo e molto etere petrolico. Restò indietro una resina, di cui non si fece altro esame. Dalla soluzione si separarono lentamente, dopo alcune settimane, dei cristalli, che furono riconosciuti per l'*acetofenonpinacone*, fusibile a 122°; svaporando ora il solvente, si ebbe uno sciroppo assai vischioso, che, non ostante un riposo di tre mesi, non accennava a cristallizzare. Per riconoscere le sostanze in esso contenute, dopo alcuni vani tentativi, pensammo di trasformarle in eteri benzoici. A questo scopo, 11,5 gr. del prodotto vennero trattati in soluzione piridica (50 gr.) con 12 gr. di cloruro di benzoile. La soluzione rossastra dà con acqua un precipitato oleoso, che, separato dal liquido, fu ripreso con etere; lavando la soluzione eterea con acido solforico diluito e poi con carbonato sodico, si separa, entro all'etere, una polvere bianca. Svaporando quest'ultimo e trattando il residuo con alcool, restò indietro, in piccola quantità, una materia bianca, cristallina, che purificata dall'alcool, fondeva a 247°.

Essa non è altro che il *dibenzoilidrobenzoino*, descritto da Forst e Zinke [2], che, secondo questi autori, fonde pure a 247°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{28}H_{22}O_4$
C	79,36	79.62
H	5,46	5,21

La parte dei benzoati, che è solubile nell'alcool, liberata da quest'ultimo e lasciata per due settimane a se stessa, aiutando la cristallizzazione con piccole aggiunte di alcool metilico, si solidifica parzialmente. La materia solida,

[1] loc. cit., pag. 156. Calcolato per $C_{15}H_{16}O_2$, C 78,95, H 7,02
Trovato C 80,60, H 6,82

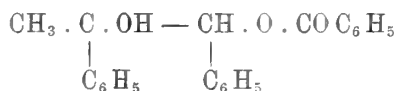
[2] L. Annalen, vol. 182, pag. 278.

bollita con etere petrolico, in cui è insolubile, venne poi purificata dall'alcool, dal benzolo e dall'etere. Si presenta in aghi bianchi, fusibili a 147-148°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{20}O_3$
C	79,66	79,52
H	6,08	6,02

Il composto doveva evidentemente essere il *monobenzoato* del *glicole difenilmetiletilenico*:

$$\begin{array}{l} CH_3 \, . \, C \, . \, OH - CH \, . \, O \, . \, CO\,C_6H_5 \\ \quad\;\; | \qquad\qquad\;\; | \\ \quad C_6H_5 \qquad\quad C_6H_5 \end{array}$$

Oltre a questi due benzoati, non siamo riusciti a separare altri prodotti cristallini.

Per accertare la identità del benzoato menzionato, abbiamo preparato il glicol difenilmetiletilenico, seguendo le prescrizioni di Tiffenau e Dorlencourt (1), e l'abbiamo trattato con cloruro di benzoile in soluzione piridica. Il prodotto, purificato come sopra, mantenne, non ostante ripetute ricristallizzazioni dall'alcool, il punto di fusione 139-140°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{20}O_3$
C	79,30	79,52
H	6,32	6,02

I due prodotti hanno lo stesso aspetto, e non possiamo per ora dire con sicurezza quale sia la ragione della abbastanza notevole differenza nel loro punto di fusione. Siccome il suddetto glicole può esistere in due forme stereoisomere, potrebbe darsi che nelle due sostanze di diversa provenienza predominasse uno dei due isomeri sull'altro. La cosa va ulteriormente studiata.

Relativamente poi alle ulteriori (2) esperienze che il prof. Paternò ha eseguito col prodotto ottenuto dall'acetofenone coll'alcool benzilico, dobbiamo dichiarare che non riusciamo a comprenderle.

In fine vogliamo ancora ricordare che, nella sua citata Memoria, egli tratta di un'altra esperienza, che sta in relazione con le nostre, senza tenerne conto alcuno.

Egli descrive insieme con G. Perret (3), la condensazione, alla luce, dell'alcool etilico con l'aldeide acetica, da cui si forma un prodotto bollente

(1) Annales de chimie et de physique, VIII série; tome 16, pag. 252.

(2) Gazz. chim., vol. 44°. I, pag. 157.

(3) Ibid., pag. 152.

fra 175° e 188°, del quale analizza tre frazioni, ottenendo numeri che gli fanno supporre la presenza del glicole dimetiletilenico, bollente a 184°:

$$CH_3 - CH\,OH - CH\,OH - CH_3\,.$$

Ora bisogna sapere che nella nostra Nota XVIII (¹) abbiamo descritto la condensazione dell'alcool etilico con l'acetone, nella quale, oltre al prodotto di addizione, il glicole trimetiletilenico, si forma alcool isopropilico ed il glicole dimetiletilenico in parola. Noi abbiamo però supposto che quest'ultimo prendesse origine appunto dall'alcool etilico e dall'aldeide acetica formatasi accanto all'alcool isopropilico. Presentemente abbiamo in corso anche l'esperienza diretta; ma d'altronde è naturale che non possiamo sempre eseguire subito tutte le esperienze già tracciate nei nostri lavori, nè quelle che i nostri studî possono suggerire. Se il prof. Paternò avesse tenuto conto del nostro citato lavoro, avrebbe potuto assai facilmente identificare il suo glicole, giacchè esso dovrebbe dare, per ossidazione con acqua di bromo, alla luce, il diacetile, assai facilmente riconoscibile alla sua diossima.

Appendice.

Nella nostra IX Nota (²) abbiamo descritto i prodotti che si formano per azione dell'acido cianidrico sull'acetone in presenza della luce. Siccome, altre volte, gli omologhi superiori possono comportarsi in modo diverso, abbiamo creduto opportuno studiare in questa reazione il contegno del metiletilchetone. Ci siamo peraltro accorti che le sostanze contenute nel prodotto, corrispondono a quelle avute con l'acetone. La descrizione potrà perciò essere assai succinta. Dobbiamo inoltre rilevare che la reazione si compie, sebbene con minor rendimento, anche all'oscuro: non si tratta però di una azione specifica della luce. Con l'acetone invece si ebbero al buio risultati assai diversi che alla luce. Siccome peraltro, esperienze fatte in questi ultimi tempi ci hanno provato che sulle azioni dell'acido cianidrico hanno grande influenza anche piccole quantità di materie estranee, non si può ora escludere che anche nel caso dell'acetone la reazione non sia fotochimica.

Acido cianidrico e metiletilchetone. — Le quantità impiegate furono 70 grammi del chetone sciolti in un litro d'acido cianidrico al 2,58 %. L'esposizione durò due anni; il successivo trattamento venne fatto come nel caso dell'acetone.

Quale primo prodotto si ebbe anche qui l'*ossalato ammonico* ed in altre l'*ossamide*.

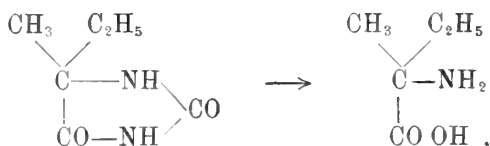
(¹) Questi Rendiconti, vol. 20°, I, pag. 715, an. 1911. Memorie dell'Accademia di Bologna, VI, vol. 9, pag. 186; Berichte, vol. 44, pag. 1282.

(²) Questi Rendicouti, vol. XV, II, pag. 529 (1906).

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_2H_4O_2N_2$
N	32,17	31,82

Come venne descritto allora, quale prodotto principale si forma un composto ureico, che nel caso dell'acetone è l'acetonilurea e nell'attuale il suo omologo superiore:

$$\begin{array}{c} CH_3 \quad C_2H_5 \\ \diagdown\ \diagup \\ C—NH \diagdown \\ | \qquad\qquad CO \\ CO—NH \diagup \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} CH_3 \quad C_2H_5 \\ \diagdown\ \diagup \\ C—NH_2 \\ | \\ CO\,OH \end{array},$$

a cui corrisponde l'*acido metiletilaminoacetico*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_{10}O_2N_2$
C	50,59	50,70
H	7,10	7,04
N	19,89	19,72

L'urea che è solubile nell'acqua e negli altri solventi ordinarî, si presenta in prismi senza colore, che fondono a 146°.

Accanto ad essa abbiamo rinvenuto l'*amide dell'acido α-metil-α-ossi-butirrico*, in forma di una massa cristallina, che fonde a 60°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}O_2N$
C	51,09	51,28
H	9,49	9,40
N	12,10	11,96

Da cui, per saponificazione con barite, si ebbe l'acido relativo che, in corrispondenza con W. Miller (¹), fonde a 69°.

A differenza di quanto avevamo trovato con l'acetone, nel caso attuale non abbiamo potuto rinvenire anche l'acido metiletil-α-amino acetico suddetto ottenuto da M. D. Slimmer (²) per saponificazione della cianidrina del metiletilchetone con acido cloridrico. Per accertare la costituzione della suddetta urea, l'abbiamo scomposta con acido cloridrico in tubo e separato convenientemente l'acido amidato. Esso forma una massa di aghi bianchi finissimi, i quali sublimano senza fondere.

(¹) L. Annalen, vol. 200, pag. 282.
(²) Berichte, vol. 35, pag. 406 (1902).

Analisi col metodo Pregl:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}O_2N$
C	51.26	51.28
H	9,47	9,40
N	11,81	11,97

Lo studio ulteriore del contegno dell'acido prussico, anche all' infuori dell' influenza della luce, presenta, come si vede, qualche interesse, che potrebbe riguardare anche la fisiologia vegetale; però abbiamo in preparazione alcune esperienze in proposito.

Per ultimo sentiamo il grato dovere di ringraziare il prof. F. Pregl per la grande gentilezza con la quale accolse nel suo laboratorio a Graz il dott. Emilio Sernagiotto, dove eseguì alcune micro-analisi riportate nel presente lavoro; esprimiamo inoltre la nostra riconoscenza anche al dott. Sernagiotto che ci ha coadiuvati in queste ricerche.

Meccanica. — *Sopra le forme quasi-circolari dell'anello di Saturno* (¹). Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Levi-Civita.

. . . .

. . . . , a proposito della Sua idea di studiare il comportamento longitudinale dell'anello di Saturno, senza ammettere preventivamente la forma circolare, come, sia pure ragionevolmente, veniva fatto pel passato, mi permetto di soggiungere quanto segue:

La esistenza di direttrici anche non circolari viene messa luminosamente in evidenza, oltre che dalle considerazioni da Lei suggerite, anche dalla sommaria ispezione delle equazioni, dalle quali Ella riescì a far dipendere la forma della direttrice e che presentano così felice analogia con quelle che regolano l'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile [2].

Come Ella giustamente osserva, dopo le circolari, assumono speciale interesse, dal punto di vista astronomico, le configurazioni vicine alle circolari e che io chiamerei — mi accordi la preferenza — *configurazioni quasi-circolari*. Ella fornisce una classe di soluzioni corrispondenti a particolari configurazioni quasi-circolari piane [3]. A tale proposito mi permetto di richiamare la Sua attenzione sopra una categoria delle stesse, che mi sembra la più generale possibile; essa comprende, in particolare, quella da lei già

[1] Estratto da una lettera al prof. Levi-Civita.

[2] Mi riferisco al lavoro: *Sulla forma dell'anello di Saturno*, Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, tomo LXVIII, pp. 557-583.

[3] Veggasi altresì: A. Viterbi, *Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno*, Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, tomo LXIX, pp. 1129-1149; *Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno*, ibidem, tomo LXX, pp. 1311-1333.

messa in evidenza, nonchè un'altra cui corrispondono configurazioni ellittiche, che io credo abbiano, dopo le circolari, il maggior interesse dal punto di vista astronomico.

Mi riferisco senz'altro al Suo lavoro.

1. Assunto nel piano della direttrice un sistema di coordinate polari ϱ e ϑ con polo nel centro di Saturno, e detto s l'arco della direttrice contato a partire da un'origine arbitraria, positivamente nel senso delle ϑ crescenti, la questione è ridotta, in sostanza, alla integrazione del sistema costituito dalle sue equazioni (14) e (15)

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\psi + \dfrac{1}{\varrho} + \dfrac{1}{2}\varrho^2 = h, \\ \psi^2\varrho^2 \dfrac{d\vartheta}{ds} = \lambda, \end{cases}$$

(h e $\lambda > 0$ costanti arbitrarie): cioè alla determinazione di due funzioni ϱ e ψ dell'argomento ϑ, di cui la seconda serve a caratterizzare la densità lineare dell'anello.

In tali equazioni, com'Ella avrà già intravvisto, ho assunto $a = 1$, cioè ho assunto come unità di lunghezza il raggio dell'orbita circolare di un satellite (di massa trascurabile di fronte a quella di Saturno), che avesse per moto medio la velocità angolare ω di ciascun anello.

Orbene, mi propongo di far vedere che, posto

$$(2)\qquad \varrho = \varrho_0 \{1 + \varepsilon\varrho_1(\vartheta)\},$$

dove ϱ_0 è una costante arbitraria > 1, ε una costante arbitraria infinitesima, e $\varrho_1(\vartheta)$ una funzione arbitraria di ϑ, è sempre possibile di determinare una $\psi(\vartheta)$, e le due costanti h e λ in guisa che le (1) riescano identicamente soddisfatte.

Potendosi scrivere la (2) anche nel modo seguente:

$$\varepsilon\varrho_1 = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0},$$

ne risulta che $\varepsilon\varrho_1$ (quantità di 1° ordine) altro non è se non *lo scostamento unitario* dei punti della curva (2) dalla circonferenza $\varrho = \varrho_0$.

Naturalmente, interessando avere delle direttrici chiuse, basterà imporre alla $\varrho_1(\vartheta)$ di essere periodica di periodo $2k\pi$, con k numero razionale.

Ciò posto, vengo alla parte deduttiva.

2. Poichè, trattando ε come quantità di primo ordine, si ha, per (2),

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 + \varrho^2}} = \frac{1}{\varrho_0}(1 - \varepsilon\varrho_1),$$

le (1), per la (2) stessa, divengono, colla cennata approssimazione,

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\psi = h - \dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{2}\varrho_0^2 + \left(\dfrac{1}{\varrho_0} - \varrho_0^2\right)\varepsilon\varrho_1\,, \\ \psi^2\varrho_0(1 + \varepsilon\varrho)_1 = \lambda\,. \end{cases}$$

Com' è facilissimo di accertare, queste equazioni risultano identicamente soddisfatte, entro i limiti della voluta approssimazione, prendendo,

$$(4)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{5}{2}\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\,. \\ \lambda = \dfrac{1}{\varrho_0}(\varrho_0^3 - 1)^2\,, \end{cases}$$

nonchè

$$(5)\qquad \psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0}\left\{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varrho_1\right\}.$$

È pertanto lecito di concludere che le funzioni (2) e (5) rendono soddisfatte, nelle imposte circostanze, le equazioni (1), *qualunque sia la funzione* $\varrho_1(\vartheta)$: basta a tal uopo che le costanti h e λ sieno legate a ϱ_0 dalle relazioni (4).

Si può dunque asserire, senz'altro, costituire le (2) e (5) l' integrale generale delle soluzioni quasi-circolari piane.

3. In particolare, preso

$$\varepsilon\varrho_1 = -\varrho_0\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\cos\alpha(\vartheta - \vartheta_0)\}\,,$$

con ϑ_0 costante arbitraria, ε_1 e ε_2 costanti arbitrarie infinitesime, e

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{\varrho_0^3 - 1}}\,.$$

si ha la soluzione (30′) della Sua Nota.

4. La (2) può rappresentare anche ellissi, delle cui eccentricità sieno trascurabili le quarte potenze.

Infatti, l'equazione di un'ellisse, il cui asse minore è ϱ_0, e la cui eccentricità è e, può notoriamente scriversi,

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\vartheta}}\,,$$

ovvero, trascurando e^4 e potenze superiori,

$$(6)\qquad \varrho = \varrho_0\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2\vartheta\right).$$

Questa rientra manifestamente nella (2); basta prendere

$$\varepsilon = \frac{1}{2} e^2 \quad , \quad \varrho_1 = \cos^2 \vartheta \,. \tag{7}$$

5. Se, com' Ella accenna, si assume come massa unitaria $\frac{M}{k}$ (M massa di Saturno, k il parametro costante di configurazione dell'anello), la funzione ψ, definita dalla (5),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \varrho_1 \right\} ,$$

non è altro che la densità lineare.

Poichè, naturalmente, dev'essere $\psi > 0$, si esige che sia $\varrho_0 > 1$. Nel caso di configurazioni ellittiche (6), si ha, per le (7),

$$\psi = \frac{\varrho_0^3 - 1}{\varrho_0} \left\{ 1 - \frac{1}{4} e^2 \cos^2 \vartheta \right\} ,$$

mentre dalla (6) stessa scende che

$$\varrho > \varrho_0 > 1 \,.$$

Partendo da questa, con considerazioni identiche alle Sue, si perviene, anche per le configurazioni ellittiche, alla conclusione da Lei già stabilita: *la velocità angolare di ciascun anello deve essere più grande di quella che competerebbe ad un satellite posto alla stessa distanza media da Saturno.*

Matematica. — *Sur les fonctions permutables analytiques.* Nota II di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. J'ai demontré, dans ma précédente Note [1], le résultat suivant:

Soit $f(x\,,y)$ une fonction analytique autour de l'origine $x = y = 0$ et telle que $f(x\,,x)$ ne soit pas identiquement nul; on obtient toutes les fonctions $\varphi(x\,,y)$ permutables avec elle et analytiques autour de l'origine en formant tous les développements formels

$$\sum_0^\infty{}_n \, a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x\,,y), \tag{1}$$

les constantes $a_0\,, a_1\,, \dots, a_n\,, \dots$ étant arbitraires sous la seule condition que le développement

$$\sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \, c_{p,q} \, x^p \, y^q , \tag{2}$$

[1] Rend. R. Accad. Lincei, 2ième sem. 1913, page 649.

obtenue en ordonnant les termes de la série (1) *suivant les puissances de* x *et de* y, *représente une fonction analytique autour de l'origine. Cette fonction sera* $\varphi(x, y)$.

Il est possible de mettre sous une forme bien plus simple la condition ainsi imposée aux $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Je me restreindrai pour cela au cas où $f(x, y)$ est du premier ordre autour de l'origine, et je supposerai même (ce n'est pas une restriction) comme on le fait souvent, que $f(x, x) = 1$.

Les differentes puissances symboliques de f sont alors susceptibles de développements de la forme

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p\, (y-x)^p\, g_p^{(n)}(x),$$

les $g_p^{(n)}(x)$ étant des fonctions analytiques de x dans un certain cercle autour de $x = 0$. Nous aurons besoin d'une limitation des $|g_p^{(n)}(x)|$: par des calculs trop longs pour les reproduire ici, on peut prouver l'existence de deux nombres α et r tels que,

$$\text{pour} \quad |x| \leq \alpha, \quad \text{on ait } |g_p^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{r^p}.$$

Considérons alors l'identité, dont on a précisé le sens plus haut:

$$\sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q\, c_{p,q}\, x^p y^q = \sum_0^\infty{}_n\, a_n\, \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y);$$

en y faisant $x = 0$, elle ne doit pas cesser d'être satisfaite. Il vient donc

$$\sum_0^\infty{}_q\, c_{0,q}\, y^q = \sum_0^\infty{}_n\, a_n \frac{y^n}{n!}\left(1 + \sum_1^\infty{}_i\, y^i \gamma_i^{(n)}\right)$$

avec

$$\gamma_i^{(n)} = g_i^{(n)}(0);$$

d'où

$$\frac{a_q}{q!} = c_{0,q} - \sum_1^q{}_i \frac{a_{q-i}}{(q-i)!}\gamma_i^{(q-i)} \qquad (3)$$

$$(q = 0, 1, \ldots \infty).$$

Mais on a

$$|\gamma_i^{(q-i)}| < \frac{1}{r^i};$$

on peut toujours supposer, en réduisant au besoin la valeur de r, que

$$|c_{0,q}| < \frac{\text{N}}{r^q};$$

on déduit alors, des formules (3), que

$$|a_q| < \mathrm{N}\, q!\left(\frac{2}{r}\right)^q .$$

Mais puisque

$$|\overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y)| < \mathrm{M}^{n+1}\frac{|y-x|^n}{n!}\,,$$

c'est dire que la série (1) converge absolument et uniformément et représente $\varphi(x\,,y)$ pour x et y suffisamment voisins de zéro. Ce résultat n'est en rien modifié si je laisse tomber l'hypothèse $f(x\,,x)=1$. Je puis donc dire:

I. *$f(x\,,y)$ étant analytique autour de l'origine, toute série*

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y)\,,$$

où les a_n sont des constantes telles que la série

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{n!} z^n$$

représente une fonction analytique de z, converge absolument et uniformément pour x et y assez voisin de zéro et représente une fonction analytique permutable avec $f(x\,,y)$.

II. *Réciproquement, on obtient toutes les fonctions $\varphi(x\,,y)$ analytiques autour de l'origine et permutables avec une fonction $f(x\,,y)$ du premier ordre par des développements du type précédent.*

2. Cette réciproque répond, et très simplement, à la question: trouver toutes les fonctions analytiques permutables avec $f(x\,,y)$.

Les conséquences en sont nombreuses: je citerai en particulier les résultats énoncés au § 4 de ma précédente Note. En voici une autre: comme la convergence d'une série du type précédent

$$a_0 f(x\,,y) + a_1 \overset{\star}{f}{}^2(x\,,y) + \cdots + a_n \overset{\star}{f}{}^{n+1}(x\,,y) + \cdots$$

dépend du module de la différence $y-x$, *une fonction $\varphi(x\,,y)$, permutable avec $f(x\,,y)$ et analytique autour de l'origine* [1], *sera aussi analytique au voisinage de tout point de la multiplicité $x=y$ qui n'est pas un point singulier de $f(x\,,y)$*. Les zéros de $f(x\,,x)$ ne seront pas, comme on pouvait avoir d'autre part motif de le penser, des points singuliers de φ.

3. Il est intéressant de savoir si l'on peut donner, pour les fonctions de variables réelles continues et permutables avec $f(x\,,y)$, des développe-

[1] Et l'origine ne joue pas un rôle particulier.

ments non pas de type (1), mais ayant, avec les développements de type (1), le même rapport que les séries entières avec les séries de polynomes. Je me contente ici d'énoncer les résultats que j'ai obtenus.

En s'appuyant d'une part sur les résultats précédents, d'autre part sur les formules données par M. Volterra pour trouver toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$, on prouve que:

I. *$f(x, y)$ étant une fonction analytique et du premier ordre au voisinage de l'origine, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ continues par rapport aux variables réelles x et y, définies dans le voisinage de l'origine et y étant permutables avec $f(x, y)$, peuvent être développés en série uniformément et absolument convergente de polynômes des puissances symboliques de f. On a*

$$\varphi(x, y) = \sum_0^\infty {}_n \left(a_0^{(n)} f(x, y) + a_1^{(n)} \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \cdots + a_p^{(n)} \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y)\right).$$

II. *On peut définir pour ces fonctions $\varphi(x, y)$, des polynômes de meilleure approximation jouant dans cette théorie le rôle des polynômes de Tchébicheff dans la théorie des fonctions d'une variable et jouissant de propriétés analogues.*

4. Indiquons, en terminant, un point de vue sous lequel il est intéressant d'envisager les fonctions permutables: on peut considérer l'étude des fonctions permutables avec une fonction donnée comme généralisant l'étude des fonctions d'une variable, car on obtient l'ensemble des fonctions d'une variable $(y - x)$ en envisageant toutes les fonctions permutables avec l'unité. Il y a donc lieu de chercher à étendre aux fonctions permutables avec une fonction donnée, les propriétés des fonctions d'une variable. C'est ce que nous avons fait pour certaines de ces propriétés.

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Meccanica. — *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica.* Nota del prof. T. BOGGIO, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geografia-fisica. — *Seconda relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale* (lavori compiuti dal 5 novembre 1913 al 31 marzo 1914), trasmessa al PRESIDENTE dal capo della spedizione dott. FILIPPO DE' FILIPPI.

Il Presidente BLASERNA dà comunicazione della seguente lettera, con la quale il dott. DE FILIPPI accompagna la Relazione più sotto riportata:

Leh, Ladakh (Kashmir), 27 marzo 1914.

Illustre Professore,

Le faccio trasmettere la seconda Relazione sui nostri lavori, colla preghiera di comunicarla alla Reale Accademia dei Lincei.

La spedizione continua a procedere benissimo, e tutti i componenti lavorano con tutte le loro forze, con assoluta abnegazione e con zelo inalterato per assicurarne il buon successo.

La prego di gradire i saluti e l'espressione della devozione di tutti noi, e mi abbia sempre per suo

affezionatissimo
FILIPPO DE FILIPPI.

Nella passata relazione è menzionato il progetto di eseguire una stazione di osservazioni geofisiche a sud di Skardu, nella catena di monti che circoscrive da questo lato il grande altipiano Deosai. Questo progetto venne realizzato fra il 6 ed il 17 novembre, con esito felicissimo. La stazione fu fatta a Wozul Hadur, un piccolo terrazzo nella valletta del Burgi La, a 4270 metri di altezza, oltre il quale la ripidezza della gola e la neve profonda non avrebbero dato modo di piantare le tende.

Le osservazioni gravimetriche vennero eseguite sotto una grande tenda a triplice parete che era stata appositamente studiata e costruita in Europa, e che si dimostrò bene adatta allo scopo. Ad esse seguirono le osservazioni magnetiche; ed inoltre vennero fatte regolarmente letture barometriche ed ipsometriche, lanci di palloni piloti seguìti col teodolite, e determinazioni della intensità della radiazione solare coi pireliometri di Abbot e di Ångström.

Oltre ai lavori fotografici di sussidio per il rilevamento topografico del luogo di stazione, nei giorni 8 e 12 novembre vennero fatti panorami telefotografici delle catene del Karakoram da una vetta ad oriente del Burji La, alta 5060 metri, e determinazioni angolari delle vette più importanti per servire alla loro identificazione.

Tornata a Skardu la spedizione, il comandante Alessio ed il prof. Abetti fecero subito la stazione gravimetrica. A questa seguì un periodo di dodici giorni di trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo da Lahore, ricevuti e registrati simultaneamente dall'Ufficio trigonometrico di Dehra Dun ed a Skardu. Le segnalazioni erano precedute e seguìte da osservazioni stellari per la determinazione del tempo. Nella precedente relazione è stato fatto cenno delle esperienze preliminari in questo campo, eseguite fin dall'ottobre.

I risultati di questa prima serie, sebbene sufficienti per assicurare una buona determinazione di differenza di longitudine fra Dehra Dun e Skardu, rivelarono tuttavia certe irregolarità nella percezione dei segnali delle quali era interessante di indagare le cause, sia che fossero da riferirsi al tipo di apparecchio ricevitore adoperato (ricevitore per siluranti della R. Marina italiana), oppure a condizioni particolari e variabili della atmosfera nelle regioni attraversate dall'onda hertziana, o ad entrambi questi fattori.

La presente spedizione, per la grande varietà di luoghi, di distanze, di condizioni topografiche e di stagioni in cui deve necessariamente trovarsi nel corso della sua esecuzione, offre opportunità eccezionali per questo studio. Perciò gli osservatori proposero, ai competenti uffici del Governo dell'India, un esteso programma di esperimenti da eseguirsi in diverse epoche e stazioni, colla speranza che questi, oltre a servire allo scopo di determinare le differenze di longitudine delle dette stazioni con Dehra Dun, conducano a qualche conclusione intorno ai fattori che possono influenzare la trasmissione radiotelegrafica attraverso estese zone montuose. Nello stesso tempo, per esser messi in grado di studiare la questione in tutti i suoi aspetti, veniva rivolta al R. Istituto idrografico di Genova la domanda di un ricevitore elettrolitico Ducretet. L'Istituto, colla consueta larghezza dimostrata sempre nel fornire alla spedizione i mezzi di lavoro, provvide subito all'invio dell'apparecchio richiesto, nel mentre la stazione di Lahore veniva autorizzata ad eseguire integralmente l'intiero programma di trasmissioni proposto, e l'Ufficio trigonometrico di Dehra Dun consentiva a prestare l'opera dei suoi valenti ufficiali per cooperare a tutte le serie di esperimenti.

Nelle ultime settimane del 1913 vennero fatte le osservazioni astronomiche per la determinazione della latitudine, e la misura della base per il rilevamento topografico del bacino di Skardu. Si profittò di questa occasione per adoperare e verificare i quattro fili di metallo *invar* di cui è fornita la spedizione per la misura delle basi e per istruire il personale nel loro uso.

Il gennaio 1914 fu tutto occupato da lavori topografici e dalla determinazione della variazione magnetica diurna (forza e declinazione), preceduta e seguìta da osservazioni degli elementi magnetici assoluti.

Durante tutta la permanenza della spedizione a Skardu, il marchese Venturi-Ginori raccolse regolarmente i dati meteorologici tre volte al giorno. L'inverno fu meno freddo di quello che si poteva prevedere. Verso la fine di dicembre si ebbe un periodo di pochi giorni rigidi, nei quali la temperatura scese a — 16°,7 C. La temperatura minima osservata nel gennaio fu appena di — 13° C. L'aria fu sempre perfettamente calma; si ebbero cadute di neve abbastanza frequenti, ma sempre in piccola quantità. Il cielo fu spesso coperto, soprattutto nel gennaio, ostacolando i lavori topografici, i lanci di palloni piloti e le determinazioni della radiazione solare (pireliometri di Ångström, di Abbot e di Amerio).

L'inverno mite, e senza burrasche, permise al prof. Dainelli di compiere lunghe ed importanti escursioni geologiche. Nel novembre egli esplorò il bacino di Skardu; nel dicembre visitò la valle Shigar ed i due rami da cui trae origine, la valle Braldoh e la Basha, e potè studiare le fronti di alcuni fra i più grandi ghiacciai dei Karakoram, il Biafo, il Baltoro ed il Chogo Lungma; nel gennaio risalì la valle Shyok dal suo bosco nella valle dell'Indo fino a Biandong, nel Ladakh, ed al ritorno si inoltrò su per le valli Saltoro e Kondus fino ai ghiacciai.

Il Dainelli ebbe così campo di compiere estese osservazioni intorno alla stratigrafia, alla tectonica ed alla morfologia glaciale. Egli inoltre ha raccolto gli elementi per uno studio delle popolazioni del Baltistan. Queste indagini, e quelle fatte di poi nel Ladakh, sia modificando talune delle idee oggi prevalenti intorno alla geologia della regione, sia col contributo di nuovi elementi, varranno a tracciare un quadro generale delle naturali condizioni del Baltistan e del Ladakh, mentre d'altra parte le ricerche sistematiche, che sulle genti egli ha fatto, serviranno per lo studio antropogeografico delle regioni stesse e per fissare i caratteri e l'abitato dei varî tipi etnici che vi sono rappresentati.

Queste escursioni del Dainelli dimostrarono, fra l'altro, anche la facilità con cui si può viaggiare per queste valli nel cuore dell'inverno, e permisero alla spedizione di anticipare la partenza da Skardu senza preoccuparsi della stagione. Nel febbraio, dal 2 al 14, venne fatta ancora una serie di trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo, e subito dopo, il giorno 16, la spedizione lasciava Skardu, e risaliva la valle dell'Indo sulla via già percorsa nell'ottobre, poi quella del Suru, giungendo il 21 a Kargil (2670 metri), capoluogo di un distretto omonimo, compreso fra Baltistan, Zanskar e Ladakh.

A Kharmang, quattro tappe sopra Skardu, si trovò l'Indo gelato da riva a riva, con uno strato di ghiaccio abbastanza spesso da reggere uomini e cavalli. Da questo punto in poi si incontrano sempre più frequenti questi

ponti naturali, i quali permettono scambî e rapporti fra villaggi delle due rive del fiume che sono intieramente isolati in ogni altra stagione. Il Dainelli approfittò di questa facilità di comunicazioni per visitare un tratto della valle dell'Indo compreso fra la confluenza del Suru e quella dell'Haun, raramente, se pur mai, percorso da viaggiatori. Questa escursione gli diede modo di raccogliere osservazioni e dati antropologici e sociali di certe isole di popolazione darda che qui ha conservato con maggior purezza i proprî caratteri etnici. Anche la gente ladakha propriamente detta è argomento di studio, sia per trarne elementi comparativi cogli altri gruppi etnici, sia per portare un contributo alla conoscenza di questi stessi popoli.

La spedizione si fermò a Kargil dieci giorni, compiendovi le solite osservazioni di gravità, magnetismo, meteorologia ed aerologia, ed un'altra serie di trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo. Qui, il 25 febbraio, si osservò la temperatura più bassa, di — 20° C, e si ebbero le più forti nevicate, dovute senza dubbio alla vicinanza della catena dell'Imalaia, la quale condensa la più gran parte della umidità atmosferica nelle correnti aerèe provenienti da mezzogiorno e da occidente.

Il 5 marzo, sotto una fitta nevicata, la carovana lasciava Kargil, e, valicati il Namika La (3965 metri) ed il Fotu La (4095 metri), giungeva il terzo giorno a Lamayuru, nel Ladakh (metri 3426), luogo scelto per un'altra stazione di studî geofisici e di trasmissioni radiotelegrafiche, che si eseguirono fra l'8 ed il 18 marzo.

In questo mentre il prof. Dainelli, il tenente Antilli ed il marchese Venturi-Ginori compievano un giro interessantissimo per paesi e monasteri ladakhi fuori della via ordinariamente battuta dai viaggiatori, raccogliendo molte illustrazioni di questo paese strano ed originale come nessun altro.

Il tenente Antilli ha già messo insieme un abbondante materiale che illustra tutta la via percorsa dalla spedizione. Nel Baltistan egli ha eseguito numerose fotografie, telefotografie e panorami per ritrarre valli e catene di monti, paesi, tipi e costumi delle genti, riprodotti anche con varie cinematografie. Il Ladakh offre argomenti anche più varii e più interessanti al fotografo, perchè qui i monumenti di passate grandezze, le fantastiche costruzioni monastiche che coronano ogni sporgenza rocciosa, i curiosi simboli religiosi di cui è cosparso tutto il paese, si disposano alla scena di natura e ad essa le conferiscono un carattere particolarissimo. I costumi della popolazione, le scene sociali e soprattutto quelle religiose forniscono soggetti nuovissimi e di grande interesse etnico per il cinematografo.

La fotografia fu poi costantemente adoperata come sussidio ai lavori topografici delle stazioni geofisiche, e si fa molto assegnamento su di essa per completare il rilevamento del terreno nelle regioni da esplorare. Un'altra parte della illustrazione ha per scopo la documentazione geologica ed antropologica; ed in questi campi, anche il Dainelli ha messo insieme molto materiale.

Per assicurare il buon successo dei lavori fotografici, si è sempre sviluppato il materiale sensibile impressionato ogni volta che è stato possibile. Per questo scopo il tenente Antilli ha impiantato un laboratorio fotografico a Dras, Tolti, Skardu, Kargil e Leh, e non ostante le difficoltà causate dai locali disadatti, dalle basse temperature, dalla scarsità o dalla torbidezza dell'acqua occorrente per i lavaggi ecc., ha potuto sempre condurre a termine felicemente il suo lavoro.

L'intiera spedizione era di nuovo riunita insieme a Leh (3510 metri) il 22 marzo. Il dottor De Filippi vi aveva preceduto i compagni venti giorni prima, per radunare le provviste e far procedere il trasporto. La quantità di provviste che si è dovuta raccogliere per alimentare uomini ed animali da carico da Leh in poi e nella lunga permanenza che la spedizione dovrà fare nelle regioni desertiche del Karakoram, supera le cinquanta tonnellate; ad essa sono da aggiungere i viveri per gli europei e tutto il materiale scientifico e da campo, onde si devono impiegare molte centinaia di coolies e di animali (cavalli e yäks), per il trasporto.

Per buona fortuna della spedizione, l'antica via fra Leh ed il Karakoram, per il passo Khardong, la valle Nubra ed il Sasir La, difficile ed aperta soltanto in luglio, è ora sostituita da una nuova via, non per anco del tutto finita, ma percorribile fin da ora dalle carovane, la quale traversa la catena Kilas per il Chang La, e risale poi la valle Shyok fino ai piedi dell'altipiano Depsang, dove si congiunge coll'antica via. Il Chang La, sebbene sia alto 5600 metri, è un valico facilissimo in condizioni ordinarie. In questa stagione è naturalmente carico di neve, nella quale s'è dovuta far battere una traccia da una grossa squadra di yäks e di coolies. Su questa hanno incominciato a traversare il colle le carovane di trasporto; ma un simile lavoro è reso possibile soltanto dalle eccezionali qualità di resistenza dei coolies e degli animali.

Il commissario inglese per il Ladakh, cap. Gabriel, il quale risiede nel Kashmir durante l'inverno, ha molto cortesemente messo a disposizione della spedizione il *bungalow* della residenza per alloggiarvi. Nel vicino *dak-bungalow* sono stati ordinati i varii laboratorii, disponendovi attorno la stazione meteorologica, quella astronomica e l'aereo della stazione radiotelegrafica ricevitrice. Sono in corso tutte le osservazioni già ripetutamente menzionate. I segnali radiotelegrafici vengono qui percepiti particolarmente forti e distinti.

Il prof. Dainelli si è di nuovo separato dai compagni il 27 u. sc., per compiere una lunga escursione ai confini del Tibet. Oltre ad estendere le sue ricerche sulle condizioni geologiche della regione, egli intende studiare nelle Rupshu un esempio di altipiano tibetano, e qualcuno almeno di quei tipici bacini chiusi, occupati da laghi salati, come il Tso Moriri ed il Panhkong. Inoltre egli avrà occasione di fare indagini sulla vita degli abitanti di

quelle alte plaghe, i Changpo, popolazione nomade e dedita unicamente alla pastorizia.

Appena compiuti i lavori a Leh, il comandante Alessio, il prof. Abetti ed il marchese Venturi-Ginori si recheranno sull'altipiano Rupshu, per fare una stazione gravimetrica a Moré, a 5061 metri di altezza. In questo stesso luogo, nel giugno del 1871, aveva fatto una determinazione gravimetrica il cap. J. P. Basevi, dell'Ufficio trigonometrico dell'India. Egli morì due mesi dopo, ed il calcolo delle sue osservazioni condusse a risultati così singolari, che non furono mai presi in considerazione dai geofisici, pur dando fondamento a qualche teoria molto discussa. È quindi opportuno di ripetere l'osservazione.

A Moré sarà pure impiantata una stazione meteorologica, e si faranno lanci di palloni piloti ed osservazioni pireliometriche. Inoltre verrà montata la stazione radiotelegrafica, coll'intento di sperimentarne una nuova possibile applicazione. I primi risultati ottenuti nelle determinazioni di differenza di longitudine per mezzo di segnali radiotelegrafici trasmessi colle speciali modalità adottate, sembrano infatti giustificare la speranza che il metodo, sia pure colle presenti semplicissime disposizioni, possa essere adoperato anche per determinare l'andamento dell'orologio nelle osservazioni di gravità relativa.

Il secondo gruppo dei membri della spedizione è ora in viaggio, ed arriverà a Leh negli ultimi giorni d'aprile. Esso è composto del maggiore Wood, dell'Ufficio trigonometrico dell'India, accompagnato da due topografi indiani; del prof. Marinelli, del prof. Alessandri e dell'ing. Spranger. Il prof. Amerio, colpito da grave lutto, si è trovato nella impossibilità di partire dall'Italia. La spedizione, mentre è dolente di perderne la collaborazione, è grata al prof. Alessandri, direttore dell'Osservatorio meteorologico del monte Rosa e della Stazione meteorologica del Magistrato delle acque di Venezia, di avere accettato di sostituirlo, sebbene mancassero pochi giorni alla data fissata per la partenza dall'Europa.

Si spera che la spedizione, così completata, possa lasciare Leh nei primi giorni di maggio.

Chimica. — *Palladosalicilati* (¹). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

R. Piria (²), facendo agire l'acido salicilico sul tartrato di rame sciolto in presenza di potassa caustica, ottenne un composto cristallizzato in lamelle verdi, solubile in acqua, insolubile in alcool, al quale egli attribuì la formula $Cu C_7 H_4 O_3 . K_2 C_7 H_4 O_3 . 4 H_2 O$ considerandolo come un sale doppio, risultante dall'unione di una molecola di salicilato basico di rame con una molecola di salicilato bipotassico. La soluzione acquosa di questo composto trattata con cloruro di bario, dà un precipitato verde cristallino al quale Piria attribuì la formula $Cu C_7 H_4 O_3 . Ba C_7 H_4 O_3 . 4H_2 O$.

Colle attuali idee sugli ioni complessi è ovvio di interpretare questi salicilati doppii come sali di un acido cuprisalicilico $Cu\begin{matrix}<O C_6 H_4 COOH \\ <O C_6 H_4 COOH\end{matrix}$; e come tali vennero considerati dal J. Wolff (³), che preparò il cuprisalicilato di sodio sciogliendo l'idrato rameico in una soluzione di salicilato sodico, e da H. Ley e O. Erler (⁵) che prepararono il cuprisalicilato di ammonio per azione dell'ammoniaca sul salicilato rameico.

Inoltre H. Ley e O. Erler, determinando il senso nel quale migra il rame nelle soluzioni dei cuprisalicilati durante il passaggio della corrente elettrica, confermarono che in questi composti il rame fa parte dell'anione.

Io mi sono occupato recentemente (⁴) di mettere in luce le analogie che esistono tra gli elementi del gruppo del platino e gli elementi metallici più comuni: e ho preparato l'acetilacetonato del rutenio trivalente, che è isomorfo, coll'acetilacetonato di alluminio; i rodimolibdati isomorfi coi cobalti molibdati, e l'acetilacetonato di palladio isomorfo coll'acetilacetonato rameico.

Continuando tali ricerche, mi parve interessante di studiare se il palladio poteva dare, con l'acido salicilico, composti analoghi a quelli che dà il rame.

Per azione del cloropalladito potassico sul salicilato potassico in presenza di $K_2 CO_3$ ho ottenuto il composto $Pd\begin{matrix}<O C_6 H_4 COOK \\ <O C_6 H_4 COOK\end{matrix} . 3 H_2 O$ cristallizzato in aghi. Esso differisce dal cuprisalicilato potassico, soltanto per una molecola di acqua. Analogamente ho preparato il palladosalicilato di sodio che cristallizza pure con tre molecole di acqua. Dalle soluzioni dei pallado-

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.

(²) Ann. d. Chemie und Pharm. *93*, 262 (1855).

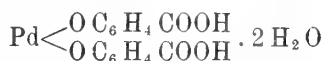
(³) Bull. Chim. de sucrerie et distillerie, XVIII, 1025 (1901).

(⁴) Z. f. anorg. Chem. 56 (1908) 404.

(⁵) Questi Rendiconti, XXIII, 1°, 334 (1914).

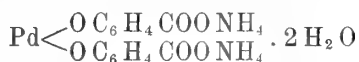
salicilati alcalini, per aggiunta di sali di calcio, bario, argento, ho ottenuto sotto forma di precipitati cristallini i palladosalicilati di calcio, bario e argento. Queste reazioni di doppio scambio confermano che il palladio in tutti questi composti fa parte dell'anione.

Se si acidifica la soluzione di un palladosalicilato alcalino con acido acetico, precipita l'acido palladosalicilico:

$$Pd<^{O\,C_6H_4\,COOH}_{O\,C_6H_4\,COOH} \cdot 2\,H_2O$$

che è poco solubile in acqua, ed abbastanza solubile in alcool.

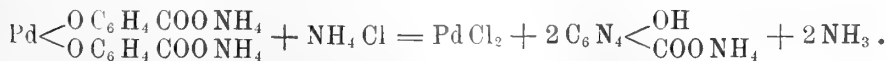
I cuprisalicilati vengono, invece, decomposti dall'acido acetico: l'acido cuprisalicilico non s' è potuto ottenere allo stato libero. Ciò prova che l'acido salicilico forma col palladio un complesso più stabile che non col rame.

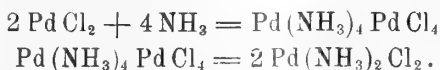
Speciale interesse presenta il palladosalicilato di ammonio

$$Pd<^{O\,C_6H_4\,COO\,NH_4}_{O\,C_6H_4\,COO\,NH_4} \cdot 2\,H_2O$$

che venne preparato per doppio scambio dal palladosalicilato di potassio con un eccesso di solfato ammonico, a freddo. Se invece del solfato s' impiega il cloruro ammonico, e si opera a caldo, si ottiene, invece del palladosalicilato di ammonio una sostanza violetta cristallizzata in aghi, la quale poi, continuando il riscaldamento, si trasforma in una polvere cristallina giallo-aranciata. Alla analisi, quest' ultima risultò essere cloruro di palladosammina $Pd(NH_3)_2 \, . \, Cl_2$. La sostanza violetta, che ha la stessa composizione della polvere giallo-aranciata, non è che il sale di Vauquelin, il cloropalladito di palladotetrammina $Pd(NH_3)_4\,PdCl_4$.

La formazione di queste sostanze è facilmente interpretabile.

Il palladosalicilato di ammonio, che si produce in un primo tempo per doppio scambio tra il palladosalicilato di potassio e il cloruro di ammonio, si comporta, rispetto ad altre molecole di cloruro d'ammonio, come un fenato di palladio, e dà origine alla seguente reazione:

$$Pd<^{O\,C_6H_4\,COO\,NH_4}_{O\,C_6H_4\,COO\,NH_4} + NH_4Cl = PdCl_2 + 2\,C_6N_4<^{OH}_{COO\,NH_4} + 2\,NH_3 \, .$$

L'ammoniaca — che si può considerare generata dall' idrolisi di un salicilato biammonico — reagisce tosto col cloruro palladoso, formando il sale di Vauquelin che a caldo diventa cloruro di palladosammina:

$$2\,PdCl_2 + 4\,NH_3 = Pd(NH_3)_4\,PdCl_4$$
$$Pd(NH_3)_4\,PdCl_4 = 2\,Pd(NH_3)_2\,Cl_2 \, .$$

Parte sperimentale.

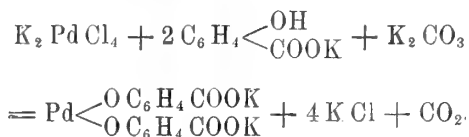
Palladosalicilato di potassio.

$Pd(OC_6H_4COOK)_2 . 3H_2O$.

In 20 cc. di acqua si sciolgono gr. 5 di carbonato potassico e gr. 5 di acido salicilico: si riscalda quasi fino all'ebullizione, poi si aggiunge, a goccia a goccia, la soluzione di 3 gr. di cloropalladito potassico in 15 cc. di acqua. Si ha un forte sviluppo di anidride carbonica, e si separa già a caldo una sostanza cristallina gialla che aumenta per raffreddamento. Si filtra alla pompa, e si lava con alcool.

La reazione che si produce è la seguente:

$$K_2PdCl_4 + 2C_6H_4{<}^{OH}_{COOK} + K_2CO_3$$

$$= Pd{<}^{OC_6H_4COOK}_{OC_6H_4COOK} + 4KCl + CO_2.$$

Il palladosalicilato di potassio è una polvere leggera giallo-camoscio costituita da cristalli microscopici aghiformi: è poco solubile in acqua a freddo, più solubile a caldo. La sua solubilità diminuisce in presenza di sali potassici. Per questo è bene di impiegare nella sua preparazione un eccesso di carbonato potassico. Le sue soluzioni, a freddo, imbruniscono lentamente; a caldo, rapidamente, con separazione di palladio metallico o di un salicilato basico nero.

Per dosare il palladio, si scaldò la sostanza in una navicella in corrente di acido cloridrico gazoso, che elimina tutto l'acido salicilico; poi in corrente d'idrogeno. Si asportò tutto il cloruro alcalino per lisciviazione con acqua, e infine si scaldò di nuovo in corrente di idrogeno il palladio residuo. Il carbonio e l'idrogeno vennero determinati bruciando la sostanza mista a bicromato potassico.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COOK)_2 . 3H_2O$		Trovato
Pd	20,88	20,98-20,70
K	15,30	15,35
C	32,88	32,96
H	2,76	2,81

Palladosalicilato di sodio
$Pd(OC_6H_4COONa)_2 . 3H_2O$.

Si prepara come il sale potassico, al quale rassomiglia. Siccome è abbastanza solubile in acqua, per avere un buon rendimento bisogna impiegare, nella sua preparazione, soluzioni molto concentrate.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COONa)_2 . 3H_2O$		Trovato
Pd	22,29	22,14
Na	9,61	9,98

Palladosalicilato di calcio
$Pd(OC_6H_4COO)_2Ca . 3H_2O$.

Si ottiene sotto forma di un precipitato cristallino giallo aggiungendo, a una soluzione concentrata di cloruro di calcio, una soluzione satura, a freddo, di palladosalicilato di sodio.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COO)_2Ca . 3H_2O$		Trovato
Pd	22,57	22,49
C	35,53	35,59
H	2,98	3,19

Palladosalicilato di bario
$Pd(OC_6H_4COO)_2Ba . 2H_2O$.

Precipitato giallo cristallino. Si ha dal palladosalicilato di sodio con acetato di bario.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COO)_2Ba . 2H_2O$		Trovato
Pd	19,33	19,31
Ba	24,88	24,76

Palladosalicilato di argento
$Pd(OC_6H_4COOAg)_2$.

Nelle soluzioni, anche diluite, dei palladosalicilati, il nitrato di argento produce tosto un precipitato giallo quasi insolubile in acqua, il quale, seccato

in stufa ad acqua fino a peso costante, diede all'analisi i seguenti risultati

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COOAg)_2$		Trovato
Pd + Ag	54,24	54,09
C	28,26	28,12
H	1,35	1,46

Acido palladosalicilico
$Pd(OC_6H_4COOH)_2 . 2H_2O$.

Le soluzioni dei palladosalicilati, per aggiunta di alcune goccie di acido acetico glaciale dànno un precipitato biancastro poco solubile in acqua, solubile in alcool, e, nelle soluzioni di carbonati alcalini, con colorazione rosso-aranciata. A differenza dei suoi sali, l'acido palladosalicilico imbrunisce alla luce.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COOH)_2$		Trovato
Pd	25,61	25,73
C	40,32	40,12
H	2,90	3,1

Palladosalicilato di ammonio
$Pd(OC_6H_4COONH_4)_2 . 2H_2O$.

Gr. 5 di palladosalicilato di potassio, sciolti a freddo nella minor quantità possibile di acqua, vennero aggiunti ad un egual volume di soluzione satura, a freddo, di solfato di ammonio. Si ebbe un precipitato cristallino giallo-chiaro che venne tosto filtrato alla pompa e seccato tra carta.

Calcolato per $Pd(OC_6H_4COONH_4)_2 . 2H_2O$		Trovato
Pd	23,67	23,8
C	37,27	37,28
H	4,47	4,70
N	6,21	6,12

Il palladosalicilato di ammonio, introdotto in una soluzione concentrata di cloruro di ammonio, dà origine ad una sostanza cristallizzata in sottili aghi violetti che non contiene acido salicilico e che all'analisi risultò essere il sale di Vauquelin.

Calcolato per $Pd(NH_3)_4PdCl_4$		Trovato
Pd	50,42	50,31
N	13,24	13,12
Cl	33,52	33,41

Se ad una soluzione bollente di cloruro di ammonio si aggiunge palladosalicilato di potassio, precipita, dopo alcuni minuti, una polvere cristallina giallo-aranciata che è il cloruro di palladosammina.

	Calcolato per $Pd(NH_3)_2Cl_2$	Trovato
Pd	50,42	50,39
Cl	33,52	33,48

Biologia. — *Risultati di ricerche sul tubo digerente del « Limulus »*. Nota del dott. Giulio Cotronei [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Nell'ottobre del 1910, trovandomi a lavorare alla Stazione zoologica di Napoli, ebbi la fortuna di poter usufruire di un discreto numero di esemplari viventi di *Limulus polyphemus*, per gentile interessamento del prof. Attilio Cerruti. Raccoglievo del materiale di crostacei per lo studio del così detto epato-pancreas, che mi proponevo di fare come continuazione di mie ricerche sul pancreas; e gli esemplari di *Limulus* mi dovevano servire per uno studio comparativo. Iniziai subito le mie ricerche; ma dalla lettura della bibliografia e dai risultati che andavo ottenendo fui indotto a studiare minuziosamente la condizione istologica e soprattutto le associazioni cellulari, osservate nel digestorio del *Limulus*.

I risultati delle mie osservazioni fanno parte di una Memoria in esteso, accompagnata da numerose figure illustrative. In attesa pertanto della stampa della Memoria, mi limito a riassumere alcuni risultati.

Nelle mie ricerche mi son proposto di studiare la complicazione strutturale, e quindi la condizione presentata dalla differenziazione e dalla maniera di associarsi dei differenti tessuti nelle varie parti del tubo digerente.

Ho distinto successivamente nel mio studio: 1°, le regioni nelle quali si trova sviluppato un forte strato di chitina (esofago, proventricolo, valvola, parte terminale dell'intestino); 2°, la parte del tubo digerente nella quale manca lo spessore chitinoso; 3°, i condotti della glandola enterica; 4°, i tuboli terminali della glandola.

Nel descrivere le varie parti chitinose, si deve tener conto dello sviluppo e dello spessore dei varii organi; in questa Nota riassuntiva mi limito però a descrivere i risultati della complicazione strutturale del proventri-

[1] Lavoro iniziato sotto la direzione del prof. Ruffini e compiuto nell'Istituto di anatomia comparata della R. Universita di Roma diretto dal prof. B. Grassi.

colo, dove si distinguono tre parti: una anteriore, una media e una posteriore.

Nella parte media del proventricolo la costituzione anatomica delle pieghe chitinose assume un carattere particolare, che non ritroveremo in nessuna delle altre regioni, tipicamente chitinose, del tubo digerente del *Limulus*. Le pieghe longitudinali diventano più salienti, e ognuna si frastaglia come in tanti dentelli sollevati.

Nella parte posteriore, come nella parte anteriore, le pieghe longitudinali perdono un'altra volta la dentellatura. Nello studio istologico dobbiamo distinguere lo strato chitinoso, le cellule (epitelio) chitinogene, poi il tessuto connettivo e il tessuto muscolare.

Nella struttura della chitina si distinguono nettamente tre strati: uno strato interno, ossia in rapporto con il lume del tubo; uno strato medio, formato da numerose lamelle, e uno strato esterno. Lo strato interno si presenta differente dagli altri, perchè assume più intensamente i colori. Con l'ematossilina ferrica di Heidenhain appare colorito in nero più degli strati sottostanti; ma se si decolora ulteriormente, e si colora con eosina, si distinguono due parti: una più interna, che appare omogenea, e una che assume più intensamente l'eosina e che si presenta striata, come se fosse fatta di tanti pezzi posti lateralmente.

Lo strato medio della chitina è molto interessante: si compone di tante lamelle successive, le quali non mostrano affinità pei colori; tuttavia, con l'opportuno impiego del metodo Heidenhain, si riscontra che le lamelle non hanno una struttura omogenea; ognuna di esse si compone di tanti pezzi disposti parallelamente, l'uno accanto all'altro. Nelle lamelle successive, in quelle sovrapposte o sottoposte, si riscontra che i pezzi costituenti si sovrappongono con un certo ordine; ad un esame ulteriore si riesce ad osservare che quelli di una lamella possono formare angolo con quelli delle lamelle contigue, conservando però la direzione del piano. Lo strato inferiore è costituito da lamelle di uno spessore assai minore, nelle quali non si riesce a scorgere la struttura sopradescritta. A contatto con l'epitelio sottostante, la chitina di tratto in tratto manda degli infossamenti i quali hanno richiamato la mia attenzione. L'epitelio chitinogeno in rapporto con questa disposizione della chitina si presenta tutto pieghettato, con tante rientranze e salienze. Dove la chitina si invagina, compresa tra le cellule dell'epitelio, nel fondo si riscontra una diretta continuazione tra le fibrille delle cellule chitinogene, le fibrille del connettivo sottostante e le fibrille che formano la chitina e che risalgono, per continuarsi e disporsi nello strato inferiore lamellare della chitina sopra descritta.

Il tessuto connettivo sottostante all'epitelio è riccamente fibrillare; e le fibrille, pure intrecciandosi, mostrano chiaramente una direzione nel senso delle gittate chitinose. Nei miei preparati si dimostra chiaramente che le

fibrille attraversano le cellule epiteliali: non si scorge però una distinzione tra la fibrilla connettiva allorchè si trova fuori della cellula epiteliale, dalla fibrilla che si trova nella cellula epitaliale e quella che si trova nella chitina: possiamo ritenere che la struttura fibrillare attraverso il tessuto connettivo, quello epiteliale e nella sostanza chitinosa si presenti omogenea, almeno con i metodi da noi adoperati.

Dove le fibrille del sottostante connettivo si dispongono in maggior numero a inserirsi o, meglio, a continuarsi nella chitina, sembra che le cellule epiteliali siano mancanti: in altre parole, la continuazione fibrillare avverrebbe non attraverso le cellule epiteliali, ma attraverso interruzioni dell'epitelio: quest'osservazione, che tenderebbe a ripetere una questione che da lunghi anni si agita circa l'inserzione dei muscoli sulla chitina, ha un valore limitato: difatti, se osserviamo le cellule immediatamente vicine ai più ricchi punti di inserzione, si riesce a scorgere nuclei di cellule epiteliali tra le fibrille che si continuano con quelle connettive. Piuttosto, l'osservazione riferita ha valore in quanto tende a farci riconoscere anche in questo genere di studî l'influenza funzionale sulla forma, o, come io preferisco dire, le caratteristiche funzionali della forma. Dove si riscontra, difatti, una più intima unione delle fibrille connettive (vedremo tra poco che lo stesso si può ritenere per l'inserzione dei muscoli) con le fibrille chitinose, la struttura dominante dev'essere certamente una struttura di connessione e spariscono i limiti cellulari: la forma dell'epitelio difatti si riconosce assai meglio a misura che ci allontaniamo dal fondo delle rientranze chitinose: la struttura delle cellule appare meno fibrillare; e dove le cellule tendono a mettersi a contatto con lo strato inferiore lamellare della chitina, ossia là dove risalgono le cellule epitaliali, per quanto i limiti fra esse siano sempre difficili a discernere, tuttavia sono ben differenziate dal tessuto connetttivo sottostante: inoltre non si osserva una continuazione fibrillare con la chitina sovrastante; le mie osservazioni mi obbligano dunque a limitare la continuazione fibrillare, e quindi l'associazione strutturale in determinati punti dello strato epiteliale.

Non meno interessanti e in accordo colle osservazioni ora riferite sono le ricerche sui rapporti delle fibre muscolari con le formazioni precedentemente descritte. Son note le discussioni e le osservazioni contradditorie intorno alla dibattuta questione sull'inserzione delle fibre muscolari sulla chitina. Le fibre muscolari, secondo alcuni, autori si inseriscono direttamente; secondo altri indirettamente. Nelle mie osservazioni (mi riferisco sempre al proventricolo) ho potuto seguire direttamente talvolta la fibra muscolare fin su la chitina; ho osservato che essa si risolve in fibrille che si continuano con fibrille chitinose. Dove sia la regione di transizione non è possibile di accertare: certo è che, pur perdendo la striatura trasversale, si riesce direttamente a

seguire questa continuità fibrillare, là dove la fibra muscolare si mette in rapporto con le rientranze chitinose: è ancora da osservare che, come ho notato per i rapporti connettivali, anche queste comunicazioni fibrillari avvengono generalmente là dove la chitina tende ad affondarsi, ed a stabilire più tenaci rapporti con i tessuti sottostanti. Questa estrema vicinanza della terminazione muscolare con lo strato chitinoso non è generale: per lo più la fibra muscolare, perduta la striatura trasversale, si risolve in fibrille le quali si associano con quelle del connettivo fibrillare circostante; si riesce però a seguire la continuazione di queste fibrille fin sugli infossamenti chitinosi, e così dalle fibrille, che possiamo ritenere divenute tipicamente chitinose, fin nello strato lamellare inferiore della chitina. Anche in questo caso va ripetuto che di fronte alle reazioni istologiche non si riscontra nessuna differenza nelle diverse parti delle fibrille, che andiamo ora seguendo. Dove le fibrille, da me poco innanzi descritte come di natura connettivale, e che rappresentano l'intima unione con le fibrille che vanno alla chitina, sono in maggior numero, si può ritenere che rappresentino i rapporti con le fibre muscolari sottostanti, attraverso le varie modificazioni strutturali.

Esaminate, così, brevemente le più importanti associazioni cellulari del proventricolo, mi limito a riassumere i miei risultati nelle altre regioni del tubo digerente. Nell'intestino medio la struttura si presenta notevolmente differente. Subito dopo la valvola di comunicazione col proventricolo, manca lo strato chitinoso (tralascio qui la questione se la cuticola dell'epitelio possa essere di natura chitinosa; rimando il lettore al recentissimo lavoro di D. H. Wester, 1914).

Le cellule dell'epitelio dell'intestino medio (epitelio colonnare di Pakard) sono più alte di quelle dell'epitelio chitinogeno; l'epitelio poggia sopra una basale caratteristica. Si tratta di uno strato di notevole spessore, che non si riscontra nell'intestino chitinoso (ciò convalida la differenza strutturale). Avendo applicato allo studio delle questioni istologiche, che mi interessavano, varî metodi di tecnica, mi è stato dato di osservare, con il metodo di Bielschowsky-Levi su materiale fissato in liquido di Flemming, la continuazione delle fibrille connettive in questa zona basale. Con i comuni metodi di colorazione, tale studio non si presenta agevole; ma il metodo indicato riesce a far osservare la continuazione di fibrille connettive nella zona basale apparentemente omogenea. La struttura del connettivo [1] sottostante all'epitelio è fibrillare; e le fibrille, intrecciandosi, continuano fin sotto l'epitelio nella basale suddetta. Queste osservazioni si riesce poi a controllarle con il metodo di Heidenhain. Nella struttura delle cellule epiteliali si ri-

[1] Quando io parlo di tessuto connettivo nel *Limulus*, fa d'uopo ricordare che negli Artropodi si tratta di un tessuto connettivo « *sui generis* ».

scontrano, sia con l'impregnazione, sia con colorazione opportuna, fibrille che si svolgono nella direzione nella massima lunghezza cellulare, le quali sono in rapporto con le fibrille che compongono la basale. Lo strato, abbastanza spesso, della basale, rende però difficile lo studio dei rapporti tra le fibrille proprie delle cellule epiteliali e quelle della basale.

Anche nell'intestino medio la muscolatura è molto sviluppata; meno compatta, però, che non nell'intestino chitinoso. Il modo da associarsi fra di loro delle fibre muscolari sarà descritto nel lavoro completo; qui mi limito ad accennare che il metodo Bielschowsky-Levi mi è servito egregiamente per lo studio del sarcolemma: laddove il connettivo forma una rete tra le fibre muscolari, si osserva nettamente che il sarcolemma si presenta come una diretta continuazione del connettivo.

Nell'intestino medio, in qualche parte, mi è stato dato di trovare sul rivestimento della parete un tessuto che si trova in vicinanza dei vasi sanguigni. Questo tessuto presenta i seguenti caratteri: da un tessuto fibrillare si passa a un tessuto costituito da tanti gruppi cellulari, limitati qui e lì da uno stroma: le cellule che presentano nuclei rotondi sono riccamente granulose, e non si distinguono bene i limiti cellulari. Questo tessuto non è da confondersi colle varie forme di tessuto connettivo da me osservate nè con quelle che si riscontrano sotto l'epitelio dell' intestino medio, che pure è ricco di corpuscoli sanguigni. Io non mi pronunzio sulla significazione e sull'importanza di questo tessuto.

La struttura dei condotti del così detto epatopancreas ce lo fa apparire come una diretta continuazione dell'intestino medio; a misura che dai condotti di più grosso calibro si digrada in quelli di calibro minore, va sempre diminuendo lo strato muscolare.

I tuboli terminali della glandola enterica si presentano tutti compresi fra un tessuto connettivo: questo forma come tante lacune tra una rete su le cui maglie si riscontrano qui e lì gruppi di cellule o cellule isolate che non formano uno strato continuo: si riscontrano anche granuli che si colorano coll'acido osmico. Le cellule glandulari poggiano su una basale in rapporto colla rete descritta, e sono di due sorta: in maggior numero presentano grossi vacuoli e contengono granuli osmiofili; vi sono poi cellule in numero assai minore, con vacuoli più piccoli, completamente riempiti da grossi granuli.

Le ricerche, che ora ho brevemente riassunte, si collegano, nei varii punti trattati, con gli studî di Biedermann, il noto fisiologo comparato che con tanta competenza si è occupata della struttura fisica della chitina, cogli studî di Holmgren, con quelli di Grobben e con una estesa letteratura dove, più o meno frammentariamente, si trovano trattate le varie questioni; è sopra tutto da ricordare che nel *Limulus* Ray-Lankester nel 1884 descrisse com-

plessivamente, con l'espressione « Skeleto-trophic tissues », varii tessuti di natura connettivale: queste varie forme non sarebbero che il modellarsi, con maggiori o minori modificazioni, del tessuto dell'endosternite: l'illustre zoologo inglese ammise per questi tessuti una natura chitinosa.

Le mie ricerche sul *Limulus*, illustrando i rapporti cellulari dei varii tessuti, rappresentano un contributo, dal punto di vista dell'istologia e della fisiologia comparata, sui problemi delle associazioni cellulari degli Artropodi: per una più ampia relazione e per la discussione rimando il lettore al lavoro completo.

Parassitologia. — *Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite.* Nota del dott. M. Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

Batteriologia. — *L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici.* Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio A. Naccari, relatore, a nome anche del Socio A. Stefani, legge una relazione sulla Memoria del prof. Camillo Negro, intitolata: *Ricerche sperimentali di elettrofisiologia sull'azione che esercitano sui nervi motori della rana le scariche elettriche a basso potenziale, ottenute a circuito aperto dai singoli poli di coppie voltaiche*, concludendo col proporre l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Eguale proposta di pubblicazione è presentata dal Socio B. Grassi, relatore, a nome anche del Socio E. Marchiafava, per la Memoria del dott. Ugo Cerletti, avente per titolo: *Sulla struttura della Nevroglia.*

Le conclusioni delle Commissioni predette, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte dei seguenti Soci stranieri: Filippo van Tieghem, mancato ai vivi il 28 aprile 1914; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Botanica*, sino dal 21 agosto

1905; — e GIORGE WILLIAM HILL, mancato ai vivi il 16 aprile 1914, faceva parte il defunto dell'Accademia, per la *Meccanica*, sino dal 27 luglio 1913.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste una Relazione del Socio DE STEFANI sul XII Congresso internazionale di Toronto, intitolata: *Le recenti teoriche americane*, e l'opera del prof. A. BÉGUINOT : *Flora Padovana.*

CONCORSI A PREMI

Il PRESIDENTE annuncia che il dott. PIRRO ZANOTTI, ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale per la *Fisiologia*, del 1913.

AFFARI DIVERSI

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato del dott. G. MEI-GENTILUCCI, trasmesso dal Corrisp. ALBERTONI; il piego sarà conservato negli Archivi accademici.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 11°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-X. Fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Giugno 1914.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Ciamician e Silber. Azioni chimiche della luce . . . . Pag. 859
Cisotti. Sopra le forme quasi-circolari dell'anello di Saturno (pres. dal Socio *Levi-Civita*) » 867
Pérès. Sur les fonctions permutables analytiques (pres. dal Socio *Volterra*) . . . . » 870
Laura. Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica (pres. dal Socio *Somigliana*) (*) . . . . » 873
Boggio. Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica (pres dal Corrisp. *Almansi*) (*) . . . . » »
Signorini. Sulla propagazione di onde elettro-magnetiche in un conduttore cilindrico (pres. dal Socio *Levi-Civita*) (*) . . . . » 874
De' Filippi. Seconda relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale . . . » »
Barbieri. Palladosalicilati (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 880
Cotronei. Risultati di ricerche sul tubo digerente del «Limulus» (pres. dal Socio *Grassi*) » 885
Topi. Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite (pres. *Id.*) . . . . » 890
Gorini. L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici (pres. dal Socio *Briosi*) (*) . . . . » »

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Naccari (relatore) e *Stefani.* Relazione sulla Memoria del prof. *Camillo Negro*: «Ricerche sperimentali di elettrofisiologia sull'azione che esercitano sui nervi motori della rana le scariche elettriche a basso potenziale, ottenute a circuito aperto dai singoli poli di coppie voltaiche» . . . . » »
Grassi (relatore) e *Marchiafava.* Relazione sulla Memoria del dott. *Ugo Cerletti*: «Sulla struttura della Nevroglia» . . . . » »

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Dà annunzio della morte dei Soci stranieri: *F. van Tieghem* e *G. W. Hill* . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Millosevich (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio *De Stefani* e del prof. *A. Béguinot.* . . . . » 891

CONCORSI A PREMI

Blaserna (Presidente). Annuncia che il dott. *Pirro Zanotti* ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale per la «Fisiologia», del 1913 . . . . » »

AFFARI DIVERSI

Blaserna (Presidente). Presenta un piego suggellato del dott. *G. Mei-Gentilucci*, perchè sia conservato negli Archivi accademici . . . . » »

ERRATA-CORRIGE.

A pag. 652, linea 6, invece di $p = \varrho (u - u_0)$ leggasi $p = \varrho (U - U_0)$.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 21 giugno 1914.* **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1914.

Volume XXIII.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

I° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sull'anidrificazione della Glicocolla* [1]. Nota del Corrispondente L. Balbiano.

In un ponderoso volume di 423 pagine [2], il prof. L. C. Maillard, prendendo le mosse da un tentativo fatto fin dal 1900 da me, in collaborazione col dott. Trasciatti [3], di preparare gliceridi di acidi amidati, descrive minutamente lo studio fatto ed i risultati ottenuti nel far reagire la glicerina coi medesimi. Egli perviene allo stesso nostro risultato, cioè non si formano in questa reazione grassi amidati, ma avviene l'anidrificazione dell'acido amidato.

Il tentativo di ottenere sostanze grasse azotate sintetiche, era evidentemente suggerito a noi da due serie di fatti.

Uno notissimo, perchè nell'idrolisi delle sostanze albuminoidi si erano da diversi sperimentatori ottenuti acidi amidati e dai medesimi, mediante i processi sintetici di Th. Curtius, di E. Fischer ed altri, si era riusciti ad ottenere i *polipeptidi*, prodotti di anidrificazione dei medesimi. L'altro, meno studiato, perchè si era accennata la presenza di idrati di carbonio nella decomposizione di alcune sostanze albuminoidi.

[1] Dal laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

[2] *Genèse des matières protéiques et des matières humiques. Action de la glycérine et des sucres sur les acides-α-aminés.* Paris, Masson et Comp. éditeurs.

[3] B. 33, 2323, 1900 — 34, 1501, 1901 — G. 32, 4 .), 1902.

Che il problema prefissomi nelle mie esperienze fosse inspirato dallo stesso concetto che ha spinto il Maillard a pubblicare *dodici anni dopo*, i suoi risultati, si rileva in modo esplicito dal seguente periodo:

« Accennavo fin dalla prima Nota [1] all'importanza fisiologica di questa « sostanza (*anidride cornea della glicocolla*), perchè in tutti quei tessuti « che all'idrolisi danno glicocolla, essa può derivare dall'idratazione di questa « anidride amorfa, che nelle sue proprietà fisiche si avvicina alle materie « cornee e bruciando spande l'odore caratteristico delle medesime. Fra i pro- « dotti d'idrolisi di questi tessuti oltre alla glicocolla si trovano sempre pre- « senti altri acidi amidati e specialmente acidi amido valerianici ed amido « caproici, perciò debbo vedere se nelle condizioni di anidrificazione della « glicocolla, anche questi acidi amidati e specialmente le leucine danno tali « anidridi polimerizzate e studiarne le proprietà ».

Perciò mi sia permesso di rilevare anzitutto che se il fatto sperimentale della condensazione anidridica mediante riscaldamento con glicerina degli amido-acidi è *d'origine fortuita*, come scrive [2] il prof. Maillard, l'importanza dei risultati ottenuti per la genesi degli albuminoidi non m'era sfuggita come egli lascia supporre.

Dalle esperienze descritte allora mi risultò che la glicerina non prendeva parte alla reazione disidratante. Ora il prof. Maillard mi rimprovera di considerare la *glicérine comme un simple milieu dèshydratant banal quelconque*, pag. 20, e fa esercitare alla medesima un'azione importante, ma a mio parere completamente immaginaria, nella formazione delle diverse anidridi.

Per dimostrare la base poco solida dell'elegante edifizio costruito dal chimico francese, ho cercato di ottenere dalla glicocolla l'anidride di condensazione eliminando completamente la glicerina, ed impiegando al posto idrocarburi aromatici funzionanti solamente come moderatori di temperatura.

L'esperienza mi riuscì subito soddisfacente colla naftalina. Ho scelto questo idrocarburo, perchè il suo punto di ebollizione 218° è di pochi gradi inferiore al punto di imbrunimento 228° della glicocolla che fonde con decomposizione a 232°-236°.

Gr. 3 glicocolla finamente polverizzata si mischiarono con 10 gr. circa di naftalina, e si riscaldarono lentamente a bagno d'olio a temperatura oscillante fra 200° e 204°. Un termometro immerso nella massa reagente mi dava la temperatura della medesima, che durante l'esperienza ripeto, oscillò fra 200°-204°. Poco a poco la miscela si colora in bruno, e dopo tre ore di riscaldamento è diventata nera; nello stesso tempo si elimina acqua. Si sospende il riscaldamento e si separa, dopo raffreddamento, la naftalina con benzolo bollente, indi con alcool assoluto parimenti caldo.

[1] Pubblicata col dott. Trasciatti.

[2] Maillard, l. c., pag. 19.

Il residuo insolubile è una massa nera cristallina che, disseccata alla stufa ad acqua fino a costanza, pesa circa gr. 2,22.

La perdita di peso dei 3 gr. di glicocolla è perciò circa gr. 0,78 che corrisponde alla perdita di 1 mol. di H^2O.

$$C^2H^5NO^2 - H^2O \text{ richiede gr. } 0,72.$$

Questo residuo trattato con acqua si divise in due porzioni: una solubile con intensa colorazione nero-caffè; l'altra fioccosa, intensamente colorata in nero, insolubile.

Si esaurì la parte indisciolta dapprima con acqua calda, poi fredda fino a che l'acqua di lavaggio fosse quasi scolorita, e le acque riunite ed evaporate a b. m. lasciarono un residuo nero cristallino, che disseccato a 100°-110° pesa gr. 1,03; questo residuo si ridiscioglie in acqua calda e si riprecipita con alcool, ma sempre si ottiene colorato in nero.

Siccome a me interessava soltanto ricercare se in esso fosse presente della glicocolla inalterata, aggiunsi alla sua soluzione un leggiero eccesso di ossido ramico precipitato e conservato sott'acqua in pasta; feci bollire per 15 minuti, indi al filtrato bollente, sempre colorato in nero-caffè, addizionai, con precauzione, alcool 99 %; ottenni un precipitato nero che separai per filtrazione a caldo e nella soluzione di color verde-sporco, un eccesso di alcool precipitò il sale di rame azzurro della glicocolla, che ridisciolto in acqua bollente si riprecipitò con alcool. In tal modo ottenni circa gr. 0,18 di glicocolato di rame corrispondente a gr. 0,1 di glicocolla.

La parte nera fioccosa, lavata dapprima con acqua calda, poi fredda e sempre per decantazione, si disseccò alla stufa a 100°-110°, e risultò pesante gr. 1,21 circa. È sempre colorata in nero-caffè, ed è costituita quasi interamente dall'anidride cornea da me scoperta quattordici anni fa col Dr. Trasciatti. Infatti si fece digerire a *freddo* per 24 ore con 10 cm.^{3} di acido solforico al 25 %; l'acido assunse la colorazione di un infuso carico di caffè, ma la maggior parte della sostanza rimase indisciolta; solo facendo bollire a ricadere per un'ora si ebbe la soluzione completa della sostanza. Si sovrasaturò questa soluzione con un latte di calce molto fluido, indi si fece bollire per qualche tempo (15 a 20 minuti), poi il filtrato caldo, che era colorato in giallo-bruno, si sovrasaturò con anidride carbonica all'ebollizione, ed il filtrato, sempre colorato in giallo-bruno, si svaporò a secco a b. m. — Il residuo cristallino, colorato in bruno, pesava gr. 1,4. Si sciolse in acqua e si fece bollire con un leggero eccesso di ossido ramico precipitato e conservato in pasta. Il filtrato, colorato in azzurro carico, depositò col raffreddamento il sale ramico della glicocolla, che ricristallizzato dall'acqua calda, venne asciugato all'aria e disseccato sull'acido solforico.

Gr. 0,4589 perdettero a 150° gr. 0,0363 acqua e calcinati dettero gr. 0,1573 di CuO.

Trovato H^2O	7,91	Cu. 29,72
Calc. per $(C^2H^4NO^2)^2$ Cu. H^2O	7,84	" 30,03

Riscaldando quindi la glicocolla colla naftalina si produce l'anidride cornea e nelle stesse proporzioni all'incirca che se ne ottiene colla glicerina (gr. 1, 2 da 3 gr. di glicocolla), solo in questo caso rimane tenacemente aderente una piccola quantità della materia colorante nero-caffè che ne altera il colore.

Per confermare sempre più che per l'anidrificazione della glicocolla non è necessario l'intervento della glicerina, ho ripetuto l'esperienza col cimene p. b. 175°-176°.

L'andamento della reazione è sempre lo stesso, soltanto la durata della disidratazione è differente. La temperatura essendo meno elevata, la eliminazione d'acqua è più lenta e meno completa.

Gr. 1,5 glicocolla finamente polverizzata vennero riscaldati a ricadere a bagno d'olio con 10 cm.^{3} di cimene. Il termometro immerso nella massa reagente segnò durante l'esperienza 174°-175°. Dopo un'ora di riscaldamento la massa aveva assunto una debole colorazione tortora, che andò a mano a mano crescendo d'intensità. Si riscaldò per 14 ore, indi si estrasse il cimene, leggermente colorato in giallo, con benzolo e successivamente con alcool bollente, ed il residuo cristallino di color nero-caffè, con punte grigio-gialle si trattò con acqua calda, nella quale si disciolse in gran parte dando soluzione colorata intensamente come infuso di caffè carico.

Il residuo, amorfo, di color grigio-giallo, pesava circa gr. 0,14 e riscaldato a ricadere per un'ora con 5 cm.^{3} di acido solforico al 25 %, si discioglieva completamente e la soluzione, colorata in giallo-madèra, trattata con latte di calce nel modo anzidetto dà, come risultato finale, il glicocolato di rame cristallizzato, che all'analisi dette il seguente risultato.

Gr. 0,1189 sale dissec. in essiccatore ad ac. solforico, perdettero a 150° gr. 0,0095 acqua e dettero alla calcinazione gr. 0,0424 CuO.

Trovato H^2O	7,91	Cu. 30,89
Calc. per $(C^2H^4NO^2)^2$ Cu. H^2O	7,84	" 30,03

Il sale di rame non era ricristallizzato e conteneva traccie di solfato di calcio.

Fisica. — *Sulla teoria delle rotazioni ionomagnetiche.* Nota del Socio AUGUSTO RIGHI [1].

1. Le rotazioni di corpi posti in un campo magnetico, girevoli intorno ad un asse diretto parallelamente al campo, le quali si producono allorchè il gas rarefatto che circonda quei corpi è opportunamente ionizzato, furono da me studiate e descritte in varie pubblicazioni [2], e anche genericamente spiegate. La spiegazione è assai ovvia.

Sotto l'azione del campo ciascun ione gassoso percorre fra un urto e l'altro, non più un segmento rettilineo, ma una curva (elica, se il campo è uniforme), di guisa che gli urti subìti dal corpo mobile divengono obbliqui in un certo senso tutt'intorno al medesimo. Di qui la rotazione osservata. Naturalmente i ioni dei due segni determinano rotazioni di sensi opposti; per cui quanto si constata è un effetto differenziale. Nelle esperienze descritte nell'ultima delle Memorie citate l'effetto è più cospicuo, appunto perchè i ioni d'un dato segno urtano il corpo mobile in un numero assai maggiore di quello dei ioni di segno opposto.

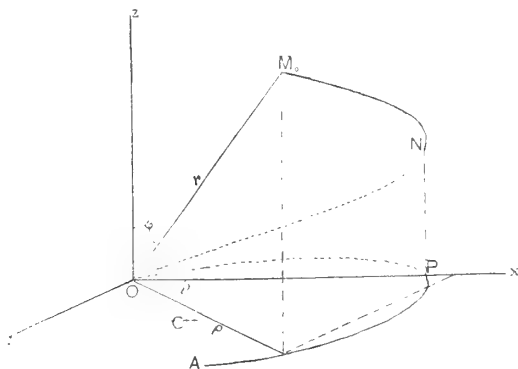
Cercai di rendere conto con qualche dettaglio, mediante considerazioni geometriche, del meccanismo di quelle rotazioni in alcuni casi speciali, per esempio quelli di un cilindro o di un mulinello ad alette verticali; ma, specialmente in quest'ultimo caso, la spiegazione non può dirsi completa. Nel presente scritto espongo la teoria in modo abbastanza semplice, ma più comprensivo.

2. Naturalmente la velocità con cui un ione urta un dato elemento superficiale del corpo mobile è variabilissima sia in grandezza che in direzione, tanto col tempo quanto da luogo a luogo. Si è costretti quindi, come in ogni caso analogo, di contentarsi di calcoli approssimativi, assumendo valori medî per le quantità con cui si ha a che fare.

Ammetterò dunque, che l'ultima collisione subìta da un ione prima che esso giunga a colpire un elemento $d\sigma$ della superficie del corpo mobile, abbia avuto luogo ad una distanza r dell'elemento stesso, e che tale distanza r sia la stessa per tutti i ioni, che da qualsiasi direzione arrivano a colpire quello o qualunque altro elemento. Parimenti supporrò, che la velocità posseduta da quei ioni abbia per tutti uno stesso valore V. Supporrò infine che le molecole gassose, sulle quali i ioni urtano un'ultima volta prima d'andare

[1] Bologna, aprile 1914.

[2] Comp. Rend. 19 février 1912; Mem. della R. Acc. di Bologna, serie VI, t. IX; N. Cimento, luglio 1912; Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1 dicembre 1912; Mem. della R. Acc. di Bologna, 16 febbraio 1913; N. Cimento, luglio 1913.

a colpire l'elemento $d\sigma$, siano distribuite uniformemente sulla superficie sferica di raggio r e centro $d\sigma$. Da ogni elemento ds di tale superficie partiranno ioni in tutte le direzioni; ma fra queste si dovrà prendere in considerazione soltanto quella che permette ai ioni di colpire l'elemento $d\sigma$; il numero di ioni, che in ogni minuto secondo partono da ds e arrivano a $d\sigma$, si potrà rappresentare con $n \,.\, ds \,.\, d\sigma$.

Ciò posto, si assuma una terna di assi ortogonali, di cui quello delle z sia parallelo alla direzione del campo magnetico supposto uniforme e d'intensità H, e si rappresentino con e la carica e con m la massa di un ione (o di un elettrone). Ponendo per semplicità $k = \mathrm{H}\frac{e}{m}$ le equazioni del moto sono:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k\frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k\frac{\partial x}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \,.$$

Esse si integrano facilmente. Dicendo x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto M_0 da cui parte il ione nell'istante $t=0$, ed u_0, v_0, w_0 le componenti della sua velocità V pel medesimo istante, si ha, come è facilissimo verificare:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = u_0 \cos(kt) - v_0 \operatorname{sen}(kt) \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = u_0 \operatorname{sen}(kt) + v_0 \cos(kt) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial t} = w_0 \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} k(x - x_0) = u_0 \operatorname{sen}(kt) - v_0\,[1 - \cos(kt)] \\ k(y - y_0) = u_0\,[1 - \cos(kt)] + v_0 \operatorname{sen}(kt) \\ \quad (z - z_0) = w_0\, t \,. \end{cases}$$

Dalle (2) si desume, che la velocità V del ione resta invariata, e che altrettanto avviene per la sua componente perpendicolare alla direzione del campo, perchè è invariabile anche $\frac{dz}{dt}$.

3. Per raggiungere lo scopo in vista è necessario determinare le componenti secondo gli assi della velocità dei ioni, che arrivano in O, giacchè è nell'origine delle coordinate che supporremo poi collocato l'elemento $d\sigma$; e per giungere a ciò occorre anzitutto scrivere le equazioni della traiettoria.

Si ponga:

$$\alpha = \frac{kz}{2w_0} \quad , \quad \alpha_0 = -\frac{kz_0}{2w_0} . \tag{4}$$

Così facendo restano alquanto semplificate le formole che si andranno scrivendo.

Dalle (4) si deduce, in virtù della terza delle (3):

$$kt = 2(\alpha + \alpha_0) .$$

La prima e la seconda delle (3) diventano così le equazioni della traiettoria:

$$\left\{ \begin{aligned} k(x - x_0) &= 2 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0) [u_0 \cos(\alpha + \alpha_0) - v_0 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0)] , \\ k(y - y_0) &= 2 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0) [u_0 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_0) + v_0 \cos(\alpha + \alpha_0)] . \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Come è noto, e come facilmente si verifica, essa è un'elica tracciata sopra un cilindro circolare, il cui asse è parallelo ad Oz.

Fra le infinite traiettorie rappresentate dalle (5), differenti l'una dall'altra a seconda della direzione della velocità iniziale V, ve ne è una passante per O, ed è questa sola che, naturalmente, c'interessa. Per determinarla basterà trovare quei tali valori di u_0 e v_0 che rendono soddisfatte le (5) con $x = y = z = 0$, e quindi anche $\alpha = 0$.

Così facendo si trova:

$$\left\{ \begin{aligned} u_0 &= -\tfrac{1}{2} k\varrho \frac{\cos(\alpha_0 - \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} \\ v_0 &= \tfrac{1}{2} k\varrho \frac{\operatorname{sen}(\alpha_0 - \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

essendosi posto

$$x_0 = \varrho \cos\theta \, , \, y_0 = \varrho \operatorname{sen}\theta .$$

Quanto al valore di w_0, esso si ricaverà da $V^2 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$, restandone però incerto il segno. Ma questo risulta sempre determinato dalla terza delle (3), la quale per $z = 0$ dà $z_0 + w_0 t = 0$. E poichè interessa di considerare solo epoche posteriori a $t = 0$, si vede che il segno di w_0 deve essere sempre opposto a quello di z_0. Quindi α_0 è sempre positivo.

Introducendo nelle (5) i valori (6) si avranno le equazioni della traiettoria percorsa da quello, fra i ioni che partono dal punto (x_0, y_0, z_0) con velocità V, il quale va a passare per O. Con facili trasformazioni si trova:

$$(7)\quad \begin{cases} -x \operatorname{sen} \alpha_0 + {}^1/_2\, \varrho \operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta) = {}^1/_2\, \varrho \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha_0 + \theta) \\ y \operatorname{sen} \alpha_0 + {}^1/_2\, \varrho \cos(\alpha_0 + \theta) = {}^1/_2\, \varrho \cos(2\alpha + \alpha_0 + \theta). \end{cases}$$

Se ne deduce, eliminando α e quindi z:

$$x^2 + y^2 = \varrho x \frac{\operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} - \varrho y \frac{\cos(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0},$$

equazione della circonferenza APO... secondo la quale l'elica M_0NO, traiettoria del ione, si proietta sul piano xy. Tale circonferenza ha per raggio $\varrho : 2 \operatorname{sen} \alpha_0$, e le coordinate del suo centro C sono

$$\varrho \operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta) : 2 \operatorname{sen} \alpha_0 \quad , \quad -\varrho \cos(\alpha_0 + \theta) : 2 \operatorname{sen} \alpha_0 .$$

Portando ora i valori (6) nelle prime delle (2) si trova:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -{}^1/_2\, k\varrho \dfrac{\cos(2\alpha + \alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = -{}^1/_2\, k\varrho \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha + \alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} . \end{cases}$$

Avremo finalmente le componenti u, v della velocità che possiede il ione allorchè arriva in O, col porre nelle (8): $z = 0$, e quindi $\alpha = 0$. Si trova così:

$$(9)\quad \begin{cases} u = -{}^1/_2\, k\varrho \dfrac{\cos(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} \\[2ex] v = -{}^1/_2\, k\varrho \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha_0 + \theta)}{\operatorname{sen} \alpha_0} . \end{cases}$$

4. Per valutare l'effetto complessivo prodotto da tutti i ioni che arrivano in O e provenienti dai varî punti della superficie sferica $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$ si dovrà ricorrere ad integrazioni; ma anche prima di eseguirle le (9) possono fornire utili indicazioni.

Si supponga in O un elemento superficiale $d\sigma$ orientato perpendicolarmente alla direzione Oz del campo, e si voglia conoscere l'azione totale prodotta dai ioni, che ne colpiscono la faccia superiore. Bisognerà comporre tutte le u corrispondenti ai punti (x_0, y_0, z_0) di quella metà della sfera di raggio r e centro O, che sta al di sopra del piano xy; e poi far altrettanto per le v. È facile riconoscere che quelle due risultanti sono nulle.

Infatti, si cominci col comporre l'effetto dovuto ai ioni partenti dal punto (x_0, y_0, z_0) con quello dei ioni partenti dal punto $(-x_0, -y_0, z_0)$ simmetrico al primo rispetto all'asse Oz.

I valori di u e v per questo nuovo punto di partenza si ottengono dalle (9) cambiando θ in $\theta + \pi$, oppure in $\theta - \pi$. In ogni modo ne risultano valori eguali e di segno contrario a quelli relativi al punto (x_0, y_0, z_0). Dunque gli effetti di tutti i ioni si distruggono due a due. Ciò vale per le componenti di velocità traversali alla direzione del campo, ma non per w_0; però questa non è da tenere in considerazione se, come si suppone, $d\sigma$ appartiene ad un corpo, mobile intorno ad un asse parallelo alla direzione del campo, poichè w_0 ha rispetto a tale asse un momento nullo.

Si supponga in secondo luogo che l'elemento $d\sigma$ posto nell'origine O sia parallelo ad Oz, per esempio giaccia nel piano xz. In questo caso le velocità da comporre sono quelle possedute dai ioni partenti dai varî elementi della mezza sfera di centro O e raggio r posta da una parte del piano xz, p. es. dalla parte dell'asse Oy positivo.

In questo caso consideriamo insieme al punto (x_0, y_0, z_0) il suo simmetrico rispetto al piano xy, cioè il punto $(x_0, y_0, -z_0)$. I valori di u e v per questo ultimo punto si ricavano dalle (9) cambiando segno a z_0. Siccome però esse non contengono z_0 esplicitamente, ed α_0 (che contiene z_0) è, come si è visto nel precedente paragrafo, sempre positivo, così i valori di u e v restano invariati. Donde questa conseguenza, che nelle integrazioni basterà tener conto di una sola metà della mezza sfera sopra indicata, per esempio il quarto di superficie sferica compreso fra i piani xy ed xz, a patto naturalmente di raddoppiare il risultato.

Con un ragionameuto analogo ai precedenti si può far vedere, che se l'elemento $d\sigma$ giacente in O nel piano xz può essere percosso dai ioni su entrambe le faccie, l'effetto complessivo è nullo. Infatti si ha per risultato zero quando alle u e v dovute ai ioni partenti dai precedenti punti (x_0, y_0, z_0) e $(x_0, y_0, -z_0)$ si aggiungono quelli partenti dai punti simmetrici a questi rispetto all'asse Oz. Ne risulta che una lamina mobile non ha tendenza a spostarsi se i ioni possono liberamente giungere sulle sue due faccie.

5. L'integrazione necessaria per calcolare l'effetto risultante dei ioni partenti dalla semisfera, nel cui centro si trova l'elemento $d\sigma$ giacente nel piano xz, è facilissima per quanto riguarda le componenti u parallele all'elemento $d\sigma$, ma non certo per le v normali all'elemento stesso; fortunatamente però non occorre tener conto di queste, come si vedrà più oltre.

La risultante delle u relative ai punti di partenza (x_0, y_0, z_0) e $(x_0, y_0, -z_0)$ è, come si è detto poc'anzi, il doppio della u (9) cioè:

$$u = -k\varrho \cos(\alpha_0 + \theta) : \operatorname{sen} \alpha_0 .$$

Componiamo coll'effetto di questi due punti quello dei loro simmetrici rispetto al piano yz, cioè quello dei punti $(-x_0, y_0, z_0)$ e $(-x_0, y_0, -z_0)$. La u per questi due punti presi insieme si ricaverà dall'ultima equazione

scritta cambiando segno ad x_0, ossia cambiando θ in $\pi-\theta$, e si trova:

$$u=k\varrho\frac{\cos(\alpha_0-\theta)}{\operatorname{sen}\alpha_0}.$$

Sommando questo valore col precedente si avrà la u relativa al sistema dei quattro punti, e precisamente:

$$u=\frac{k\varrho}{\operatorname{sen}\alpha_0}\Big[(\cos(\alpha_0-\theta)-\cos(\alpha_0+\theta)\Big],$$

od anche: $u=2\,k\varrho\operatorname{sen}\theta$.

Con questa formola si dovrà evidentemente estendere l'integrazione soltanto all'ottavo di sfera compreso fra le direzioni positive dei tre assi, e tale integrazione riesce facilissima.

Sia ds l'elemento della sfera di raggio r e centro O che si trova in (x_0, y_0, z_0). Chiamando φ l'angolo fra Oz e la retta OM_0, che va dall'origine O al punto (x_0, y_0, z_0) sarà $\varrho=r\operatorname{sen}\varphi$, e $ds=r^2 d\theta\operatorname{sen}\varphi d\varphi$.

Ciò posto la quantità di moto dq parallela ad Ox recata nell'unità di tempo all'elemento $d\sigma$ dai ioni provenienti dai quattro punti considerati più sopra è:

$$dq=n\,ds\,d\sigma\,.\,u\,.\,m$$

dove il primo fattore rappresenta il numero dei ioni che vanno da ds a $d\sigma$ nell'unità di tempo. Mettendo per u, ds e ϱ i loro valori si ha:

$$dq=n\,d\sigma\,.\,r^2\,d\theta\operatorname{sen}\varphi d\varphi\,.\,2\,kr\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,.\,m$$

e quindi:

$$q=2kmnr^3\,d\sigma\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,.$$

Integrando e ponendo:

$$A=\pi kmnr^3=\pi Henr^3$$

si ha finalmente:

$$q={}^1/_2\,A\,d\sigma \tag{10}$$

per la quantità di moto riferita alla unità di tempo dovuta a tutti i ioni che colpiscono una faccia di un elemento $d\sigma$ parallelo alla direzione del campo. La sua direzione è parallela all'elemento e perpendicolare al campo.

6. È ora facile il calcolare l'azione prodotta sul corpo girevole intorno ad un asse verticale, come nelle esperienze da me descritte.

Considererò come primo esempio quello d'un parallelepipedo retto girevole intorno alla congiungente dei centri delle sue due faccie orizzontali. Il campo magnetico si suppone sempre diretto verticalmente.

Siano a, b gli spigoli orizzontali, e c quello verticale. L'effetto delle componenti normali v sopra un dato elemento della superficie del corpo es-

sendo controbilanciato da quello prodotto sopra un corrispondente egual elemento della faccia opposta, basterà tener conto, come del resto si avvertì già, delle componenti orizzontali u parallele agli elementi. Ora essendo $\frac{1}{2} A d\sigma$ la quantità di moto recata dai ioni nell'unità di tempo ad un elemento $d\sigma$, per l'intera faccia di area ac, essa sarà $\frac{1}{2} A . ac$, ed il suo momento rispetto all'asse di rotazione sarà $\frac{1}{2} A . ac . \frac{b}{2}$, ossia $\frac{1}{4} A abc$. Per ciascuna delle faccie d'area bc si avrà un egual valore. Quindi per le quattro faccie laterali il momento μ della quantità di moto, che supporemo integralmente trasmessa dai ioni al corpo mobile, sarà:

$$\mu = A abc = AU$$

se con U si rappresenta il volume del parallelepipedo. Questo è l'effetto totale, perchè gli urti ricevuti dalle faccie orizzontali hanno momento nullo.

In modo analogo si tratta il caso d'un cilindro verticale mobile intorno al proprio asse.

Sia R il raggio della sua sezione ed L l'altezza. Poichè $\frac{1}{2} A d\sigma . R$ è il momento della quantità di moto data nell'unità di tempo ad un elemento $d\sigma$, quello μ relativo all'intera superficie laterale $2\pi R L$ del cilindro sarà $\mu = A \pi R^2 L = AU$, indicando qui pure con U il volume del corpo sospeso.

Identico risultato si ottiene con corpi d'altra forma, per esempio prismi, coni, sfere, ecc.

Dalla formola

$$\mu = AU = \pi H e n r^3 U$$

si deducono queste conseguenze, e cioè che il momento μ:

1° è proporzionale all'intensità del campo magnetico;

2° è indipendente dalla grandezza della velocità V attribuita ai ioni, ciò che si comprende pensando, che aumentando V ogni ione è meno deviato dal cammino rettilineo che seguirebbe qualora non esistesse il campo, nel qual caso naturalmente non si producono rotazioni;

3° è proporzionale al volume del corpo mobile;

4° è proporzionale ad n e a r^3; ma da ciò non si possono trarre conseguenze sicure, circa l'influenza della rarefazione del gas. Infatti r cresce verosimilmente se si diminuisce la pressione del gas; ma in pari tempo cala n, perchè diminuisce il numero di molecole e quindi anche dei ioni presenti.

La formola precedente si può d'altronde generalizzare assai. Limitandoci al caso d'un corpo di rivoluzione mobile intorno al proprio asse di figura verticale Oz si immagini tracciata nel piano xz la sua curva meridiana, e sia dl un elemento di essa, di coordinate x e z. Colla rotazione intorno all'asse Oz, mentre la curva suddetta genera la superficie esposta all'urto

dei ioni, l'elemento lineare dl descrive un'area $2\pi x \,.\, dl$. Su ciascun elemento superficiale $d\sigma$ di essa gli urti dei ioni hanno per effetto di comunicare ad esso una quantità di moto $\frac{1}{2} A \cos\beta \,.\, d\sigma$ diretta secondo la tangente orizzontale, essendo β l'angolo compreso fra Oz e dl.

Infatti, non si deve tener conto delle componenti di velocità parallele ad Oz o che incontrano questo asse, perchè hanno momento nullo; e nella espressione della componente efficace si deve porre $H\cos\beta$ al posto di H, visto che l'azione su un elemento perpendicolare al campo è nulla.

Il momento di detta quantità di moto rispetto all'asse di rotazione è $\frac{1}{2} A \cos\beta \,.\, d\sigma \,.\, x$, e per l'intera area generata dalla rivoluzione dell'elemento dl è $\frac{1}{2} A \cos\beta \,.\, 2\pi x \,.\, dl \,.\, x$, od anche $\pi A x^2 dz$, perchè si ha

$$dz = dl \cos\beta .$$

Per l'intera superficie di rivoluzione il momento della quantità di moto dovuta all'urto dei ioni nell'unità di tempo sarà dunque

$$\mu = A \int \pi x^2 dz \; ,$$

dove l'integrazione va estesa a tutta la curva meridiana. Evidentemente $\int \pi x^2 dz$ non è altro allora che il volume U del corpo mobile; dunque $\mu = AU$.

Nello stesso modo che la quantità di moto comunicata nell'unità di tempo coi loro urti dalle molecole di un gas alla parete del recipiente equivale ad una forza continua, che è la pressione del gas, così il momento della quantità di moto comunicata nell'unità di tempo dai ioni al corpo girevole equivale ad una coppia agente in modo continuo. Se il corpo è sospeso ad un filo, tale coppia potrà essere equilibrata dalla elasticità di torsione, del filo stesso, ed allora l'angolo di torsione, che a quella è proporzionale, fornirà una misura relativa della detta coppia. Di qui la possibilità di verificazioni sperimentali delle conclusioni tratte dalla teoria, ed enunciate più sopra.

Nel caso degli urti delle molecole gassose si ritiene che esse rimbalzino sulla parete urtata; nel caso di ioni nulla di sicuro si può per ora asserire, ed è possibile che essi restino sul corpo girante.

7. Si può fare una obbiezione contro la legittimità del calcolo esposto alla fine del § 5, col quale si è giunti alla formola $q = \frac{1}{2} A \, d\sigma$.

Si supponga sempre l'elemento $d\sigma$ collocato in O nel piano xz, e anzi lo si consideri effettivamente come uno degli elementi di una faccia piana appartenente al corpo esposto all'urto dei ioni. Ora accade, che per certe posizioni attribuite al punto (x_0, y_0, z_0) sulla sfera di centro O e raggio r, la traiettoria porcorsa dai ioni partenti da quel punto prima di giungere in O incontra altrove (punto N sulla figura) il piano xz. Sembra dunque

che il risultato del calcolo del § 5 sia errato, perchè non si dovrebbe tener conto, come invece si è fatto, degli urti di quei ioni, che non raggiungono l'elemento $d\sigma$.

Se non che, se il punto N fa parte della stessa superficie piana di cui $d\sigma$ è uno degli elementi, ha luogo una compensazione pel fatto, che l'effetto prodotto dall' urto dei ioni in N equivale esattamente a quello, che i ioni stessi avrebbero prodotto arrivando sino in O.

Infatti, il punto N è caratterizzato dall'essere $y=0$ e z (e quindi anche α) differente da zero. Ora se nella seconda delle (5), dopo avervi introdotto nel posto di u_0 e v_0 i valori (6), si pone $y=0$, si trova dopo alcune opportune trasformazioni:

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}(\alpha+\alpha_0+\theta)=0$$

e poichè α non è zero: $\alpha=-\alpha_0-\theta$.

Ponendo questo valore di α nella prima delle (8) si trova per la componente secondo x della velocità con cui il ione urta il piano xz:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\,{}^1/_2\, k\varrho \frac{\cos(-\alpha_0-\theta)}{\operatorname{sen}\alpha_0},$$

valore identico a quello di u delle (9), che è la componente secondo x della velocità con cui il ione urterebbe il piano medesimo, se arrivasse sino ad O.

Mancherà questa curiosa compensazione solo per elementi marginali dalla faccia piana, di cui $d\sigma$ è l'elemento in O; ma l'errore rimanente sarà trascurabile, per poco che la faccia stessa abbia dimensioni grandi in paragone di r. Per una superficie curva sarà la stessa cosa, purchè il raggio di curvatura sia grande in confronto di r, ciò che praticamente può considerarsi come quasi sempre verificato.

8. L'esposta teoria mette in chiaro il meccanismo e l'essenza stessa del fenomeno delle rotazioni ionomagnetiche, e perciò con essa viene raggiunto lo scopo che mi ero prefisso; però essa presuppone condizioni di uniformità e di simmetria, che non sempre possono essere sperimentalmente realizzate.

Non lo sono, per esempio, quando la ionizzazione del gas viene prodotta mediante scariche esplosive, come nella mia prima disposizione sperimentale. Ioni ed elettroni sono allora lanciati in ogni direzione intorno alle scintille con così considerevoli velocità da dar luogo ad effetti meccanici assai notevoli, ed il corpo girante è investito dai ioni assai più dalla parte che guarda verso le scintille che dalla parte opposta.

Oltre a questa dissimetria, il fatto stesso del possedere molti dei ioni velocità assai grandi fa sì, che il loro ultimo percorso libero possa assumere valori assai più grandi di quello precedentemente ammesso come valore medio di r.

Questa circostanza si può invocare per rendere conto della mia prima esperienza di rotazione ionomagnetica, quella, cioè, della rotazione d'una specie di mulinello ad alette piane verticali.

Per spiegare tale fenomeno supposi appunto che ogni aletta riparasse in parte una delle sue vicine dal bombardamento dei ioni, con che si ammette per una porzione almeno dei ioni un non piccolo libero cammino prima del loro urto sul corpo mobile.

Per tentare qualche verificazione sperimentale dei risultati teorici enunciati nel § 6, sarebbe quindi necessario di ionizzare il gas, non col metodo tanto efficace delle scintille, ma in qualche altra maniera; gli effetti osservabili sarebbero però, così facendo, di gran lunga meno marcati.

Geologia. — *Fossili paleozoici dell'isola d'Elba.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Nel 1892 e nel 1893 io trovavo nella parte orientale dell'isola d'Elba, alla Cala Baccetti presso il Cavo nei più alti strati di quella regione mineraria schistoso-arenacea, cioè negli schisti filladici scuri, un giacimento di fossili che, sebbene mal conservati, subito apparivano paleozoici. Li attribuivo da prima al Devoniano [1]; ma un più attento esame e la successiva comparsa di numerosi lavori sui fossili del Paleozoico più recente, mi hanno persuaso che piuttosto si tratti di Carbonifero.

Alcuni fossili, come le *Myalinae*, si trovano a centinaia, uniti, da vivi, da un bisso: fra questi sono dei noduli, di rado silicizzati, il più spesso cambiati in limonite, che in origine sarà stata pirite, nei quali compaiono in variabile numero le altre specie. Sono per lo più tutte di piccole dimensioni, del tipo, si direbbe, della fauna triassica detta di San Cassiano. Fra le specie predominano quelle del genere *Schizodus*, e la fauna quasi si potrebbe dire di *Schizodus*. Fuori dei molluschi, quasi mancano altri tipi.

I fossili esaminati, come la roccia che li contiene, sono per lo più tutti screpolati e incrinati da fenditure: cioè, direbbero alcuni, *milonitizzati*; ma i singoli esemplari sono rimasti in posto. Evidentemente, durante lo spostamento e le ripiegature della roccia, risentirono notevoli pressioni.

Ecco, senz'altro, un breve accenno delle specie trovate.

Crostacei Macruri? Un esemplare in parte silicizzato ed altri frammenti, probabilmente segmenti addominali di un cefalotorace, non saprei attribuirli che ad un decapode, forse vicino ai *Palinura*. Decapodi, nel Paleozoico, non se ne trovarono mai, salvo il genere *Palaeopemphix* Gemmellaro; ma la

[1] C. De Stefani, *Gli schisti paleozoici dell'isola d'Elba* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII, 1894, pag. 57).

superficie del nostro esemplare, se pure si tratti di un cefalotorace, ha parvenza assai meno complicata.

Trilobite?? Grandemente incerto è un frammento delle Ripe Bianche il quale potrebbe attribuirsi a lobi pleurali, nel numero di 7, di un pigidio; altro del Cavo, anche più incerto, potrebbe rappresentare una glabella.

Crinoidi. Numerosi articoli, alle Pietre Nere e al Cavo, talora riuniti in colonna. Si tratta di un *Actinocrinus*; come tale lo determinò anche il Meneghini sopra esemplari trovati alle Pietre Nere dal Lotti.

Echinoide-Cidaride. Una placca presenta un tubercolo primario perforato e circa 16 tubercoletti secondarî, i quali fanno pensare ai Cidaroidi. Questi vanno dal Carbonifero inferiore all'attualità.

Brachiopodi. Numerose specie ma scarsi individui pessimamente conservati: uno solo presentava la superficie intatta con appendici tubiformi, certamente un *Productidae*. Pare vi siano *Orthis*, *Strophalosia*, *Chonetes*, *Strophomena*, *Lingula*, specificamente indeterminabili; ma non aventi, in ogni modo caratteri neozoici.

Molluschi. lamellibranchiati.

Janeia 1ª sp. n. Per la forma del corsaletto, della fossa del ligamento esterno, dell'impronta muscolare anteriore, e per la struttura radiale del guscio, la attribuisco a questo genere esteso dal Devoniano al Permiano. Somiglia alla *Clinopistha parvula* De Kon. del Carbonifere Belga, se pure, come altre *Clinopistha*, è una *Janeia*; ma la nostra è assai più grande, più rettangolare, e troncata anteriormente.

Janeia 2ª sp. n. Per le striature radiali risponde bene al genere. Per la forma della parte anteriore, per la estesa lunula, si avvicina alla *J. truncata* Goldfuss del Devoniano Renano; ma ha dimensioni minori, margine palleare più ovale, umbone più acuto, carena e, rispettivamente, concavità esterne più appariscenti.

Sanguinolites sp. L'impronta muscolare anteriore e il modo di biforcazione delle carene sono come in questo genere del Carbonifero, nel quale sono confusi tipi diversissimi, anche di terreni più antichi. Il *S. Selysianus* De Kon. del Carbonifero Belga è vicino, specialmente tenendo conto che la figura accenna una seconda piccola carena non indicata nella descrizione; ma è più allungato e, nella parte posteriore, più alto.

Solenopsis sp. n. Genere esteso dal Devoniano, e forse dal Siluriano, al Carbonifero. La *S.* (*modiomorpha*) *attenuata* Whiteaves del Devoniano del Manitoba in Canadà, somiglia; ma è più grande, meno triangolare, con parte anteriore meno concava sotto gli umboni e 2 coste superficiali, invece di 3.

Cardiomorpha sp. n. Genere esteso dal Devoniano, anzi probabilmente dal Siluriano al Permiano. La *C. alata* Sandb. del Devoniano di Germania

ha carena più acuta, ma meno alta; la *C. modioliformis* King del Permiano inglese, è meno quadrata.

Cardiomorpha alia sp. La *Cardiomorpha* (?) *sp.* Girty del Carbonifero superiore dell' Idaho somiglia; ma la nostra è più rettangolaro, più troncata alle estremità, più piatta, con umboni più depressi.

Palaeoneilo cfr. *lamellosa* Beushausen. È per lo meno assai vicina a questa specie del Coblenziano inferiore di Germania, se non la diversifica la carena posteriore che mi pare più evidente. Il genere va dal Siluriano inferiore al Trias.

Palaeoneilo sp. n. Per la situazione anteriore dell' umbone somiglia alle *P.* (*Nucula?*) *inconspicua* De Kon. e *P.* (*Nucula?*) *calliculus* De Ryck. del Carbonifero Belga; ma queste, del resto di genere tuttora incerto, sono meno gonfie ed hanno il margine palleare assai convesso.

Palaeoneilo alia sp. n. La forma quasi triangolare, l'essere più inequilaterale, il margine palleare assai arrotondato, la poca appariscenza della sinuosità posteriore, il numero e la forma dei denti, distinguono abbastanza bene questa specie.

Nucula sp. n. Il genere visse dal Siluriano in poi. La *N. grandaeva* Goldf. e la *N.? erratica* Beush. del Devoniano di Germania sono meno arrotondate. L'umbone voltato all'innanzi nella nostra specie, è raro nel Paleozoico, comune nei tempi successivi. La fossetta ligamentare, situata un poco avanti all'umbone, è carattere da *Ctenodontae* paleozoiche. L'impronta muscolare accessoria fra l'apice e la parte posteriore, è carattere di *Nuculae* e *Ctenodontae* paleozoiche.

Macrodon 1ª sp. n. Comunissima. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. Tipi identici a quello del Paleozoico sono incerti nel Trias. La piccolezza dell'area ligamentare avvicina questa specie a quelle Devoniane.

Macrodon 2ª sp. n. Ha grandissima analogia col *M.* (*Parallelodon*) *multiliratus* Girty del Carbonifero dell'Oklahoma e dell'Arkansas, del quale però non si conosce il cardine, e che è più grande e meno allungato.

Cucullella sp. n. La forma trapezoidale, il cardine rettilineare, i denti verticali del cardine posteriore agli umboni, le impronte pediose fanno attribuire la specie a questo genere che principia nel Siluriano e finisce nel Devoniano medio. Alcune forme della *C. elliptica* Maurer del Devoniano germanico si avvicinano; ma la nostra è più rettangolare e, anteriormente, più troncata.

Conocardium sp. n. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. Somigliano alquanto il *C. eifeliense* Beush. del Devoniano tedesco, il *C. intermedium* de Kon. del Carbonifero inferiore Belga, il *C. uralicum* Verneuil del Carbonifero superiore dell' Urale e di Sumatra.

Myalina 1ª sp. n. Combina, per la forma, con le *M.* allungate, ornate da strie radiali comuni nel Devoniano; e per l'ornamentazione sarebbe inter-

media fra la *M. tenuistriata* Sand. e la *M. Beushauseni* Frech del Devoniano germanico. Il genere, secondo alcuni, è Siluriano e Devoniano; ma, secondo altri, è pure Carbonifero.

Myalina 2ª sp. n. È la specie più comune, essendo state unite dal bisso intere colonie di centinaia d'individui di grandi dimensioni. La fossetta apicale per il bisso ben distingue tale specie dalle *Anthracoptera* del Carbonifero. Essa ricorda la *M. bilsteinensis* F. Roemer del Devoniano di Germania, ma è molto meno rigonfia. Anche la *M. subquadrata* Shumard, tanto comune nel Carbonifero superiore d'America, è vicinissima; però sembra che la parte infero-anteriore sia, in questa, più sporgente e più carenata, a conchiglia solida, quadrata, con umbone tendente all'indietro.

Schizodus 1ª sp. n. Vicino, ma diverso dallo *S.* (*Myophoria*) *truncatus* Goldf. del Devoniano renano, dallo *S.* (*Dolabra*) *equilateralis* M. Coy del Carbonifero d'Irlanda, e dal *M.* (*Protoschizodus*) *insignis* De Kon. del Carbonifero Belga. Il genere comincia nel Siluriano e, come *Miophoria*, termina nel Retico.

Schizodus 2ª sp. n. Per la sua altezza è sufficientemente distinto dalle altre specie note. È triangolare, con angolosità ventrale, umboni tendenti all'indietro.

Schizodus 3ª sp. n. Ricorda lo *S.* (*Miophoria*) *transrhenanus* Beush. lo *S.* (*Myophoria*) *Johannis* Beush. del Devoniano e lo *S.* (*Axinus*) *obscurus* Sow. del Permiano d'Inghilterra e di Germania. È rotondeggiante, poco rigonfio; umboni vòlti all'innanzi.

Schizodus 4ª sp. n. Comune: assai allungato posteriormente. Somigliano lo *S.* (*Myophoria*) *Holzapfeli* Beush. e lo *S.* (*Myophoria*) *inflatus* A. Roemer, del Devoniano, lo *S. Ferrieri* Girty e lo *S. batesvillensis* Weller del Carbonifero degli Stati Uniti d'America, lo *S. Schlotheimi* Gein. del Permiano.

Schizodus 5ª sp. n. Piccolo, trigono. Molto vicino allo *S. Roemeri* Beush. del Devoniano ed allo *S. Wortheni* De Kon. del Carbonifero.

Schizodus 6ª sp. n. Affine allo *S.* (*Myophoria*) *schwelmensis* Beush. del Devoniano Renano. È quasi ovale, rigonfio; umboni vôlti all'innanzi.

Schizodus 7ª sp. n. Molto analogo, però diverso, dallo *S. obscurus* Sowerby del Permiano d'Inghilterra. Molto allungato trasversalmente, con due sottili creste posteriori.

Schizodus 8ª sp. n. Quasi tetragono; umboni volti all'innanzi. Assai più breve dello *S. Holzapfeli* Beush. del Devoniano.

Schizodus 9ª sp. n. Liscio, umboni appena voltati indietro con 2 carene posteriori. È un tipo più vicino a quelli del Trias (*Myophoriae*) che non a quelli del Paleozoico.

Schizodus 10ª sp. n. Ovato, posteriormente cuneiforme, quasi triangolare, con due o tre distinte pieghe anteriori. Lo *S. obscurus* Sow. del Permiano somiglia alquanto; ma più ricorda le vere *Trigoniidae* del Secondario.

Schizodus (*Myophoria*)? sp. n.? Frammento anteriore di valva sinistra con 7 od 8 coste radianti. Somiglia notevolmente alla *Buchiola imbricata* Beush. del Devoniano, ma pure a certe *Myophoriae* triassiche, p. es. alla *M. ornata* Münster del Trias alpino; e ritengo che preferibilmente debba avvicinarsi a questo tipo.

Modiola sp. Il genere rimonta al Devoniano. La *M. reniformis* De Kon. del Carbonifero Belga è più lunga, più alta anteriormente.

Goniophora sp. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero. La *G. Schwerdi* Beush. del Devoniano è meno quadrata e con la carena non rettilineare rispetto alla nostra.

Allorisma cfr. *corbuloides* Beushausen. Il genere va dal Devoniano al Permiano; la specie sarebbe del Devoniano di Germania. Dubitavo si trattasse di una *Leda*; bensì in tutti i cardini delle *Nuculidae* fossili si vedono così bene i dentini che quasi non si può sbagliare: e qui mancano. Vero è che la specie del Devoniano ha una lunula poco marcata; ma l'esemplare tipico ha il guscio, mentre il nostro è un nucleo.

Lucina sp. Attribuiscono le forme paleozoiche al genere *Paracyclas* che parmi assolutamente sinonimo. Per lo meno nella forma e nel margine palleare integro la nostra specie somiglia alla *L.* (*Paracyclas*) *dubia* Beush. del Devoniano Renano,

Scafopodi.

Plagioglypta cfr. cyrtoceratoides De Kon. Comune. Il genere va dal Carbonifero al Trias. La specie citata fu descritta come *Entalis* dal Carbonifero Belga.

Gasteropodi.

Lepetopsis sp. n. La *L.* (*Umbrella*) *laevigata* M. Coy del Carbonifero d'Irlanda è più regolare, con apice più eccentrico senza tendenza di curvatura all'innanzi. Il genere va dal Siluriano al Carbonifero, forse al Permiano.

Bellerophon antracophilus Frech. La specie fu trovata nel Carbonifero dell'Ungheria e della Slesia. Il genere va dal Siluriano al Permiano.

Euphemus sp. n. È vicino al *E. Urei* Flem. comunissimo nel Carbonifero; ma le costole longitudinali vi sono circa 16, invece che 25 a 30. Il genere va dal Devoniano al Permiano.

Murchisonia 1ª sp. n. Somiglia alle forme Devoniane e Carbonifere indicate col nome, un po' vago, di *M. angulata* Phillips; ma ad ogni modo si distingue dal tipo. Il genere comune nel Devoniano è raro e finisce nel Trias.

Murchisonia 2ª sp. n. Si può ravvicinare alla *M. tricincta* Münster del Devoniano inglese.

Murchisonia 3ª sp. n. A prima giunta si prenderebbe per un *Polyphemopsis*: ma la presenza di 7 od 8 costoline trasversali la allontana.

Rispetto alla *M. acuta* De Kon. del Carbonifero Belga la nostra specie ha spira assai più breve, ultimo giro assai più grande.

Ivania sp. n. Per tracce di nodosità longitudinali si distingue dalle altre specie note. *Ivania* o *Baylea* è un sottogenere delle *Murchisonia* che si trova nel Devoniano e nel Carbonifero.

Naticopsis sp. n. Comunissima e talora ben conservata. L' ingrossamento calloso sulla columella distingue il genere, esteso dal Devoniano al Trias, dai generi *Strophostylus*, *Diaphorostoma*, *Turbonitella*.

Macrochilina 1ª sp. n. Vicina alle *M. maculata* De Kon., *conspicua* De Kon. e *tumida* De Kon. del Carbonifero Belga. Il genere durò dal Devoniano al Permiano.

Macrochilina? sp. n. La *M.* (*Macrocheilus*) *Barroisii* Gemmellaro, dal Permiano di Sicilia ha l' ultimo giro più gonfio e la spira più ottusa.

Loxonema sp. n. Il genere va dal Siluriano al Trias; ma forme assai affini seguitano in terreni più recenti. Sono vicini il *L. Roemeri* Kayser del Devoniano dell'Harz, il *L. strigilatum* De Kon. del Carbonifero Belga, e il *L.* (*Turbonilla*) *Montis Crucis* Stache del Permiano Tirolese.

Holopella? sp. Forma incerta, vicina alla *H. varicosa* Holzapfel del Devoniano; però, senza varici.

Turbonitella sp. n. È meno gonfia e meno ottusa della *T. subcostata* Goldfuss del Devoniano Renano. Il genere è Devoniano e Carbonifero.

Cefalopode.

Un unico frammento, con lobatura semplicissima, ha l'apparenza di un Nautiloide.

La Fauna è ben poco suscettibile di paragone con altre già note, e piuttosto che alle singole specie, bisogna guardare al loro insieme. Alcune specie si potrebbero avvicinare ad altre Devoniane, come la *Palaeoneilo* cfr. *lamellosa*, la *Allorisma*. Qualche *Schizodus* e la abbondante *Myalina* potrebbero unirsi a forme Devoniane e Carbonifere; la sola *Modiola* risponde ad una incerta specie del calcare a *Bellerophon* Permiano del Tirolo; il solo *Bellerophon anthracophilus*, e forse la *Plagioglypta*, rappresentano specie note del Carbonifero.

Fra i numerosi *Schizodus* sono alcuni tipi simili a qnelli del Trias, ed uno perfino alle *Trigoniae* più recenti. Alcuni generi (*Ctenodonta*, *Plagioglypta*, *Murchisonia*, *Naticopsis*, *Loxonema*) si estendono dal Paleozoico al Trias, e gli *Schizodus* o *Myophoria* fino al Retico; altri (*Nucula*, *Modiola*, *Lucina*) dal Paleozoico arrivano fino ad oggi. Parecchi altri generi invece non giungono al Trias. Alcuni cessano nel Permiano (*Janeia*, *Cardiomorpha*, *Allorisma*, *Bellerophon*, *Euphemus*, *Macrochilina*); altri nel Carbonifero (*Solenopsis*, *Macrodom*, *Conocardium*, *Myalina*, *Goniophora*, *Lepetopsis*, *Ivania*, *Turbonitella*). Nel Devoniano, mancando nel Siluriano, prin-

cipiano i generi *Janeia*, *Solenopsis*, *Modiola*, *Allorisma*, *Euphemus*, *Murchisonia*, *Ivania*, *Naticopsis*, *Macrochilina*, *Turbonitella*. Il solo gen. *Cucullella* è, per ora, proprio del Devoniano; il solo *Sanguinolites*, del resto incerto, è Carbonifero. Per queste circostanze si potrebbe essere incerti fra Devoniano e Carbonifero. I Brachioppodi, pessimamente conservati, escludono il Secondario. La mancanza di specie di Brachiopodi ben conservati, di buoni Trilobiti e di Corallarii, non permette una esatta determinazione, e lascia incerti pure sull'appartenenza ad uno o ad altro piano del Carbonifero. Pei rapporti con specie Devoniane, non si può escludere che si tratti di Carbonifero inferiore; mentre certi rari rapporti con forme secondarie avvicinerebbero i fossili al Permiano. Probabilmente si tratta di Carbonifero medio o superiore. Di fronte alla medesima incertezza si trovarono autori che trattarono di altre faune carbonifere d'Europa.

Nelle vicinanze del Cavo furono già da tempo trovati dei fossili. Presso Vigneria il Lotti trovò esemplari mal conservati che Meneghini attribuì a *Orthoceras sp.*, *Cardiola* cfr. *Bohemica* Barr., *Actinocrinus sp.* la stessa trovata al Cavo, *Monograptus sp.*, quest'ultimo del M. Arco. Il Meneghini stesso ritenne questi fossili Siluriani. Tra Capo Pero e la Cala del Telegrafo il Fossen raccolse alcuni Crinoidi, che il Meneghini dubbiosamente riportò al Carbonifero ([1]). De Angelis, in seguito, trovò nella stessa regione, a Vigneria presso Rio Marina, una impronta di pianta che attribuì ad *Asterophillites*, genere Paleozoico che principia nel Devoniano e ritenne che quei terreni dovessero attribuirsi piuttosto al Carbonifero che non al Siluriano, come prima si credeva ([2]).

Finalmente il Sacco, dal Malpasso a Ripabianca, trovò una *Fenestella*, giudicata dal Gortani vicina alla *F. Veneris* Fischer del Carbonifero ([3]). È molto probabile che questi fossili, ed i terreni che li racchiudono, appartengano tutti alla medesima età di quelli da me descritti.

Il Lotti distinse nella regione orientale dell'Elba, cominciando dal basso: 1°) Schisti carboniosi Siluriani; 2°) schisti micaceo-arenacei, dubbiosamente *carboniferi*; 3°) arenarie, puddinghe *permiane*. Già sostenni che tale distinzione litologica non regge, essendo i detti strati replicatamente alternanti; e di questo parere sono pure il De Angelis ed il Sacco. Dovrebbesi ora ritenere che neppur paleontologicamente si possano scindere e che appartengano tutti al Carbonifero. Con altri terreni carboniferi d'Italia è difficile il paragone. Nel monte Pisano trovansi dei molluschi entro rocce sottostanti al Carbonifero superiore, che il Fucini attribuisce alla Creta.

([1]) B. Lotti, *Descrizione geologica dell'isola d'Elba.* Roma 1896, pp. 31 e 35.

([2]) G. De Angelis, *Sopra il primo fossile vegetale trovato negli schisti carboniosi paleozoici dell'Elba orientale* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XIII, 1894, pag. 176).

([3]) F. Sacco, *Rinvenimenti di fenestelle all'Elba* (Boll. Soc. geol. ital., vol. XXXII, 1913, pag. 439).

Gli strati più alti, a piante, non contengono fossili marini: nè si conoscono nel Westfaliano delle Alpi occidentali, o nel Carbonifero superiore di Sardegna. Ve ne sono negli strati di Jano; per un supposto *Productus horridus*, che poi si trovò inesattamente determinato, questi furono creduti da alcuno Permiani: ma in realtà appartengono al Carbonifero superiore Stefaniano. Però di quei molluschi non fu mai pubblicata l'illustrazione. Pure difficile è il paragone col Carbonifero e col Permiano delle Alpi Carniche, coi quali non è ben nota, per ora, comunanza di specie.

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili.* Nota del dott. ing. G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Nel 1884, Gyldén pubblicava [1] una Nota *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili*, riducendolo ad equazioni che egli chiama funzionali e che in realtà non sono altro che equazioni integro-differenziali. Le coordinate incognite ξ ed η vengono infatti date dal sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\xi}{d\tau} = h_1 + \displaystyle\int \xi \frac{F}{\varrho^3}\, d\tau \\ \eta \dfrac{d\psi}{d\tau} - \psi \dfrac{d\eta}{d\tau} = h_2 + \displaystyle\int \eta \frac{F}{\varrho^3}\, d\tau\,. \end{cases}$$

Questa via abbandonata dai matematici come un'inutile complicazione viene ora ripresa dal Tommasetti e dallo Zarlatti [2]. Non sembra però che il metodo delle equazioni integro-differenziali dia nuovi risultati; ed infatti le quattro proprietà della traiettoria che i due autori dimostrano ed indicano con le lettere $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$, e l'equazione in coordinate polari a cui arrivano erano già state precedentemente pubblicate da me [3] in due Note apparse su questi Rendiconti. Poichè gli autori non fanno mai il mio nome, io domando all'Accademia il permesso di stabilire la mia priorità, tanto più che è necessario di rettificare alcuni errori in cui essi sono caduti.

2. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno grande importanza al caso di masse sempre decrescenti, per lo studio delle orbite cometarie. Essi scrivono infatti (Bulletin, pp. 156-157).

« Ainsi p. ex. considérons une comète periodique; si nous supposons, « comme l'observation l'a confirmé en quelque cas, que dans le voisinage « du périhélie, à cause des actions solaires, quelque soit leur nature, se

[1] *Die bahnbewegungen in einem Systeme* ecc.. Astron. Nach., 2593.

[2] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séance du 13 octobre 1913); e: Bulletin de l'Observatoire de Paris (avril 1914).

[3] Questi Rendiconti, sedute del 17 dicembre 1911 e del 2 marzo 1913.

« produit une dissipation de matière, le noyau de la comète après le passage « au périhélie décrira une trajectoire dont tous les éléments sont grandis (?) « Nos resultats confirment l'idée de quelques astronomes que toutes les « comètes quasi paraboliques on hyperboliques ont été elliptiques ».

Cominciamo ad osservare che il piano dell'orbita resta matematicamente invariabile, qualunque sia la diminuzione o l'aumento di massa; è erroneo quindi scrivere che *tutti* gli elementi sono « grandis », giacchè l'inclinazione e la longitudine del nodo rimangono invariabili. Occorre anche ricordare che l'orbita relativa di una cometa, non dipende nè dalla propria massa μ, nè da quella del sole M, ma soltanto dalla somma $M + \mu$. Ora μ è sempre così piccolo rispetto ad M, che noi possiamo asserire *che la traiettoria di una cometa è fisicamente indipendente dalla propria massa.* Ciò è tanto vero che noi calcoliamo *con la più grande esattezza* l'orbita e le perturbazioni di una cometa, *senza conoscerne la massa.* Anche se la massa di una cometa si riducesse, supponiamo pure, alla sua centesima parte, l'orbita resterebbe identica dentro al limite degli errori dell'osservazione. Ma vi è di più.

L'aumento secolare della massa solare M, per quanto piccolo, è certamente superiore all'ipotetica diminuzione di cui è suscettibile la massa di una cometa. Qualunque sia quindi la cometa che noi studiamo, la quantità $M + \mu$ è una funzione crescente del tempo. Perciò da questo lato, se non sussistono altre cause di perturbazione, non solo non è vero che l'orbita da ellisse si cangi in parabola, come scrivono il Tommasetti e lo Zarlatti, ma in qualche caso può avvenire esattamente il contrario.

3. Osservo ancora che, dal lato analitico, il problema dei due corpi con masse sempre decrescenti, si riconduce facilmente al caso di masse sempre crescenti. Sia infatti $F(t)$ una funzione *decrescente* dell'argomento t; la soluzione e lo studio del problema dipendono dall'equazione:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\frac{F(t)}{r^2}\,. \tag{2}$$

Facciamo nella (2) $t = -\tau$ e poniamo $F(t) = \psi(\tau)$: avremo essendo $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{[d(-t)]^2}$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{c^2}{r^3} - K\frac{\psi(\tau)}{r^2}\,. \tag{3}$$

Ora nella (3) $\psi(\tau)$ è una funzione *crescente* di τ, se quindi immaginiamo studiato il movimento definito dalla (3), potremo anche considerare come studiato il movimento definito dalla (2).

4. Il Tommasetti e lo Zarlatti dànno nella loro Nota tre leggi del movimento che indicano con le lettere α) β) γ) e, nel Bollettino ne aggiun-

gono una quarta che indicano con la lettera δ). Scrivo in colonna le une accanto le altre le leggi del Tommasetti e dello Zarlatti e le mie. Bene inteso, tolgo le parole tra parentesi che si riferiscono alle masse decrescenti, e che, per quanto ho detto, non ci dànno nulla di nuovo.

ARMELLINI.

Legge VII. « Se in un istante qualsiasi t_1 la conica osculatrice alla traiettoria è un'ellisse o una parabola, in tutti gl' istanti successivi la conica osculatrice sarà certamente ellittica ».

(Nota II, pag. 298).

Teor. II. « [Se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] e se r ammette un limite superiore L, allora crescendo il tempo, r diviene minore di ogni quantità assegnata ».

(Nota I, pag. 683).

Legge VI. « Se in un istante qualsiasi la differenza tra la semiforza viva e la funzione delle forze per il punto B è nulla o negativa, allora [se $M(t)$ diviene ∞ per $t=\infty$] crescendo il tempo r diviene minore di ogni quantità assegnata ».

(Nota II, pag. 296).

« Affinchè l'urto dei due corpi (in senso fisico, cioè affinchè r divenga $< \varepsilon$) avvenga certamente, *qualunque siano le condizioni iniziali del moto*, non basta che $M(t)$ divenga ∞ per $t=\infty$; ma occorre che essa lo divenga di ordine non inferiore al primo. Per es. se la massa solare crescesse secondo la legge $a+b\sqrt{t}$, *alcune comete iperboliche potrebbero sfuggire alla sua attrazione* ».

(Nota II, pag. 299).

TOMMASETTI e ZARLATTI.

α) « Pour $F(t)$ croissant, si à un instant t_1 la conique osculatrice est une ellipse ou parabole, en tous les instants successifs elle sera toujours elliptique ».

(Bulletin, page 156, et C. R.).

β) « Si $F(t)$ pour $t=\infty$ tend vers ∞, et si r admet une limite supérieure R, on a $\lim\limits_{t=\infty} r=0$ ».

(Bulletin, page 157, et C. R.).

γ) Si à un instant donné la conique osculatrice est une parabole ou ellipse et $\lim\limits_{t=\infty} F(t)=\infty$ il en resulte $\lim\limits_{t=\infty} r=0$.

(Bulletin, page 159, et C. R.).

δ) « Pour toute loi $F(t)$ telle que $\lim\limits_{t=\infty} F(t)=\lim\limits_{t=\infty}(A)t^n$ où $0<n<1$, *quelque comète hyperbolique pourrait échapper à l'attraction du soleil* ».

(Bulletin, page 159).

« Si $\lim\limits_{t=\infty} F(t)=\lim\limits_{t=\infty}|A|t^n$ ou $n>1$, on a le choc ».

(Id., page 158).

5. Come il lettore vede i risultati sono identici. Dobbiamo però osservare che è erroneo asserire come fanno il Tommasetti e lo Zarlatti, nelle proprietà β) e γ) che $\lim_{t=\infty} r = 0$; noi sappiamo solo, come io pubblico, che r diviene inferiore ad ogni quantità assegnata: cioè che è sempre possibile trovare un istante t_1 tale che in esso sia $r < \varepsilon$; o, in altre parole, che esso ha per limite *inferiore* lo zero.

Ed è facile anzi di costruire degli esempî in cui, benchè r rimanga sempre minore di L, *e benchè* M(t) *cresca all'infinito, pure r non tende ad alcun limite.* Il più semplice è di supporre che la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio.

L'orbita terrestre risulta allora composta di una successione di ellissi, la cui distanza perieliaca va sempre decrescendo, mentre la distanza afeliaca resta costante. Se la massa solare crescesse in tal modo all'infinito, il raggio vettore r diverrebbe, ad ogni rivoluzione, inferiore ad ogni quantità assegnata, perchè la distanza perieliaca andrebbe a zero; ma nello stesso tempo la r non tenderebbe ad alcun limite, perchè ad ogni rivoluzione la terra riprenderebbe l'antica distanza afeliaca.

L'errore nei risultati proviene dalla mancanza di rigore nelle dimostrazioni, dove il Tommasetti e lo Zarlatti applicano spesso con poca cautela l'operazione del passaggio al limite; *spesso senza domandarsi nemmeno se questo limite esiste.*

Per es., volendo dimostrare il teorema β) gli autori dicono: « Pour démontrer la première partie de ce théorème remarquons qu'à l'instant $t = \infty$ le corps m decrira l'orbite osculatrice limite ». Sarà bene osservare che in molti casi l'orbita osculatrice limite per $t = \infty$ *non esiste.* Essa esiste soltanto quando gli elementi osculatori per $t = \infty$ tendono verso limiti ben determinati, e ciò non sempre avviene. La dimostrazione non è quindi soddisfacente.

Veniamo al teorema γ). Gli autori scrivono che se $e(t_1) < 1$ si ha $e(t) < 1$ *e ciò è perfettamente vero.* Essi ne deducono $\lim_{t=\infty} e(t) < 1$; *e ciò non è esatto.* Possiamo vederlo subito tornando a studiare l'orbita terrestre nel caso in cui la massa solare aumenti bruscamente tutte le volte che la terra è al suo afelio. Il valore attuale dell'eccentricità $e(t_1)$ è minore di 1; $e(t)$ resta ancora sempre minore dell'unità; eppure il limite per $t = \infty$ di $e(t)$ è *precisamente eguale ad 1.* Infatti la distanza perieliaca tende a zero; mentre quell'afeliaca resta costante. La quantità $\frac{c^2/\mathrm{F}(t)}{1 - e(t)}$ potrebbe quindi avere un limite diverso da zero, annullandosi nello stesso tempo il numeratore e il denominatore; tutta la dimostrazione è perciò priva di valore.

6. Per giungere all'equazione della traiettoria io comincio dall'esprimere la somma delle masse M(t) in funzione (approssimata) dell'anomalia vera ϑ. Giungo in tal modo all'equazione (Nota II, pag. 301)

$$(4)\quad r=\frac{c^2/K}{m+\left[G_1+\int_0^{\vartheta}\lambda(\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta\right]\cos\vartheta-\left[G_2+\int_0^{\vartheta}\lambda(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\right]\mathrm{sen}\,\vartheta}\,.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti (Comptes Rendus; Bulletin, page 165) partono dall'integrale delle aree

$$(5)\qquad r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c\,,$$

da cui ricavano (supponendo $t=0$ per $\vartheta=0$)

$$(6)\qquad t=\frac{1}{c}\int_0^{\vartheta}r^2\,d\vartheta\,;$$

eseguiscono la quadratura (6) col teorema della media, e ottengono:

$$(7)\qquad t=\alpha\vartheta\,.$$

Il Tommasetti e lo Zarlatti cadono anche qui in errore scrivendo, tanto nel Bollettino che nei Comptes Rendus, che α è una *costante incognita. Se α fosse costante, dalla* (7) *l'anomalia vera ϑ sarebbe proporzionale al tempo t, e l'orbita risulterebbe circolare.*

L'errore proviene dal fatto che i due autori non hanno posto attenzione al limite superiore dell'integrale (6) che è variabile. In ogni modo giunti a questa, sia pure erronea, conclusione, il Tommasetti e lo Zarlatti non dovevano far altro che sostituire di nuovo il valore di ϑ dato dalla (7) nella (5). Avrebbero immediatamente trovato come equazione della traiettoria un cerchio di raggio $r=\sqrt{c\alpha}$.

Invece essi hanno amato di seguire la strada già da me battuta esprimendo, anche loro, le masse in funzione dell'anomalia vera ϑ. Pongono dunque $\mu(t)=\mu(\alpha\vartheta)$ e ottengono, *trattando α come una costante*,

$$\frac{d^2\frac{1}{2}}{d\xi^2}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{r}=\frac{F(\xi)}{\alpha^2c^2}\qquad(\alpha\vartheta=\xi)$$

equazione che naturalmente è erronea; da essa infine ricavano:

$$(8)\quad r=\frac{1}{\left\{A_1-\frac{1}{\alpha c^2}\int_0^{\vartheta}\mu(\alpha\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta\right\}\cos\vartheta+\left\{B_2+\frac{1}{\alpha c^2}\int_0^{\vartheta}\mu(\alpha\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\right\}\mathrm{sen}\,\vartheta}\,.$$

Formalmente anche la (8) è errata, giacchè α essendo funzione di ϑ, non può essere portata al di fuori del segno d'integrazione. *Ma soprattutto occorre osservare che, poichè α è una funzione incognita, il problema deve considerarsi come non risoluto.*

Possiamo però determinare α con una certa approssimazione ponendo, p. es., $\mu(t) = m + \lambda(\vartheta)$; dove $m = \mu(0)$ e $\lambda(\vartheta)$ è una funzione che nei casi pratici assume valori assai piccoli di fronte ad m, e può essere approssimativamente determinata nel modo che io spiego nella mia seconda Nota. Ma allora si torna alla (4) ed in tale ordine d'idee è a me che spetta la priorità.

Il Tommasetti e lo Zarlatti hanno tratto dalla (8) parecchie conclusioni nella forma della traiettoria, sempre supponendo α costante. *Inutile dire che tutte queste conclusioni vengono rese prive di valore, dal fatto che α è invece una funzione incognita di ϑ.*

7. Domando ora il permesso di riprodurre una parte di una comunicazione a me diretta dallo Zarlatti, anche a nome del Tommasetti, in cui essi credono di trovare alcuni errori nella mia opera. Poichè in realtà questi errori non sussistono, credo utile di occuparmi della questione con lo scopo precipuo di evitare, un'eventuale inutile polemica.

Dice dunque lo Zarlatti:

« . . . . . ed è per questa semplice ragione che non abbiamo creduto opportuno di citarle (le mie Note), perchè avremmo dovuto mettere in rilievo degli errori (???) ecc. ecc.

« Secondo le sue Note dei Lincei, p. es. *tutte* (???) le comete iperboliche nell'ipotesi di masse crescenti, per leggi $F(t)$ tali che $\lim_{t=\infty} F(t) = \lim_{t=\infty} At^n$ ove $n < 1$, *avrebbero dovuto* al limite allontanarsi indefinitamente dal sole (??), il che è falso.

« Inoltre, si rammenti che, nel *caso generale*, le variazioni dell'eccentricità sono dello stesso ordine di quelle del parametro (C. R., e Bulletin) [1] quindi (??)., la formola che lei scrive

$$r = \frac{p/1 + \varepsilon t}{1 + e_0 \cos \vartheta} \tag{9}$$

è falsa (???) ».

Evidentemente il Tommasetti e lo Zarlatti hanno letto con troppa fretta i miei lavori, *altrimenti si guarderebbero dal trovare erronee delle proposizioni, che io non ho mai nè pubblicato, nè scritto, nè pensato.*

Io ho detto: « Affinchè l'urto dei due corpi avvenga certamente, qualunque siano le condizioni iniziali del moto, non basta che $M(t)$ divenga « ∞ per $t = \infty$, ma occorre che lo divenga di ordine non inferiore al primo. « Per es. se la massa del sole crescesse secondo la legge $a + b\sqrt{t}$, *alcune*

[1] Mi sia permesso di osservare che assai prima del Tommasetti e dello Zarlatti, questa verità era stata dimostrata dallo Strömgren (Astr. Nachr., 3897); il quale non solo ha fatto vedere che tutte queste perturbazioni sono dello stesso ordine di grandezza, ma ha dato anche formole comodissime per calcolarle.

« comete iperboliche *potrebbero* sfuggire alla sua attrazione ed allontanar-
« sene indefinitamente » (Nota II, pag. 299). *E questo è verissimo.*

Ho scritto dunque « *alcune comete iperboliche potrebbero* » e non già « *tutte le comete iperboliche dovrebbero* ». Prego caldamente il lettore di verificare la dicitura, per accertarsi egli stesso, con i propri occhi, dell'esattezza di quanto scrivo.

Del resto, il teorema fondamentale nell'urto, è stato trovato da me (Nota I); ed io non credo di essere illogico a tal punto da dare esempi contrarii ad una proposizione, che io stesso ho scoperto e dimostrato per primo.

La seconda osservazione dello Zarlatti non è meno stupefacente.

Siamo perfettamente d'accordo che *nel caso generale*, le perturbazioni dell'eccentricità e del parametro sono dello stesso ordine di grandezza. Ma io ho detto (*e l'ho stampato anche in corsivo perchè non sfugga all'attenzione del lettore*) che la (9) è valida quando la quantità di materia cosmica che cade sul sole, si supponga costante, cioè nel *caso in cui la massa sia funzione lineare del tempo.* Non comprendo però, perchè il Tomasetti e lo Zarlatti attribuiscono a me la (9). Ogni studioso di meccanica celeste sa benissimo che questa formola, che non solo non è errata, ma costituisce uno dei più eleganti risultati ottenuti in questa teoria, è dovuta al Lehmann; ed io ho detto chiaramente nella mia Nota che io non ho in questo altro merito che di esservi arrivato in due righe, partendo dalla (4), mentre il Lehmann v'impiega qualche pagina di calcolo. Non solo, ma ho anche citato scrupolosamente la rivista e il fascicolo in cui il Lehmann la pubblicò.

8. Termino questa Nota con una breve osservazione. Alla pag. 160 del Bollettino i due autori arrivano alla seguente conclusione: « Pour F(t) « *croissant*, l'excentricité des coniques osculatrices est la somme d'une « fonction *décroissante* du temps et d'un terme *oscillant* ». È facile verificare l'inesattezza di questa conclusione ricorrendo al solito esempio dell'orbita terrestre, nel caso in cui la massa solare aumenti tutte le volte che la terra è all'afelio. Qui l'eccentricità va *crescendo e non presenta alcuna oscillazione.*

Inutile avvertire il lettore che io ho fatto costantemente uso di questo esempio, solo perchè è estremamente semplice: ma che se ne potrebbero trovare molti altri; anche imponendo ad F(t) la condizione di essere continua, derivabile ecc.

Meccanica. — *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'Idrodinamica* [1]. Nota del prof. T. Boggio, presentata dal Corrisp. E. Almansi.

1...... La formula (3) della Sua Nota, testè pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia: *Sopra le azioni le quali si esercitano fra corpi che si muovono o si deformano entro una massa liquida*, dalla quale Ella ha dedotto così eleganti applicazioni ai corpi pulsanti, mi pare possa dedursi immediatamente dal teorema di Herz, sulla variazione del flusso.

Ecco in qual modo:

Sia $\mathbf{u}(P, t)$ un vettore funzione regolare di P e di t, cioè funzione finita e continua, colle derivate prime, del punto P e del tempo t; tale vettore sia definito in una regione S dello spazio, la quale supponiamo fissa o variabile col tempo.

Sia poi σ una superficie chiusa, contenuta in S, superficie che potrà comunque muoversi o deformarsi col tempo; e indichiamo con $\mathbf{v}$ la velocità del suo punto generico P all'istante t.

Il teorema di Herz sulla variazione del flusso, è allora espresso dalla formula [2]:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n}\times\mathbf{u})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\, d\sigma\,,$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale alla superficie σ.

Ciò premesso, poniamo

$$\mathbf{u} = \varphi\mathbf{a}\,,$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante, e φ è un numero funzione regolare di P e di t; ricordando che [3]

$$\mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\,,$$

la (1) porge:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n}\times\mathbf{a})}{\partial t}\, d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\varphi\times\mathbf{a}\, d\sigma\,.$$

[1] Estratto di lettera del prof. T. Boggio al prof. E. Almansi.

[2] Cfr. Burali-Forti et Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique, et à la physique mathématique*, pag. 116, form. (12) (Paris, Hermann, a. 1910).

[3] Cfr. i citati *Éléments*, pag. 73, form. (4).

Ora, supponendo il vettore **a** unitario, e parallelo all'asse Ox, la quantità $\mathbf{n}\times\mathbf{a}$ vale il coseno dell'angolo che la normale forma coll'asse Ox, ed $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ è la proiezione (con segno), sulla normale, della velocità del punto P, mentre $\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}$ vale la derivata parziale di φ rispetto ad x; la formula precedente coincide quindi colla Sua formula (3).

Ritenendo poi, nella formula precedente, **a** vettore costante arbitrario, esso può essere portato fuori degli integrali, e quindi, per l'arbitrarietà di **a**, si conclude:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\varphi\mathbf{n})}{\partial t} d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\varphi\, d\sigma\,. \tag{2}$$

La (1) può considerarsi come una formula fondamentale, come lo è il teorema della divergenza, da cui essa è stata dedotta; da tale formula se ne possono dedurre moltissime altre, procedendo nell'identico modo con cui nell'opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Transformations linéaires* (1) (Pavia, Mattei e C., a. 1912), dal citato teorema della divergenza si sono dedotte le altre formole di trasformazione di integrali, date nei nn. 55, 56, 58.

Così, ad es., ponendo $\mathbf{u} = K\alpha\mathbf{w}$ nella (1), ove α è un'omografia vettoriale e **w** un vettore, funzioni regolari di P e di t, ed osservando che {*T. l*, pag. 32, [1]; e pag. 79, [3]}

$$\mathbf{n}\times K\alpha\mathbf{w} = \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w} \quad , \quad \operatorname{div}(K\alpha\mathbf{w}) = I_1\left(K\alpha\frac{d\mathbf{w}}{dP}\right) + \operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\,,$$

si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{w})}{\partial t} d\sigma + \\ + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\left\{I_1\left(K\alpha\frac{d\mathbf{w}}{dP}\right) + \operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{w}\right\} d\sigma\,.$$

Se il vettore **w** è costante, nell'ultimo integrale un termine si annulla; e portando poi il **w** fuori degli integrali, per l'arbitrarietà di esso, si deduce

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \alpha\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\alpha\mathbf{n})}{\partial t} d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\alpha\, d\sigma\,.$$

Se l'omografia α si riduce ad un numero φ, questa formula diventa identica alla (2).

Supponendo l'omografia α assiale, e cioè della forma $\mathbf{u}\wedge$, con **u** vettore funzione regolare di P e di t, questa formula porge, osservando che $\operatorname{grad}(\mathbf{u}\wedge) = -\operatorname{rot}\mathbf{u}$, {*T. l.*, pag. 84, [2]},

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{u}\wedge\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{u}\wedge\mathbf{n})}{\partial t} d\sigma - \int_\sigma \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.\operatorname{rot}\mathbf{u}\, d\sigma\,;$$

(1) Nel seguito, citeremo quest'opera colla notazione {*T. l.*}.

in particolare, supponendo $\mathbf{u} = \varphi(P - O)$, ove φ è un numero funzione regolare di P e di t, ed osservando che $\text{rot}\, \mathbf{u} = \text{grad}\, \varphi \wedge (P - O)$, { *T. l.*, pag. 79, [2] }, si ha:

$$(2') \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(P - O) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}(P - O) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma + \\ + \int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{v} \,.\, (P - O) \wedge \text{grad}\, \varphi\, d\sigma \,.$$

Se la superficie σ fosse aperta, si otterrebbero formule analoghe alle precedenti, partendo dal teorema della variazione del flusso per le superficie aperte, che è espresso da (¹)

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\mathbf{n} \times \mathbf{u})}{\partial t} d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n} \times [\mathbf{v} \,.\, \text{div}\, \mathbf{u} + \text{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]\, d\sigma \,.$$

2. Profittando dell'occasione, permetta che La intrattenga ancora su un'altra formula generalissima, che ha molte applicazioni nell' Idrodinamica.

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre vettori funzioni finite e continue, colle loro derivate prime, del punto P, variabile in uno spazio finito e fisso τ, limitato dalla superficie chiusa σ.

La formula in questione è allora la seguente (²):

$$(3) \qquad \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{w}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma - \\ - \int_\tau \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \text{div}\, \mathbf{v}\, d\tau - \int_\tau \left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{u}\, d\tau \,,$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ e diretto all'interno di τ.

La dimostrazione è semplicissima; si fa partendo dal teorema della divergenza, espresso dalla formula

$$(4) \qquad \int_\tau \text{div}\, \mathbf{u}\, d\tau = -\int_\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{u}\, d\sigma \,, \qquad \{T.\ l., \text{pag. } 108, [1]\},$$

ponendovi $(\mathbf{u} \times \mathbf{w})\, \mathbf{v}$ al posto di $\mathbf{u}$. Osservando che

$$\text{div}\,[(\mathbf{u} \times \mathbf{w})\, \mathbf{v}] = \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \text{div}\, \mathbf{v} + \text{grad}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v} \,, \quad \{T.\ l., \text{pag. } 79, [2]\}$$

$$= \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \text{div}\, \mathbf{v} + \left(K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{w} + K\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{u}\right) \times \mathbf{v} \,, \quad \{T.\ l, \text{pag. } 81, [1]\}$$

$$= \mathbf{u} \times \mathbf{w} \,.\, \text{div}\, \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{w} + \left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\mathbf{v}\right) \times \mathbf{u} \,, \quad \{T.\ l., \text{pag. } 32, [1]\} \,,$$

(¹) Cfr. i citati *Éléments*, pag. 115, form. (11).

(²) Questa formula è pure stata riportata nella recente opera: Burali-Forti et Marcolongo, *Applications à la mécanique et à la physique*, pag. 140 (Pavia, Mattei e C., a. 1913).

si deduce, dalla (4),

$$\int_\tau \left[\mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}+\left(\frac{d\mathbf{w}}{dP}\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{u}\right]d\tau=-$$

$$-\int_\sigma \mathbf{u}\times\mathbf{w}\,.\,\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,d\sigma\,,$$

che è precisamente la (3).

Se i vettori $\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\,,\mathbf{w}$, sono, all'infinito, infinitesimi d'ordine conveniente, la (3) vale pure se τ indica il campo indefinito esterno alla superficie σ.

Per mezzo della (3) si possono dedurre facilmente, dal principio di Hamilton, le equazioni idrodinamiche di Eulero. Adoperando invece gli ordinarî metodi cartesiani, i calcoli risultano complicatissimi, come si può vedere nell'opera di W. Wien, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, § 10, pag. 47 (Leipzig, Hirzel, a. 1900), ove si trova, fra altro, una formula che occupa circa un'intera pagina!

Supponendo che il vettore $\mathbf{w}$ sia costante, esso può essere portato fuori degli integrali; e allora, per l'arbitrarietà di $\mathbf{w}$, dalla (3) si trae

$$\int_\tau \frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\,d\tau=-\int_\sigma \mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{n}\,d\sigma-\int_\tau \mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau\,. \tag{5}$$

Ponendo, nella (5), $(P-O)\wedge\mathbf{u}$ al posto di $\mathbf{u}$, ove O indica un punto fisso, si deduce:

$$\int_\tau (P-O)\wedge\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v}\right)d\tau=-\int_\sigma (P-O)\wedge\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\times\mathbf{n}\,d\sigma- \tag{6}$$

$$-\int_\tau (P-O)\wedge\mathbf{u}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau+\int_\tau \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,d\tau\,.$$

Queste formule sono utilissime in Idrodinamica. Ne ho già fatte diverse applicazioni [1] al calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.

Le equazioni cartesiane equivalenti, che sono alquanto complicate, sono state assegnate e adoperate dal prof. Cisotti per stabilire il paradosso del d'Alembert [2].

[1] Boggio, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910; *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide*, Rendiconti di questa Accademia, ser. 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911.

[2] Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª, a. 1910.

Se, in particolare, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \text{grad}\,\varphi$, ove φ è un numero funzione regolare di P, la (5) porge, applicando formule note }*T. l.*, pag. 81, [1]; : pag. 77, [3]{,

$$\frac{1}{2}\int_\tau \text{grad}\,(\text{grad}\,\varphi)^2\,d\tau = -\int_\sigma \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,d\sigma - $$
$$- \int_\tau \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div}\,\text{grad}\,\varphi\,d\tau\,.$$

Il primo membro, col teorema del gradiente }*T. l.*, pag. 108, [3]{, si trasforma in $-\int_\sigma (\text{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n}\,d\sigma/2$; perciò dall'eguaglianza precedente risulta:

$$\int_\sigma \mathbf{U}\,d\sigma = -\int_\tau \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div}\,\text{grad}\,\varphi\,d\tau\,, \tag{7}$$

avendo posto, per brevità,

$$\mathbf{U} = \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n} - (\text{grad}\,\varphi)^2\,\mathbf{n}/2\,. \tag{8}$$

Questa formula è dovuta al prof. Levi-Civita [1], il quale ne ha fatto utili applicazioni.

Se la funzione φ è armonica (cioè $\text{div}\,\text{grad}\,\varphi = 0$), il secondo membro della (7) sparisce, e si ottiene la formula (7) della Sua Nota.

Nelle stesse ipotesi, la (6) porge:

$$\int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \frac{1}{2}\,\text{grad}\,(\text{grad}\,\varphi)^2\,d\tau = -\int_\sigma (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,d\sigma -$$
$$- \int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div}\,\text{grad}\,\varphi\,d\tau\,.$$

Il primo membro può scriversi $-\int_\tau \text{rot}\,[(\text{grad}\,\varphi)^2\,(\text{P} - \text{O})]\,d\tau/2$; quindi, applicando il teorema della rotazione }*T. l.*, pag. 108, [2]{, esso si trasforma in $-\int_\sigma (\text{grad}\,\varphi)^2\,(\text{P} - \text{O}) \wedge \mathbf{n}\,d\sigma/2$; e perciò, ricordando la (8), si ha la formula seguente, analoga alla (7):

$$\int_\sigma (\text{P} - \text{O}) \wedge \mathbf{U}\,d\sigma = -\int_\tau (\text{P} - \text{O}) \wedge \text{grad}\,\varphi\,.\,\text{div}\,\text{grad}\,\varphi\,d\tau\,. \tag{9}$$

Se la funzione φ è armonica, il secondo membro si annulla.

3. Sia ora C un corpo, che potrà comunque muoversi e deformarsi col tempo; e sia σ la sua superficie.

Supponiamo, come ha fatto Lei, che il corpo C sia immerso in una massa liquida, limitata, oltrechè da σ, da una superficie Σ, la quale potrà

[1] Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIV, parte 2ª, a. 1905.

risultare di più superficie, fisse o mobili, rigide o deformabili, ed anche coincidere, in tutto o in parte, colla sfera all'infinito.

L'azione esercitata sul corpo C dal liquido si può caratterizzare per mezzo del vettore risultante **R**, e del momento risultante **M** (rispetto ad un punto arbitrario O) del sistema di pressioni elementari che il liquido esercita sui singoli elementi $d\sigma$ della superficie σ del corpo C.

I due vettori **R**, **M** sono espressi da

$$\mathbf{R} = -\int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = -\int_\sigma p(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

ove p è l'intensità della pressione in un qualunque punto P di σ, e $\mathbf{n}$ è un vettore unitario, normale a σ, e diretto all'interno della massa liquida.

Se φ è il potenziale di velocità, e si suppone incompressibile il liquido, e la sua densità eguale ad 1, le equazioni idrodinamiche si compendiano nell'unica relazione:

$$p = -\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{cost^e},$$

mentre la condizione d'incompressibilità esprime che la funzione φ deve essere armonica.

Si ha allora, dalle formule precedenti,

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\, \mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, \mathbf{n}\, d\sigma,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

Trasformiamo gli ultimi termini colle (2), (2'); risulta:

$$\mathbf{R} = \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\, \mathbf{n} - \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \mathrm{grad}\,\varphi \right\} d\sigma + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

$$\mathbf{M} = \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n} - \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathrm{grad}\,\varphi \right\} d\sigma + \\ + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Ora osserviamo che, in un punto P di σ, $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ essendo la proiezione, sulla normale, della velocità di P, rappresenterà pure la proiezione, sulla stessa normale, della velocità della particella liquida attigua a P; onde si avrà

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{n}\,;$$

sostituendo nelle formule precedenti, e ricordando la (8), si ottiene:

$$
(10)\quad \begin{cases} \mathbf{R} = -\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\,, \\ \mathbf{M} = -\int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \dfrac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,. \end{cases}
$$

Indichiamo ora con s una superficie chiusa, che contenga C nel suo interno, e tale che lo spazio compreso fra σ ed s sia totalmente occupato dal liquido. Potremo applicare le (7), (9) all'insieme di queste due superficie, ed avremo, φ essendo armonica,

$$
\int_\sigma \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s \mathbf{U}\, ds = 0 \quad , \quad \int_\sigma (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, d\sigma + \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, ds = 0\,;
$$

quindi, dalle (10), segue:

$$
\mathbf{R} = \int_s \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\,,
$$

$$
\mathbf{M} = \int_s (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{U}\, ds + \frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \mathbf{n}\, d\sigma\,.
$$

La prima di queste due formule concorda colla Sua formula (8).

Meccanica. — *Applicazione dei potenziali newtoniani della elasticità.* Nota II di PIETRO BURGATTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

5. La nota estensione dei metodi di Green all'equazione dell'elasticità, quando venga fatta nella maniera più opportuna, fa appunto vedere che i potenziali definiti nella Nota precedente costituiscono gli elementi analitici fondamentali di cotesta teoria.

Indicando con β e β', $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ rispettivamente due omografie e due vettori funzioni regolari dei punti P d'un campo S limitato dalla superficie σ, e soddisfacenti alla *relazione di reciprocità*

$$
(7)\qquad I_1\left(\mathrm{K}\beta\,\frac{d\mathbf{s}'}{d\mathrm{P}}\right) = I_1\left(\mathrm{K}\beta'\,\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{P}}\right),
$$

si ottiene, da una nota formula [1],

$$
(8)\qquad \int_\mathrm{S} \operatorname{grad}\beta \times \mathbf{s}'\,.\,d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta\mathbf{n}\times\mathbf{s}'\,.\,d\sigma =
$$

$$
= \int_\mathrm{S} \operatorname{grad}\beta' \times \mathbf{s}'\,.\,d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta'\mathbf{n}\times\mathbf{s}\, d\sigma\,;
$$

[1] *Analyse vect. générale*, tomo I, pag. 111, formula (2). Per le applicazioni dell'analisi vettoriale alla teoria dell'elasticità, vedi il volume 2° della stessa opera.

relazione fondamentale, che contiene tutte le relazioni del tipo di quelle comunemente chiamate lemmi di Green nella teoria dei potenziali ordinarii.

Supponiamo che sia $\operatorname{grad}\beta' = 0$, e che $\mathbf{s}'$ risulti infinito in un solo punto O di S come $\frac{1}{r}$ $(r = \operatorname{mod}(P - O))$, pur ritenendo soddisfatta la (7). In questo caso la (8) non ha più luogo. Possiamo però isolare il punto O con una sferetta σ_0 di centro O e raggio ε, e applicare la (8) allo spazio S_1 compreso fra σ e σ_0, ove $\beta\beta'$, $\mathbf{s}\mathbf{s}'$ son regolari. Si ottiene

$$(8') \qquad \int_{S_1} \operatorname{grad}\beta \times \mathbf{s}' dS_1 + \int_\sigma (\beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s})\, d\sigma = \\ = \int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma_0 - \int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}'\, d\sigma_0 .$$

Essendo $d\sigma_0 = \varepsilon^2 d\Omega$, ove $d\Omega$ è l'elemento superficiale della sfera unitaria, si ha

$$\int_{\sigma_0} \beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}'\, d\sigma_0 = \varepsilon \int_\Omega \beta\mathbf{n} \times \varepsilon\mathbf{s}'\, d\Omega ;$$

che, per le ipotesi fatte, tende a zero con ε. Inoltre

$$\int_{\sigma_0} \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma_0 = \mathbf{s}_1 \times \varepsilon^2 \int_\Omega \beta'\mathbf{n}\, d\Omega ,$$

ove $\mathbf{s}_1$ è un opportuno valore di $\mathbf{s}$ fra quelli che $\mathbf{s}$ assume sopra σ_0. Supposto

$$(9) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \int \beta'\mathbf{n}\, d\Omega = \mathbf{c} \text{ (costante)} ,$$

la (8′) diventa, al limite,

$$(10) \qquad \mathbf{s}(O) \times \mathbf{c} = \int_\sigma (\beta\mathbf{n} \times \mathbf{s}' - \beta'\mathbf{n} \times \mathbf{s})\, d\sigma + \int_S \operatorname{grad}\beta \times \mathbf{s}'\, dS ,$$

ove $\mathbf{s}(O)$ è il valore di $\mathbf{s}$ nel punto O. Altra formula fondamentale, che contiene tutte le formule particolari di questo tipo che si adoperano nella fisica matematica.

Ciò posto, veniamo ai problemi dell'equilibrio elastico dei corpi omogenei isotropi. Nelle formule precedenti, siano $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}'$ gli spostamenti relativi a due deformazioni elastiche infinitesime; β e β' le corrispondenti omografie delle tensioni interne (dilatazioni). La (7) è soddisfatta, perchè $I_1\left(\beta \frac{d\mathbf{s}'}{dP}\right)$ e $I_1\left(\beta' \frac{d\mathbf{s}}{dP}\right)$ vengono a rappresentare la stessa forma bilineare nelle componenti delle definite deformazioni. Inoltre prendiamo $\mathbf{s}' = \gamma\mathbf{a}$, che è il

potenziale newtoniano elementare dell'elasticità definito nella Nota precedente. Risulta, allora,

$$\operatorname{grad} \beta' \equiv \mathrm{E}(\gamma \mathbf{a}) = 0 ;$$

e, per le proprietà dette, si vede che è applicabile la (10). Bisognerà però calcolare il limite di $\int_{\sigma_0} \beta' \mathbf{n} \, d\sigma_0$ sulla sferetta di raggio ε, quando ε tende a zero. Per note formule, si ha, nel nostro caso [1],

$$-\frac{\beta' \mathbf{n}}{\varrho} = (\Omega^2 - 2\omega^2) \operatorname{div}(\gamma \mathbf{a}) . \mathbf{n} - 2\omega^2 \, \mathrm{D} \frac{d\gamma \mathbf{a}}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} . \qquad (\varrho = \text{densità})$$

Prendendo $\gamma \mathbf{a}$ nella forma

$$\gamma \mathbf{a} = (\Omega^2 + \omega^2) \frac{\mathbf{a}}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{a} \right) (\mathrm{P} - \mathrm{O}) ,$$

dopo alcuni calcoli, che qui omettiamo per brevità, si trova

$$-\frac{\beta' \mathbf{n}}{2\varrho\omega^2} = -\omega^2 \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{a} \right) \mathbf{n} + \omega^2 \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{n} \right) \mathbf{a} +$$

$$+ \Omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} - (\Omega^2 - \omega^2) \left(\mathbf{a} \times \frac{\partial \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) (\mathrm{P} - \mathrm{O}) ;$$

e integrando quindi sopra σ_0, si ottiene facilmente ($\mathbf{n}$ normale esterna a σ_0)

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\sigma_0} \beta' \mathbf{n} \, d\sigma_0 = 8\pi\omega^2\Omega^2\varrho \mathbf{a} .$$

Questo è il valore di $\mathbf{c}$ nel caso presente; perciò la (10) diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\varrho \mathbf{s}(\mathrm{O}) \times \mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}} \operatorname{grad} \beta \times \gamma \mathbf{a} \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \beta \mathbf{n} \times \gamma \mathbf{a} \, d\sigma - \int_\sigma \beta' \mathbf{n} \times \mathbf{s} \, d\sigma .$$

Indicando con $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_\sigma$ rispettivamente le forze di massa e superficiali che conservano l'equilibrio nella deformazione definita da $\mathbf{s}$, si ha per le equazioni dell'equilibrio,

$$\operatorname{grad} \beta = \varrho \mathbf{F} \quad , \quad \beta \mathbf{n} = \mathbf{F}_\sigma ;$$

perciò la precedente diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2 \mathbf{s}(\mathrm{O}) \times \mathbf{a} = \int_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \times \gamma \mathbf{a} \, d\mathrm{S} + \frac{1}{\varrho} \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \gamma \mathbf{a} \, . \, d\sigma - \int_\sigma \frac{\beta' \mathbf{n}}{\varrho} \times \mathbf{s} \, d\sigma .$$

[1] *Analyse vect. gén.*, tomo II, cap. II.

Infine, introducendo l'omografia

$$\lambda = (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\gamma\,,\mathbf{n}) + 2\omega^2 \frac{d\gamma}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n} - \omega^2\,\mathrm{H}'(\mathrm{Rot}\,\gamma\,,\mathbf{n}) = \lambda(\gamma\,.\,\mathbf{n}),$$

funzione di γ e $\mathbf{n}$, facilmente si trova

$$-\beta'\mathbf{n} = \varrho\lambda(\gamma\,,\mathbf{n})\,\mathbf{a} \quad (^1).$$

Allora l'ultima formula diventa

$$8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(\sigma)\times\mathbf{a} = \int_S \mathbf{F}\times\gamma\mathbf{a}\,dS + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma\times\gamma\mathbf{a}\,d\sigma + \int_\sigma \lambda(\gamma\,,\mathbf{n})\,\mathbf{a}\times\mathbf{s}\,d\sigma$$

$$= \int_S \gamma\mathbf{F}\times\mathbf{a}\,dS + \int_\sigma \gamma\mathbf{F}_\sigma\times\mathbf{a}\,ds + \int_\sigma \mathbf{K}\lambda(\gamma\,,\mathbf{n})\,\mathbf{s}\times\mathbf{a}\,d\sigma\,;$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$,

$$(11) \qquad 8\pi\omega^2\Omega^2\,\mathbf{s}(0) = \int_S \gamma\mathbf{F}\,dS + \int_\sigma \gamma\mathbf{F}_\sigma\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{K}\,\lambda(\gamma\,,\mathbf{n})\,\mathbf{s}\,d\sigma\,,$$

che compendia, in sostanza, sotto una nuova forma, le note formule fondamentali del Somigliana. I primi due integrali e una parte del terzo, quello corrispondente al termine medio di λ, sono appunto i potenziali newtoniani dell'elasticità considerati in principio. Si ha dippiù, nel terzo integrale, una parte dipendente da particolari potenziali ordinarii; per la ragione che alla equazione $\mathrm{E}\mathbf{s} = 0$ si soddisfa anche in modo speciale mediante certi potenziali ordinarii. Come si vede, dunque, i detti potenziali dell'elasticità entrano come elementi essenziali nelle formule fondamentali, e la conoscenza *a priori* delle loro proprietà facilita lo studio dei varii problemi, e rende più espressive le formule. Anche il metodo diretto qui seguìto per giungere alla (11), mi sembra notevole.

6. Introducendo l'operatore

$$\mathrm{E}' = \Omega^2\Delta' - (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad\ div}$$

(che potrà chiamarsi l'*associato di* E, perchè si deduce da E con lo scambio di Ω^2 con ω^2), si deduce

$$\gamma\mathbf{a} = \Omega^2\Delta'_0(r\mathbf{a}) - (\Omega^2 - \omega^2)\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0(r\mathbf{a}) = \mathrm{E}'_0(r\mathbf{a})\,.$$

Osservando poi che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_\sigma$ non dipendono da 0, subito risulta

$$\int_S \gamma\mathbf{F}\,dS = \mathrm{E}'_0\left(\int_S r\mathbf{F}\,dS\right) \quad , \quad \int_\sigma \gamma\mathbf{F}_\sigma\,d\sigma = \mathrm{E}'_0\left(\int_\sigma r\mathbf{F}_\sigma\,d\sigma\right).$$

(1) In generale con $\mathrm{H}'(\alpha\,,\mathbf{a})$ intendiamo quell'omografia funzione dell'omografia α, e del vettore $\mathbf{a}$, tale che per ogni $\mathbf{b}$ risulti $\mathrm{H}'(\alpha,\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$.

Inoltre, essendo, per le cose dette,

$$\gamma = \Omega^2 \Delta_0 r - (\Omega^2 - \omega^2) \frac{d \operatorname{grad}_0 r}{dr},$$

facilmente si trova

$$\left(\frac{d\gamma}{dP}\mathbf{n}\right)\mathbf{s} = \mathbf{E}'_0\left(\mathbf{s}\frac{\partial r}{\partial n}\right);$$

e, quindi,

$$\int_\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial n}\mathbf{s}.d\sigma = \mathbf{E}'_0\left(\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\mathbf{s}.d\sigma\right).$$

Queste formole fanno vedere le relazioni che passano fra i potenziali newtoniani dell'elasticità e gli ordinarii potenziali (vettori) biarmonici; e dànno ragione dell'importanza che questi ultimi acquistarono nelle moderne ricerche sulla teoria dell'elasticità (specialmente nei lavori del prof. Almansi).

Rispetto all'ultimo integrale della (11), con opportuni calcoli, che qui tralasciamo, si trova

$$\int_\sigma \mathbf{K}\lambda(\gamma,\mathbf{n})\,\mathbf{s}.d\sigma = \mathbf{E}'_0\left\{\omega^2(2\omega^2 - \Omega^2)\operatorname{grad}_0\varphi - \omega^2 \operatorname{rot}_0 \mathbf{n} + 2\omega^2\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\mathbf{s}.d\sigma\right\},$$

ove

$$\varphi = \int_\sigma (\mathbf{n}\times\mathbf{s})\,r\,d\sigma \quad , \quad \mathbf{n} = \int_\sigma (\mathbf{n}\wedge\mathbf{s})\,r\,d\sigma;$$

per conseguenza, posto

$$\mathbf{s}_1 = \int_S r\mathbf{F}\,dS + \frac{1}{\varrho}\int_\sigma r\mathbf{F}_\sigma\,d\sigma + \\ + \omega^2\left\{(2\omega^2 - \Omega^2)\operatorname{grad}_0\varphi - \operatorname{rot}_0\mathbf{n} + 2\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n}\mathbf{s}\,d\sigma\right\},$$

la (11) assume la forma

$$8\pi\omega^2\Omega^2\mathbf{s}(0) = \mathbf{E}'_0\,\mathbf{s}_1. \tag{12}$$

Dunque ogni $\mathbf{s}$, atto a rappresentare la soluzione d'un problema d'equilibrio elastico, può assumere la forma (12). Questa proposizione è l'inversa di un'altra, ben nota, del Boussinesq; secondo la quale si può sempre soddisfare all'equazione indefinita dell'equilibrio elastico con

$$\bar{s} = \mathbf{E}'(\bar{u}),\ \text{ove}\ \ \Delta'\Delta'\bar{u} = -\frac{1}{\omega^2\Omega^2}\mathbf{F}.$$

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* Nota I di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

La presente Nota è dedicata alla ricerca delle formole di rappresentazione degli integrali delle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi, cioè di quelle formole della dinamica elastica che corrispondono alla formola di Green relativa all'equazione di Laplace, o alle formole di Somigliana relative alle equazioni dell'equilibrio elastico. La ragione che mi spinge alla presente pubblicazione, dipende dal porre in evidenza il carattere, che le dette formole hanno, di dare lo stato di vibrazione all'esterno di una superficie σ chiusa, quando questa si può ritenere bordo di onda all'inizio del moto, cioè quando le funzioni date sopra σ sono definite solo per gli istanti successivi ad uno assegnato. Le formole di rappresentazione richieste saranno perciò di utilità nella risoluzione del problema *esterno* della dinamica elastica nella forma che ad esso diedi ultimamente [1].

Il metodo qui seguìto mostra la non necessarietà di imporre condizioni di convergenza all'infinito delle funzioni incognite, poichè ad ogni istante il moto è racchiuso internamente a superficie tutte al finito; e inoltre non richiede nel moto quel carattere di permanenza che sarebbe acquistato solo per tensioni e velocità agenti *da tempo infinitamente remoto sulla superficie σ portante i dati.*

In un'altra Nota mostrerò che le formole trovate, come la formola di Green per l'equazione di Laplace, forniscono, nella forma che qui è data ad esse, un metodo di integrazione per le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici.

Noterò, infine, che le considerazioni qui svolte si riattaccano ai metodi introdotti dal Volterra [2] nella scienza, e già con eguale intendimento applicati dal Tedone nella Memoria: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei, isotropi* (Acc. reale delle scienze di Torino, tomo XLVII, 1897), allo stesso problema delle vibrazioni dei corpi elastici. Il metodo da me seguìto si differenzia da quello di quest'ultimo autore per la concezione fisica della propagazione di onde, e quindi per gli spazî a cui le integrazioni sono estese.

[1] Nella mia Memoria in corso di pubblicazione: *Sopra il problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LXIV, serie I.

[2] *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, Acta math., tomo XVIII.

1. Il modo con cui intendo la propagazione del moto all'esterno di una superficie σ chiusa convessa (moto generato in uno spazio indefinito, occupato da un mezzo elastico, isotropo, nel quale è una cavità), è il seguente: Sopra σ, da un istante $t=0$ in poi, sono date delle tensioni (o delle velocità); inizialmente il mezzo è in quiete. Ad un istante $t>0$ qualunque, considero due superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$ ottenute da σ portando sopra le sue normali verso l'esterno, a partire dai punti di σ stessa, dei tratti at, bt. Lo spazio compreso tra σ e $\sigma_t^{(b)}$ contiene i punti la cui vibrazione è decomponibile in una parte trasversale, ed una longitudinale. Per la continuità dello spostamento, la vibrazione longitudinale si annulla sopra $\sigma_t^{(a)}$, la trasversale sopra $\sigma_t^{(b)}$. La posizione del problema riesce più chiara quando ci riferiamo allo spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t), considerando quindi il tempo come una coordinata. Considero allora il cilindroide Σ a generatrici parallele all'asse t la cui sezione con l'iperpiano $t=0$ è la superficie σ, e le due ipersuperficie Σ_a, Σ_b, le cui generatrici hanno come proiezioni sopra $t=0$ le normali a σ, e le cui pendenze, rispetto allo stesso iperpiano, sono $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$. Le sezioni di queste ipersuperficie con l'iperpiano $t=\tau$ sono le superficie $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$. Le funzioni che caratterizzano la vibrazione longitudinale sono definite nello spazio compreso tra Σ e Σ_a; quelle che definiscono la vibrazione trasversale sono definite tra Σ e Σ_b. Le prime si annullano sopra Σ_a, le altre sopra Σ_b. Entrambe sono determinate dal generare tensioni sopra Σ, equilibranti quelle date.

Ricercheremo le formole di rappresentazione per gli integrali di questo problema.

2. Il mezzo possa propagare solo onde longitudinali (mezzo fluido). Sia c la velocità di propagazione delle onde; l'equazione caratteristica del moto sarà:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi . \tag{1}$$

La formola di rappresentazione degli integrali di questa equazione (formola di Kirchhoff) si otterrà considerando, oltrechè il cilindroide Σ e la Σ_c (costruita come è indicato nel num. precedente), un cono Σ_1 di equazione

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{c^2} \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} ,$$

un cilindro Σ_2 di raggio ϱ e il cui asse è la retta

$$x=\xi , \ y=\eta , \ z=\zeta .$$

Nello spazio compreso tra $\Sigma, \Sigma_c, \Sigma_1, \Sigma_2$ si ha, se φ, ψ sono funzioni regolari in questo spazio e soddisfacenti la (1),

$$\int_{\Sigma+\Sigma_c+\Sigma_1+\Sigma_2} (\varphi D_\nu \psi - \psi D_\nu \varphi)\, d\Sigma = 0, \tag{2}$$

nella quale si è posto

$$D_\nu = c^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \nu} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial t}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial t},$$

ν essendo la normale interna. Si ponga

$$\psi = \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r}.$$

Si ha perciò, sopra Σ_1,

$$\psi = D_\nu \psi = 0 .$$

Sopra Σ_c si ha poi:

$$\varphi = D_\nu \varphi = 0 .$$

Quindi, osservando che sopra Σ si ha

$$D_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \qquad n = \text{normale esterna a } \sigma ,$$

e sopra Σ_2

$$D_\nu \varphi = c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} ,$$

con un passaggio al limite per $\varrho = 0$, dalla (2) si ricava

$$\int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \left(- \varphi \frac{t-\tau}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dt = \tag{3}$$

$$= 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} \varphi \, . \, (t - \tau)\, dt ,$$

dove r_0 è la minima distanza del punto (ξ, η, ζ) dalla σ.

Dalla (3), con due derivazioni rispetto a τ, si ricava la formola di Kirchhoff [1].

[1] Per i dettagli di questo calcolo, cfr. la mia Nota, *Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde*, Acc. sc. Torino, vol. 48, 1912-13. Nella seconda e penultima formola di pag. 397 vi è un errore che, però, nessuna conseguenza porta sulla esattezza del risultato.

Ho voluto, per sommi capi, ripetere il ragionamento che conduce, mi sembra, nel modo più naturale, alla formola di Kirchhoff, per mostrare che mediante esso, con facile generalizzazione, si può giungere pure rapidamente alle formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica. Basterà, in luogo della (2), applicare la formola di reciprocità del Betti, e, in luogo dell'integrale $\frac{t-\tau+\frac{r}{c}}{r}$, usare degli spostamenti dovuti ad un centro di forza (formole di Stokes) nella forma ad essi data dal Somigliana [1] e da me lievemente modificata nella Memoria già citata.

3. Premetto una formola relativa alle equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici, equazioni che pongo sotto la forma:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La W è il potenziale elastico unitario, ed $e_{xx}, \ldots$ sono le componenti di deformazione. Sieno (u, v, w) (u', v', w') due terne di funzioni regolari in uno spazio S a quattro dimensioni, limitato da una ipersuperficie Σ chiusa. In S, queste due terne di funzioni verifichino le (4). Dal sistema (4), con metodi notissimi, si ricava:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(u'\dfrac{\partial u}{\partial t} + v'\dfrac{\partial v}{\partial t} + w'\dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial u'}{\partial t} - v\dfrac{\partial v'}{\partial t} - w\dfrac{\partial w'}{\partial t}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xx}} + v'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xy}} + w'\dfrac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right) + \cdots \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xx}} + v\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xy}} + w\dfrac{\partial W'}{\partial e'_{xz}}\right) - \cdots \end{cases}$$

In essa, W′ è il potenziale elastico relativo alle (u', v', w'), e $e'_{xx} \ldots$ sono le corrispondenti componenti di deformazione. Integrando la (5) allo spazio S e usando della solita formola di trasformazione di un integra e di volume in integrale di superficie, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left(u'\frac{\partial u}{\partial t} + \cdots - u\frac{\partial u'}{\partial t} - \cdots\right) d\Sigma = \\ = \int_\Sigma \Bigg[u'\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) + \cdots \\ - u\left(\frac{\partial W'}{\partial e'_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial e'_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) - \cdots \Bigg] d\Sigma, \end{aligned}$$

[1] *Sulla propagazione delle onde dei mezzi isotropi*, Acc. sc. Torino, vol. XLI, an. 1905.

dove la n è la normale interna a Σ. Si ponga:

$$U = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yx}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$V = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$W = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\frac{\partial z}{\partial n},$$

e posizioni analoghe per le U', V', W'. L'ultima formola diverrà:

$$\int (u'U + v'V + w'W - uU' - vV' - wW')\,d\Sigma = 0 . \tag{6}$$

4. Consideriamo le ipersuperficie $\Sigma, \Sigma_a, \Sigma_b$ del n. 1, i coni caratteristici $\Sigma_a^{(1)}, \Sigma_b^{(1)}$ di equazioni

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{a^2} \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$(t-\tau)^2 = \frac{r^2}{b^2}$$

e un cilindroide Σ_2 di raggio ϱ e coassiale con questi coni.

Sia n la normale interna a Σ_a (facente cioè, con l'asse t, angolo acuto); ν la normale a $\sigma_t^{(a)}$ nel punto corrispondente. Avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial \nu}\cos(n,\nu) = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\partial x}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} .$$

Sopra Σ_a avremo dunque:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left\{ a\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta}\right\}, \ldots ,$$

essendo X_ν, Y_ν, Z_ν la tensione attraverso l'elemento superficiale di $\sigma_t^{(a)}$ di normale ν e δ la densità. Analogamente, sopra Σ_b si ha:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left\{ b\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{X_\nu}{\delta}\right\},$$

e formole simili si hanno sopra $\Sigma_a^{(1)}$ e $\Sigma_b^{(1)}$. Sopra Σ e sopra Σ_1 si ha, invece,

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{\partial t}{\partial \varrho} = 0 .$$

Qnindi, sopra queste superficie, rispettivamente si ha:

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\nu$$

$$U = -\frac{1}{\delta} X_\rho .$$

Supporremo che la propagazione all'esterno di σ avvenga per modo che sia

$$u = u_1 + u_2 \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad w = w_1 + w_2$$

nello spazio compreso tra Σ e Σ_b; e

$$u = u_1 \quad , \quad v = v_1 \quad , \quad w = w_1$$

nello spazio compreso tra Σ_b e Σ_a. Le (u_1, v_1, w_1) definiscono una vibrazione longitudinale; le (u_2, v_2, w_2) una vibrazione trasversale. Per la continuità dello spostamento, si ha:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

da cui consegue [1]:

$$a \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(1)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_a$$

$$b \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{X_\nu^{(2)}}{\delta} = 0 \quad \text{sopra } \Sigma_b ,$$

e formole analoghe. Le $X_\nu^{(1)}, Y_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(1)}$ sono le tensioni dovute allo spostamento (u_1, v_1, w_1); e le $X_\nu^{(2)}, Y_\nu^{(2)}, Z_\nu^{(2)}$ quelle dovute allo spostamento (u_2, v_2, w_2).

L'applicazione della (6) ad una vibrazione generica regolare e ad una vibrazione dovuta ad un centro di forza, condurrà alle richieste formole di rappresentazione, come mostreremo in una prossima Nota.

[1] Cfr. la mia Memoria citata, cap. I; e Love, *Wave-motions with discontinuities on the front*, Proc. Lond. Math. Soc., 1904.

Matematica. — *Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Le curve sghembe di (ossia le cui tangenti appartengono a) un complesso lineare di rette, si presentano in molte quistioni e sono state oggetto di ricerche da parte di Lie, Appell, Koenigs, Picard ecc. È quindi utile di possedere un criterio per riconoscere se una curva sghemba *data* appartiene, oppur no, ad un complesso lineare.

F. Egan [1] ha dimostrato che fra la curvatura σ e la torsione τ di una di tali curve passa una relazione, che involge anche le derivate τ' e τ'' di τ rispetto all'arco s. Noi invertiremo tale risultato; anzi, adoperando i metodi della *geometria intrinseca*, ritroveremo rapidamente la relazione di Egan, dimostreremo che essa caratterizza le curve di un complesso lineare e, data una di tali curve, daremo il modo di costruire il complesso a cui appartiene. Poi, accoppiando questo risultato con un altro del Picard, perverremo ad un criterio per riconoscere se una data superficie rigata [2] appartiene, oppur no, ad una congruenza lineare.

2. Affinchè una curva sghemba C appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che esistano una costante p ed una retta r [3], tali che ogni tangente t di C soddisfi alla relazione:

$$\text{dist}(r\,,\,t)\,\text{tang}(r\,,\,t) = p\,. \tag{1}$$

Siano $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ le coordinate di r rispetto al triedro (mobile) formato dalla tangente t, dalla binormale e dalla normale principale di C nel punto estremo dell'arco s. Esse saranno funzioni di s legate dalle relazioni

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,, \tag{2}$$ $$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0\,; \tag{3}$$

[1] *The linear complex and a certain class of twisted curves,* Proceedings of the Royal Irish Academy, section A, Dublin, vol. XXIX, 1911, pag. 29.

[2] Non sviluppabile; poichè in una congruenza lineare, che non degeneri nel sistema delle rette di un piano, non esistono superficie sviluppabili.

[3] p è il *parametro,* ed r è l'asse del complesso lineare. Non può essere $p = 0$ (ossia il complesso non può essere *speciale*), altrimenti le tangenti di C si appoggerebbero ad r, e la C sarebbe piana.

e poichè r deve restare immobile al variare di s, esse dovranno anche soddisfare alle seguenti *condizioni di immobilità* [1]:

$$(4) \qquad \alpha' - \sigma\gamma = 0 \;,\quad \beta' - \tau\gamma = 0 \;,\quad \gamma' + \sigma\alpha + \tau\beta = 0 \,,$$

$$(5) \qquad \xi' - \sigma\zeta = 0 \;,\quad \eta' - \tau\zeta = 0 \;,\quad \zeta' + \sigma\xi + \tau\eta + \beta = 0 \,,$$

ove gli accenti indicano derivate rispetto ad s. Essendo poi $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \gamma_0 = \xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ le coordinate di t, si ha [2]

$$\text{momento}\,(r\,,t) = \text{dist}\,(r\,,t)\,\text{sen}\,(r\,,t) = -\Sigma(\alpha\xi_0 + \alpha_0\,\xi) = -\xi\,,$$

e, inoltre, $\cos(r\,,t) = \alpha$; quindi la (1) diventa

$$(6) \qquad \xi = -p\alpha\,.$$

Risolvere la questione proposta, equivale a cercare le condizioni di compatibilità delle equazioni (2), (3), (4), (5) e (6) nelle $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$.

Ora, derivando la (6), si ha, per le (4) e (5),

$$(7) \qquad \zeta = -p\gamma\,;$$

derivando ancora, si ha, per le (4), (5) e (6),

$$(8) \qquad \eta = -p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)\beta\,;$$

sostituendo (6), (7) e (8) in (3), si ha

$$(9) \qquad \beta = \sqrt{-p\tau}\,;$$

poi dalle ultime due equazioni (4) si ha successivamente

$$(10) \qquad \gamma = \frac{\tau'}{2\tau^2}\sqrt{-p\tau} \quad , \quad \alpha = \frac{2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4}{4\tau^3}\sqrt{-p\tau}\,.$$

Infine, sostituendo nella (2) i valori (9) e (10) di α, β, γ, si ha:

$$(11) \qquad \frac{(2\tau\tau'' - 3\tau'^2 + 4\tau^4)^2}{16\tau^5\sigma^2} + \tau + \frac{\tau'^2}{4\tau^3} = -\frac{1}{p}\,.$$

Viceversa; se la (11) è soddisfatta, le funzioni $\alpha\,\beta\,\gamma\,\xi\,\eta\,\zeta$ di s, definite dalle (6), ..., (10), soddisfanno al sistema (2), ..., (5). Ciò risulta dal procedimento da noi seguìto.

Dunque: *affinchè una curva sghemba* C, *definita dalle equazioni intrinseche* $\sigma = \sigma(\tau)\,, \tau = \tau(s)$, *appartenga ad un complesso lineare, è necessario e sufficiente che la funzione primo membro di* (11) *sia una co-*

[1] Cfr. E. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca*, cap. IX, § 3, Napoli, 1895.
[2] Ibid., cap. IX, § 7.

stante $-\frac{1}{p}$; *il corrispondente complesso ha per parametro p e per asse la retta* $r(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta)$ *definita dalle* (6), ..., (10).

Affinchè il complesso sia reale, occorre e basta, per le (9) e (10), che τ abbia un segno costante, opposto a quello di p. Ne segue che: *le curve sghembe reali di un complesso lineare reale sono tutte o sempre destrorse o sempre sinistrorse.*

Notiamo, per finire, che il primo termine della (11) non può essere identicamente nullo, altrimenti, per la seconda delle (10), sarebbe $\alpha = 0$, ossia le tangenti di C sarebbero tutte ortogonali alla retta r, sicchè la C sarebbe piana, contro il supposto.

3. Ora consideriamo una superficie rigata R, non sviluppabile, sulla quale assumiamo come linee coordinate v le asintotiche rettilinee (generatrici); e siano

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2\,, \tag{12}$$

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''dv^2\,, \tag{13}$$

le forme differenziali quadratiche che la definiscono. Le linee v sono asintotiche, quindi è $\mathrm{D} = 0$; e sono rette (geodetiche), quindi è $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$ [1].
La (13) si riduce a

$$2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2\,, \tag{14}$$

sicchè l'equazione differenziale delle asintotiche C del secondo sistema è

$$2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''\,dv = 0\,. \tag{15}$$

Per un'asintotica C la curvatura σ e la torsione τ coincidono rispettivamente con la curvatura geodetica e con la torsione geodetica, e però valgono [2]

$$\sigma = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{FD}'' - 2\mathrm{GD}'}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}''}{\Delta}\right)\right] \quad , \quad \tau = \frac{\mathrm{D}'}{\delta}\,, \tag{16}$$

[1] In generale $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ $(r, s, t = 1, 2)$ indicano i simboli di Christoffel costruiti con i coefficienti della (12). Notiamo incidentalmente che: *le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma* (12), *definita e positiva, rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata su cui le v siano le asintotiche rettilinee, sono*

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{-\mathrm{K}} + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0\,,$$

ove K *è la curvatura della forma.* La seconda condizione risulta subito da una delle due note formole di Codazzi, oppure da alcune formole che servono a risolvere una quistione più generale. Cfr. M. Picone, *Sulle superficie flessibili ed inestendibili in rigate*, pag. 29, Annali di mat., tomo XXII, 1914.

[2] Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª ed., vol. I, §§ 85 e 92, formole (4*) e (18).

ove si è posto

$$(17)\qquad \delta = \sqrt{EG - F^2} \quad , \quad \varDelta = \sqrt{ED''^2 - 4FD'D'' + 4GD'^2} \,.$$

Le asintotiche C sono anch'esse rette, solo quando è nullo il secondo membro della espressione (16) di σ; *ed allora* R *è una quadrica.* Escludendo questo caso, sarà $\sigma \neq 0$; e sarà pure $\tau \neq 0$, altrimenti le C sarebbero curve piane, e la R sarebbe sviluppabile (inviluppo dei piani delle C), contro l'ipotesi. È dunque lecito di imporre alle asintotiche C di soddisfare la (11), il che equivale ad imporre alla R di appartenere ad una congruenza lineare [1].

Ora, lungo un'asintotica C si ha, per la (15),

$$du = -\frac{D''}{2D'}\,dv \quad , \quad ds = \frac{\varDelta}{2D'}\,dv \,,$$

quindi

$$\frac{d}{ds} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial v} = \Omega \quad , \quad \frac{d^2}{ds^2} = \Omega(\Omega) = \Omega^2 \,,$$

ove Ω è l'operatore lineare

$$(18)\qquad \Omega \equiv \frac{1}{\varDelta}\left(2D'\frac{\partial}{\partial v} - D''\frac{\partial}{\partial u}\right);$$

dunque le derivate τ', τ'' della torsione τ di C rispetto al suo arco s valgono, per la seconda delle (16),

$$(19)\qquad \tau' = \Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right) \quad , \quad \tau'' = \Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right).$$

Per le (16) e (19), il primo membro della (11) si muta nella seguente funzione φ di u, v:

$$(20)\qquad \varphi = \frac{\left\{2\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right) - 3\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2 + 4\frac{D'^4}{\delta^4}\right\}^2}{16\frac{D'^5}{\delta^7}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD''-2GD'}{\varDelta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD'-ED''}{\varDelta}\right)\right\}^2} + \\ + \frac{D'}{\delta} + \frac{\delta^3}{4D'^3}\left[\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)\right]^2.$$

Pel teorema del § 2, essa deve ridursi ad una costante lungo ogni asintotica C: quindi dev'essere $\Omega(\varphi) = 0$. Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie rigata* R (*non sviluppabile, nè quadrica*),

[1] Poichè le superficie rigate di una congruenza lineare hanno la proprietà caratteristica, che ogni loro asintotica appartiene ad un complesso lineare. Cfr. Picard, *Traité d'analyse*, tom. I, cap. XII, § 29.

definita dalle (12) *e* (14). *appartenga ad una congruenza lineare, è che sia* $\Omega(\varphi)=0$.

4. Quando sulla R sono note le asintotiche C, e queste si assumono come linee coordinate u, alla condizione precedente si può dare una forma semplice ed elegante, trovata, per altra via, da M. Picone [1]: *il simbolo* $\left\{{22 \atop 1}\right\}$ *dev'essere il prodotto di una funzione della sola* u, *per una funzione della sola* v, *ossia*

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left\{{22 \atop 1}\right\}=0\,. \tag{21}$$

Accenniamo rapidamente a questa riduzione.

Essendo le u asintotiche, si ha $D''=0$: quindi

$$\varDelta=2D'\sqrt{G}\quad,\quad \Omega\equiv\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\,;$$

poi, per le formole di Codazzi [2],

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\delta}\right)=-2\left\{{12 \atop 2}\right\}\frac{D'}{\delta}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\delta}\right)=-2\left\{{12 \atop 1}\right\}\frac{D'}{\delta}\,; \tag{22}$$

quindi [3]

$$(a)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial u}=2\left\{{11 \atop 1}\right\}E+2\left\{{11 \atop 2}\right\}F\,,\quad \dfrac{\partial F}{\partial u}=\left\{{12 \atop 1}\right\}E+\left(\left\{{11 \atop 1}\right\}+\left\{{12 \atop 2}\right\}\right)F+\left\{{11 \atop 2}\right\}G\,,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial G}{\partial u}=2\left\{{12 \atop 1}\right\}F+2\left\{{12 \atop 2}\right\}G\,,\\ \dfrac{\partial E}{\partial v}=2\left\{{12 \atop 1}\right\}E+2\left\{{12 \atop 2}\right\}F\,,\quad \dfrac{\partial F}{\partial v}=\left\{{22 \atop 1}\right\}E+\left(\left\{{12 \atop 1}\right\}+\left\{{22 \atop 2}\right\}\right)F+\left\{{12 \atop 2}\right\}G\,,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial G}{\partial v}=2\left\{{22 \atop 1}\right\}F+2\left\{{22 \atop 2}\right\}G\,.\end{cases}$$

$$\Omega\left(\frac{D'}{\delta}\right)=-\frac{2D'}{\delta\sqrt{G}}\left\{{12 \atop 1}\right\},$$

$$\Omega^2\left(\frac{D'}{\delta}\right)=-\frac{2D'}{\delta G}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{{12 \atop 1}\right\}-2\left\{{12 \atop 1}\right\}^2-\frac{F}{G}\left\{{12 \atop 1}\right\}\left\{{22 \atop 1}\right\}-\left\{{12 \atop 1}\right\}\left\{{22 \atop 2}\right\}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FD''-2GD'}{\varDelta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2FD'-ED''}{\varDelta}\right)=$$

$$=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}}=\frac{\delta^2}{G\sqrt{G}}\left\{{22 \atop 1}\right\}.$$

(1) *Sulle congruenze rettilinee* W, Rend. del Circ. mat. di Palermo, tomo XXXVII, nn. 15 e seg.; ed altra Memoria in corso di stampa (ivi).

(2) Cfr. Bianchi, loc. cit., pag. 120, formole (IV*).

(3) Si ricordino le formole (cfr. Bianchi, loc. cit., § 31).

Sostituendo questi valori nella (20) e ricordando la formola [1]

$$(23) \qquad -G\frac{D'^2}{\delta^2}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+ \\ +\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2,$$

si ha

$$\varphi=\frac{GN^2}{\delta D'}+\frac{D'}{\delta}+\frac{\delta}{GD'}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2,$$

ove si è posto per semplicità

$$(24) \qquad N=\frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} \text{ [2]}.$$

Ora dobbiamo esprimere che $\Omega(\varphi)=0$, ossia che $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$; con ciò otteniamo

$$\frac{N^2}{\delta^2}\left(\frac{\partial G}{\partial v}-G\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-4G\frac{\partial\log\delta}{\partial v}\right)+\frac{2GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{D'^2}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}- \\ -\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}-\frac{1}{G^2}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{2}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0;$$

poi, sostituendo a $\frac{\partial G}{\partial v}$ il suo valore (a), a $\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{D'}{\delta}$ il suo valore tratto dalla (22), a $\frac{D'^2}{\delta^2}$ il suo valore (23), ed a $\frac{\partial\log\delta}{\partial v}$ il suo valore $\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+$ $+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$ [3], otteniamo

$$\frac{FN^2}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{GN}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{N}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

oppure, essendo $N\neq 0$,

$$\frac{FN}{\delta^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0;$$

[1] Cfr. Bianchi, loc. cit., § 37. Si noti che $-D'^2:\delta^2$ è la curvatura K della nostra rigata.

[2] Si noti che N non può esser nulla identicamente, altrimenti sarebbe nullo il primo termine del primo membro della (11) su ogni asintotica C, le quali perciò sarebbero curve piane (cfr. la fine del § 2).

[3] Cfr. Bianchi, loc. cit., § 56.

poi, sostituendo a $\frac{\partial N}{\partial v}$ il valore tratto dalla (24),

$$\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left\{ {22 \atop 1} \right\}+\frac{G}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\left\{ {11 \atop 1} \right\}-\left\{ {12 \atop 2} \right\}-\frac{F}{G}\left\{ {12 \atop 1} \right\}\right]+$$
$$+\frac{FN}{\delta^2}\left\{ {22 \atop 1} \right\}+\frac{1}{G}\left\{ {12 \atop 1} \right\}\left\{ {22 \atop 1} \right\}=0\,.$$

Infine, eliminando $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{G}\right)$ mediante le (a), sostituendo ad N il suo valore (24), ed osservando che $\frac{\partial}{\partial v}\left\{ {12 \atop 2} \right\}=\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ [1], si riconosce che il primo membro dell'ultima uguaglianza stessa si riduce al suo primo termine, e che quindi l'uguaglianza stessa si riduce alla (21) del Picone.

Nota. Le quistioni qui trattate, con rappresentazioni e metodi di geometria differenziale *metrica*, lo erano già state con quelli della geometria differenziale *proiettiva* (Cfr. E. J. Wilczynsky, *Projettive differential geometry*, pag. 167, Leipzig, 1906).

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Memoria che conto di pubblicare tra breve, ho studiato varie questioni relative alla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale.

La trattazione delle stesse questioni nel caso di un conduttore cilindrico indefinito a sezione circolare, già da tempo è stata svolta in modo notevolmente semplice, stante la possibilità di prendere in esame delle propagazioni tipiche di onde elettromagnetiche, aventi, contemporaneamente, le tre proprietà di essere *sinusoidali*, *simmetriche* e *ciclomagnetiche*: tali cioè che — $(z\,,\varrho\,,\psi)$ essendo un sistema di coordinate cilindriche coll'asse coincidente coll'asse del conduttore — per esse:

1° la dipendenza del campo elettromagnetico da t e z è caratterizzata da un fattore complesso della forma $e^{i(\nu t+qz)}$ (ν e q costanti reali);

2° il campo elettromagnetico risulta indipendente da ψ;

3° le linee di forza magnetica sono circoli situati in piani normali all'asse del conduttore e aventi il centro su tale asse (e le linee di forza elettrica sono tutte contenute in piani meridiani del conduttore).

[1] È la condizione di integrabilità del sistema (20).

Iniziando le mie ricerche mi proposi, naturalmente, di procedere per analogia col caso già trattato, prendendo in esame le propagazioni di onde che in un conduttore toroidale fanno riscontro alle propagazioni tipiche del caso cilindrico, e ad esse si riducono al crescere indefinito del raggio della circonferenza direttrice del toro.

Ma a ciò si opponeva, almeno a prima vista, una difficoltà, per il fatto che, potendosi escludere anche solo in base a un esame superficiale delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico che tali propagazioni fossero simmetriche rispetto alla direttrice del toro, risultava fallace il criterio che prima di ogni altro si affacciava alla mente per individuarle. Onde si presentava la questione di dare alle propagazioni tipiche del caso cilindrico una caratterizzazione che si prestasse meglio della primitiva loro definizione a determinare le propagazioni corrispondenti del caso toroidale.

Una caratterizzazione energetica avrebbe certamente fatto al caso mio: le semplici considerazioni che seguono mostrano che non è difficile pervenirvi effettivamente, permettendo di stabilire che le propagazioni in questione sono caratterizzate, dentro la totalità delle propagazioni sinusoidali di eguali periodi rispetto a t e z, dal fatto che per esse, in corrispondenza a un determinato valore dell' intensità efficace della corrente, ad ogni istante risulta minimo il calore di Joule (ed anche il valore dell'energia magnetica) relativo a un qualunque tratto del conduttore limitato da due piani perpendicolari al suo asse.

Questo è il risultato principale contenuto nella mia Nota: soltanto, l'ultimo paragrafo del lavoro è dedicato a stabilire, con considerazioni che non escono dall'ambito naturale del lavoro, alcune proprietà integrali delle fuuzioni di Bessel, che non mi consta siano state finora rilevate e che mi sono riuscite utili nelle ricerche, cui ho già accennato, relative ai conduttori toroidali.

2. Consideriamo un campo elettromagnetico avente per sede un cilindro metallico indefinito, la cui sezione sia un cerchio di raggio r.

Colle notazioni consuete, dentro il conduttore, potendosi ivi trascurare la corrente di spostamento di fronte alla corrente di conduzione, in base alle equazioni fondamentali di Heaviside-Hertz, avremo

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}. \end{cases}$$

In conseguenza, assunto come sistema di riferimento il solito sistema di coordinate cilindriche (z, ϱ, ψ), per $\varrho \leq r$ risulterà [1]:

[1] Per le espressioni effettive delle componenti del rotore in un generico sistema di coordinate ortogonali cfr. ad es.: *Max Abraham. Enc. der Math. Wiss.* IV, 14, n. 20.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathrm{E}_z = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathrm{H}_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial \mathrm{H}_\rho}{\partial\psi} \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathrm{E}_\rho = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \mathrm{H}_\psi}{\partial z} \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathrm{E}_\psi = \dfrac{\partial \mathrm{H}_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial\varrho} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathrm{E}_\psi) - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial \mathrm{E}_\rho}{\partial\psi} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_\rho}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \mathrm{E}_\psi}{\partial z} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_\psi}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{E}_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

3. Corrispondentemente alle singole terne di valori possibili per z, ϱ, t consideriamo i valori medi rispetto a ψ delle componenti di **E** ed **H**:

$$\mathrm{E}_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{E}_z\,d\psi \ \text{ ecc.} \quad ; \quad \mathrm{H}_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{H}_z\,d\psi \ \text{ ecc.}$$

Dalle (1), (2) segue

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathrm{E}_z^{(m)} = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathrm{H}_\psi^{(m)}) \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathrm{E}_\rho^{(m)} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}_\psi^{(m)}}{\partial z} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_\psi^{(m)}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{E}_\rho^{(m)}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{E}_z^{(m)}}{\partial\varrho}\,. \end{cases}$$

Le (3) risultano suddisfatte allora [1] e allora soltanto che $\mathrm{E}_z^{(m)}, \mathrm{E}_\rho^{(m)}, \mathrm{H}_\psi^{(m)}$ siano dedotte da una soluzione $\Pi(z, \varrho, t)$ dell'equazione a derivate parziali

$$(4)\qquad \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)$$

mediante le posizioni

$$(5)\qquad \mathrm{E}_z^{(m)} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right), \quad \mathrm{E}_\rho^{(m)} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad \mathrm{H}_\psi^{(m)} = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\,.$$

[1] V. Sommerfeld, *Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes*. Ann. d. Phys. *67* (1893), pag. 233.

Nel seguito diremo *dedotto* da una soluzione Π reale o complessa della (4) ognuno degli (infiniti) campi elettromagnetici, pei quali i valori di $E_z^{(m)}, E_\rho^{(m)}, H_\psi^{(m)}$ sono legati a Π dalle relazioni (5): convenendo, naturalmente, di considerare come identici due di tali campi, appena coincidono per essi le parti reali delle singole componenti di **E** e di **H**.

È subito visto che si ha sempre un campo elettromagnetico dedotto da Π assumendo

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right), \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\psi = -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho},$$
$$E_\psi = H_z = H_\rho = 0 .$$

Tale campo elettromagnetico è evidentemente l'unico campo elettromagnetico simmetrico e ciclomagnetico dedotto da Π.

4. Sia C la totalità dei campi elettromagnetici dedotti da una medesima soluzione Π della (4). Ci proponiamo di dimostrare che in C il campo simmetrico e ciclomagnetico è caratterizzato dal fatto che ad ogni istante esso minimizza il calore di Joule corrispondente a un qualunque tratto del conduttore compreso tra due piani perpendicolari al suo asse. Per far ciò, osserviamo che per qualunque campo dedotto da Π dovrà essere

$$E_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right) + E_z^{(\psi)}, \quad E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z} + E_\rho^{(\psi)}, \quad E_\psi = E_\psi^{(\psi)},$$

$E_z^{(\psi)}, E_\rho^{(\psi)}, E_\psi^{(\psi)}$ essendo tali che per qualunque terna di valori di z, ϱ, t si abbia

$$\int_0^{2\pi} E_z^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\rho^{(\psi)}\,d\psi = \int_0^{2\pi} E_\psi^{(\psi)}\,d\psi = 0.$$

Se dunque diciamo Q il calore di Joule relativo al tratto del conduttore compreso tra i due piani $z = z_1$, $z = z_2$, avremo

$$Q = \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{R^2e(E_z) + R^2e(E_\rho) + R^2e(E_\psi)\right\} =$$
$$= \sigma\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho \left\{\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}R^2e(\Pi)\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 R^2e(\Pi)}{\partial\varrho\,\partial z}\right]^2\right\} +$$
$$+ \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^r \varrho\,d\varrho \left\{R^2e(E_z^{(\psi)}) + R^2e(E_\rho^{(\psi)}) + R^2e(E_\psi^{(\psi)})\right\}$$

ciò che evidentemente è sufficiente a provare l'asserto.

5. In modo del tutto analogo si potrebbe provare che in C il campo elettromagnetico simmetrico ciclomagnetico è caratterizzato anche dal fatto che ad ogni istante esso minimizza l'energia magnetica, sempre nel senso precisato al § 4.

6. Sia Π periodica rispetto a z, con periodo $\frac{2\pi}{q}$, e rispetto a t, con periodo $\frac{2\pi}{\nu}$: con che, nel nostro conduttore si avrà una propagazione di onde elettromagnetiche.

In tale ipotesi l'intensità totale della corrente attraverso una sezione normale del conduttore:

$$J = \sigma \int_0^r \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} E_z \, d\psi = -2\pi\sigma r \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r}$$

ammetterà anch'essa il periodo $\frac{2\pi}{q}$ rispetto a z, e il periodo $\frac{2\pi}{\nu}$ rispetto a t, e il valore medio del quadrato della sua parte reale

$$(6) \quad J^2_{eff} = \frac{\nu q}{4\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2_e(J) = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz \, R^2 e \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r},$$

ci darà il quadrato dell'intensità efficace della corrente.

Sempre restando in tale ipotesi, consideriamo la totalità delle propagazioni di onde elettromagnetiche dedotte dalle infinite soluzioni della (4) che non differiscono da Π altro che per una costante moltiplicativa reale [1] h. Fissare il valore di h, equivarrà a fissare il valore dell'intensità efficace della corrente; onde, come corollario di quanto abbiamo stabilito al paragrafo precedente, si può asserire che nella totalità di propagazioni di onde considerata, la propagazione che in corrispondenza a un determinato valore dell'intensità efficace minimizza, nel senso già precisato, il calore di Joule (l'energia magnetica), sarà sempre simmetrica e cilomagnetica.

7. Tra tutte le propagazioni di periodi $\frac{2\pi}{q}$, $\frac{2\pi}{\nu}$, si ottengono le propagazioni sinusoidali, quando a caratterizzare la dipendenza di Π da z e da t si assuma il fattore complesso $e^{i(qz+\nu t)}$. Precisamente se poniamo

$$\Pi = e^{i(qz+\nu t)} u(\varrho) .$$

e

$$K^2 = -\left(4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} + q^2\right),$$

[1] Più in generale, complessa ma di argomento assegnato.

si soddisfa alla (4) allora, e allora soltanto, che si faccia coincidere $u(\varrho)$, a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa (reale o complessa) colla J_0 di Bessel riferita all'argomento (complesso) $K\varrho$.

Essendo attualmente, per la (6) [1]:

$$J^2_{eff} = \nu q \sigma^2 r^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_0^{\frac{2\pi}{q}} dz\, R^2 e \left\{ e^{i(\nu t + qz)} \left(\frac{du}{d\varrho}\right)_{\varrho=r} \right\} = 2\pi^2\sigma^2 r^2 \left|\frac{du}{d\varrho}\right|^2_{\varrho=r},$$

il valore dell'intensità efficace non dipenderà dall'argomento della costante moltiplicativa, ma solo dal suo modulo: e lo stesso, come è subito visto, accadrà per il valore del calore di Joule e dell'energia magnetica. Fissando il valore dell'intensità efficace della corrente, individueremo dunque una semplice infinità di soluzioni della (4) per le quali le propagazioni simmetriche e longitudinali corrispondenti avranno in comune (cfr. § 5) in ogni tratto del conduttore i valori dei calore di Joule e dell'energia magnetica. Con ciò (sempre in base alle conclusioni del § 5) resta evidentemente acquisita la preannunziata caratterizzazione energetica della propagazioni di onde possibili nel nostro conduttore, che al tempo stesso risultano sinusoidali, simmetriche, e ciclomagnetiche.

8. *Dimostrazione di due identità relative alle funzioni cilindriche.* Poniamo

$$k^2 = -4\pi \frac{i\mu\nu\sigma}{c^2} \quad , \quad x = k\varrho :$$

dalle (1), (2) segue che qualunque sia (il numero intero e positivo) n, si ottiene una propagazione sinusoidale di onde elettromagnetiche (indipendente da z) possibile nel nostro conduttore, assumendo:

$$E_z = e^{i(n\psi+\nu t)} J_n(x) \;,\; H_\varrho = -\frac{nc}{\mu\nu}\frac{1}{\varrho} e^{i(n\psi+\nu t)} J_n(x) \;,\; H_\psi = \frac{ck}{i\mu\nu} e^{i(n\psi+\nu t)} J'_n(x)$$

$$E_\varrho = E_\psi = H_z = 0 .$$

Riferendoci a tale propagazione di onde, a un istante generico indichiamo rispettivamente con Q e T il valore (indipendente da z) del calore di Joule e dell'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore. Detti Q_m e T_m i valori medî di Q e T rispetto a t, avremo, in base alla definizione stessa di Q e T [2]:

[1] Si tenga presente che il valor medio rispetto a t del quadrato della parte reale di un'espressione complessa della forma $e^{i(\nu t+qz)}(a+ib)$ è dato da $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

[2] Cfr. la Nota precedente.

$$Q_m = \sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(E_z)\, dt \right\} = \pi\sigma \int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(x)|^2$$

$$T_m = \frac{\mu}{8\pi} \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\psi \left\{ \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R^2 e(H_z)\, dt + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} R_e^2(H_\psi)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{c^2}{8\mu\nu^2} \int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} |J_n(x)|^2 + |k|^2\, |J'_n(x)|^2 \right\}.$$

D'altra parte detto **U** il vettore complesso di Poynting — prodotto vettore di **E** per $\overline{\mathrm{H}}$ (¹) moltiplicato per $\frac{c}{8\pi}$ — e Φ il valore (indipendente da t) del flusso (entrante) di **U** attraverso la superficie S che limita il pezzo di conduttore considerato, deve pure essere:

$$Q_m = Re(\Phi) \quad , \quad T_m = \frac{1}{2\nu} Re\left(\frac{\Phi}{i}\right).$$

Ora su S la componente di **U** secondo la normale interna è diversa da zero soltanto in quella sua parte che appartiene anche alla superficie del conduttore ed ivi assume il valore

$$\frac{c}{8\pi} E_z \overline{H}_\psi = \frac{\sigma k}{2k^2} J_n(x)\, J'_n(\overline{x}).$$

Si perviene così alla conclusione che deve essere:

$$(6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho\, |J_n(k\varrho)|^2 = Re\left(\frac{k\overline{b}}{k^2} J_n(kb)\, J'_n(\overline{kb})\right) \\ \displaystyle\int_0^r \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{n^2}{\varrho^2} |J_n(k\varrho)|^2 + |k^2|\, |J'_u(k\varrho)|^2 \right\} = Re(\overline{k}b\, J_n(kb)\, J'_n(\overline{kb})). \end{cases}$$

Le (6) hanno validità, per qualunque valore di n, tutte le volte che k^2 sia un immaginario puro.

(¹) Rappresento, secondo il solito, con $\overline{\mathbf{H}}$ il vettore complesso coniugato di **H**.

Fisica. — *Sulla formazione della rugiada e della brina.*

Nota di Antonino Lo Surdo, presentata dal Corrisp. A. Garbasso.

La rugiada e la brina si depositano sulle superficie dei corpi raffreddati per il raggiamento contro la volta celeste; questo raggiamento è massimo per una superficie nera ed ha l'intensità

$$Q = \sigma\ (u^4 - \theta^4) \qquad (1)$$

dove σ indica la costante di emissione del corpo nero, u la temperatura assoluta della superficie radiante, e θ quella grandezza che io ho già definito come temperatura virtuale del cielo [1], la quale rappresenta la temperatura di un corpo nero in equilibrio di radiazione colla volta celeste. Il corpo esposto tende quindi a raffreddarsi quando, come avviene sempre di notte, $\theta < u$; e θ rappresenta il limite inferiore al quale tende la temperatura della superficie raffreddandosi per la radiazione notturna.

Ciò posto, risultano evidenti per la superficie *nera* e per la *grigia* le due seguenti condizioni:

1) *Per la formazione della rugiada e della brina è necessario che la temperatura virtuale del cielo sia più bassa della temperatura per la quale è massima la tensione del vapor d'acqua contenuto nell'aria in prossimità della superficie radiante.*

2) *Per la formazione della brina è necessario che la temperatura virtuale del cielo sia minore di quella del ghiaccio fondente.*

Consideriamo il caso semplice del raffreddamento di una lamina estesa, isolata termicamente per modo che lo scambio di calore avvenga soltanto per radiazione, dalla superficie superiore orizzontale che supponiamo nera.

Indichiamo con l lo spessore, ed esso sia piccolo così da potere trascurare le differenze di temperatura dentro la lamina, ϱ la densità del corpo, c il suo calore specifico, ed u la temperatura la quale risulterà funzione del tempo t. L'eguaglianza fra il calore perduto dalla lamina e quello raggiato si può rappresentare coll'equazione:

$$-\varrho l c \frac{du}{dt} = \sigma (u^4 - \theta^4)\,. \qquad (2)$$

[1] Nuovo Cimento. Fasc. di giugno 1913.

Integrando si ottiene:

$$(3) \qquad t = -\frac{\varrho l c}{2\sigma\theta^3}\left\{\frac{1}{2}\lg\frac{u-\theta}{u+\theta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\theta}\right\} + \text{cost}\,;$$

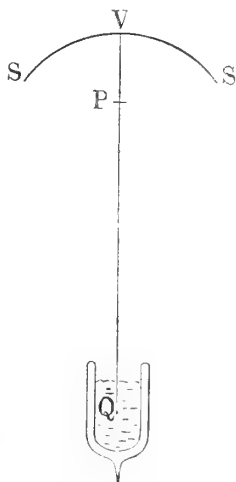
e ponendo $u = u_0$, per $t = 0$:

$$(4) \qquad t = \frac{\varrho l c}{2\sigma\theta^3}\left\{\frac{1}{2}\left[\lg\frac{u_0-\theta}{u_0+\theta} - \lg\frac{u-\theta}{u+\theta}\right] - \left[\operatorname{arctg}\frac{u_0}{\theta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\theta}\right]\right\}.$$

Questa espressione ci permette di calcolare il tempo che occorre perchè la lamina esposta verso un cielo a temperatura virtuale θ costante, si porti dalla temperatura iniziale u_0 alla temperatura u. Quindi se per u si pone la temperatura alla quale diventa massima la tensione del vapor d'acqua nell'aria, t indica il tempo di esposizione necessario perchè cominci la formazione della brina e della rugiada: tempo che al caso pratico deve considerarsi solo come un limite inferiore di quello effettivamente occorrente, che è maggiore a causa dello scambio di calore per convezione e del difetto di isolamento termico.

Per strati poco conduttori e di spessore rilevante non si può ammettere la uguaglianza della temperatura all'interno: essa allora dipende anche dalla distanza dalla superficie raggiante. Il caso più generale è quello di uno strato avente estensione e profondità indefinite, limitato da una superficie nera orizzontale radiante verso il cielo: ma il problema si presenta allora assai più complicato.

Una esperienza per mostrare la formazione della rugiada e della brina in condizioni di radiazione analoghe alle naturali si può facilmente eseguire esponendo una superficie raggiante verso un cielo artificiale a tempe ratura molto bassa, ma in modo che l'ambiente in prossimità della superficie non sia sensibilmente perturbato, colla seguente disposizione.

Uno specchio sferico metallico è disposto col suo asse V Q, verticale ed è rivolto in basso. Sull'asse, nell'intervallo tra il foco F ed il centro di curvatura, si dispone in P, la superficie raggiante orizzontale di piccola estensione rivolta verso l'alto. Tra la superficie P ed un corpo qualsiasi collocato nel piano coniugato avviene per mezzo dello specchio uno scambio di calore per radiazione, e se lo specchio avesse un potere riflettente unitario per le radiazioni che si scambiano, la superficie in P verrebbe a raggiare come se

invece che verso lo specchio fosse esposta sotto un cielo alla temperatura del corpo trovantesi in Q.

Nelle prove da me fatte il corpo radiante era costituito da un vetrino copri oggetti da microscopio, poggiato su un dischetto di feltro, il quale alla sua volta era sostenuto per mezzo di una asticella metallica orizzontale, sottile per ostacolare il meno possibile lo scambio di radiazione, fissata ad un sostegno laterale. Si aveva così un corpo radiante di piccola capacità termica, in certo modo isolato, il quale si può ritenere quasi nero per le onde di grande lunghezza.

Lo specchio era uno dei soliti ustori di ottone, della forma classica. La superficie radiante del vetrino non veniva completamente coperta dallo specchio, poichè il punto P risultava al di sotto del piano base della calotta sferica, ciò veniva a diminuire un poco l'estensione del cielo freddo, ma evidentemente l'effetto doveva essere di piccola entità, poichè diminuiva solo la radiazione con inclinazioni molto grandi.

Il punto Q veniva a trovarsi dentro un recipiente Dewar cilindrico contenente dell'aria liquida, molto ampio, perchè anche i raggi non centrali corrispondenti alle parti esterne dei fasci omocentrici provenienti dal vetrino vi potessero cadere dentro. Il liquido bolliva lentamente, e l'aria fredda si riversava traboccando dall'orlo, ma non dava perturbazioni sensibili poichè il Dewar era collocato in basso a sufficiente distanza dallo specchio.

Con questa disposizione, in un ambiente anche relativamente secco, nel quale cioè il punto di condensazione del vapor d'acqua era molto più basso della temperatura ambiente, si otteneva dopo qualche minuto di esposizione un abbondante deposito di rugiada sul vetrino: e per mostrare che essa era prodotta dalla radiazione bastava interporre uno schermo tra il vaso Dewar e lo specchio, anche al di sopra del vetrino; allora non si otteneva condensazione, e talvolta il deposito ottenuto prima si evaporava rapidamente.

Per ottenere la brina occorre che tanto la temperatura ambiente quanto quella per la quale la tensione del vapore d'acqua nell'aria diventa massima non siano molto al disopra dello zero; poichè se la condensazione del vapor d'acqua in forma di rugiada compensa il calore ceduto per la radiazione, la temperatura della lamina non può più abbassarsi. Ed ecco un esempio. Anche ammettendo che la radiazione avvenga contro un cielo alla temperatura dell'aria liquida, e trascurando tutte le cause che ostacolano il raffreddamento, se il punto di rugiada è al di sopra dello zero, in modo che la radiazione avvenga con un dislivello di 200° in cifra tonda, alla temperatura di $+10°$, il calore raggiato risulta al minuto circa 8.10^{-11} $(283^4 - 83^4)$, cioè circa 0,5 gr. cal. cm^2: per la compensazione basta un deposito di rugiada di gr. 0,0008 circa al minuto primo.

E bisogna pensare che molte cause ostacolano il raffreddamento e quindi agiscono come se la temperatura del cielo fosse notevolmente più alta. Difatti lo specchio ha un potere riflettente piccolo, non copre tutto il cielo, ed alla sua volta emette; l'aria che lambisce il vetrino cede calore per convezione.

Dall'applicazione della formula (4) risulta quindi un tempo molto più piccolo di quello che occorre effettivamente per la condensazione del vapor d'acqua sul vetrino.

Difatti nelle seguenti condizioni:

$$u_0 = 275^\circ \quad \theta = 83^\circ \quad u = 273^\circ$$
$$l = 0{,}02 \text{ cm.} \quad \varrho = 2{,}5 \quad c = 0{,}2$$

il calcolo dà come tempo limite per l'inizio della formazione della brina ($u = o$) circa tre secondi: ma coll'esperienza non sono riuscito a osservare uno strato apprezzabile di brina prima di un paio di minuti [1].

L'esperienza è quindi semplicemente qualitativa.

Chimica fisica. — *Spettri di assorbimento a bassissime temperature.* Nota di Arrigo Mazzucchelli, presentata dal Socio E. Paternò.

Intorno all'influenza della temperatura sugli spettri di assorbimento delle soluzioni si è fatto molto lavoro (e cito, fra i recenti, gli studî di H. C. Jones); ma quasi tutte le osservazioni si riferiscono a innalzamenti di temperatura al disopra dell'ordinaria.

Sull'influenza delle basse temperature si è fatto assai meno. Degni di nota sono gli interessantissimi studî di H. e J. Becquerel e Kamerlingh Onnes, sugli spettri di fosforescenza dei sali di uranile sino alla temperatura dell'idrogeno bollente, dai quali è risultato che a temperature assai basse le bande divengono più strette e meglio definite. Qualcosa di simile può supporsi che debba avvenire per le bande di assorbimento, poichè fra queste e le bande di fosforescenza esiste una stretta relazione che è stata posta in chiaro dagli studî dei Becquerel.

Io ho iniziato una serie di ricerche in proposito; e in questa Nota preliminare rendo noti i primi risultati ottenuti, che mi incoraggiano a seguitare per questa via.

Per poter riconoscere sin da principio la massima influenza delle basse temperature sugli spettri, è bene di operare colla temperatura più bassa

(1) È bene notare però che occorre circa un minuto e mezzo perchè si depositi uno strato dello spessore di un centesimo di millimetro di brina, quando il calore raggiato alla temperatura $u = 273^\circ$ contro il cielo a temperatura $\theta = 83^\circ$ si compensa con quello di liquefazione e solidificazione.

possibile: e come tale si offre subito quella di ebollizione dell'aria liquida, che oggi è così facile a produrre.

Veramente, non è facile di trovare liquidi che possano usarsi come solventi a —180°; ma io ho pensato che si poteva forse congelare in un blocco trasparente una soluzione fondente a una temperatura più alta. Come solvente dovrebbe prestarsi bene l'alcool etilico, che per intenso raffreddamento si addensa sino a divenire un vetro solido. La cristallizzazione della sostanza disciolta viene per tal modo a esser fortemente ostacolata dalla viscosità sempre crescente; e questa azione è favorita dalla velocità del raffreddamento, per immersione diretta della provetta nell'aria liquida.

La esperienza ha confermato le mie previsioni. Ho fatto poi anche qualche tentativo su miscugli di alcool etilico e glicerina, ove la viscosità è rilevante anche a temp. ordinaria, o di alcool metilico ed etilico, ove il punto di solidificazione viene ad esser fortemente depresso; ma questi mi hanno dato cattivi risultati, perchè il miscuglio con glicerina nell'aria liquida si rapprende in un vetro, ma questo si screpola subito: il miscuglio con alcool metilico si trasforma subito in una massa bianca, evidentemente per cristallizzazione dell' alcool metilico.

Può però darsi che questi miscugli, o altri con altri alcooli, etere etilico, ecc., diano buoni risultati a temperature un pò meno basse, e cioè al disopra del loro punto eutettico; e mi riservo di fare esperienze in proposito per indagare a questo modo anche la influenza del solvente a temperatura bassa.

Pel momento mi sono limitato all'uso dell'alcool etilico (l'assoluto del commercio), e ho usato come sostanze disciolte alcuni sali di uranio, e qualche colore organico.

Sulla tecnica delle misure non ho molto da dire, perchè fatta con mezzi di ripiego che andranno perfezionati. Avevo dapprima tentato di usare per le soluzioni recipienti cilindrici di metallo, alla cui estremità erano masticiati due dischi di vetro a faccie piane e parallele, che appariscono assai convenienti dal punto di vista ottico; ma ne ho sospeso l'uso, perchè non ho ancora trovato un mastice che resistesse all'alcool, pur mantenendosi sufficientemente elastico a così bassa temperatura. Sono però già in costruzione simili apparecchi in vetro di quarzo, dal cui uso mi attendo buoni risultati. Ho perciò adottato semplici provette di vetro, del diametro di circa 25 mm., a cui è saldato un tubo più stretto pel riempimento. Queste vengono immerse verticalmente dentro il vaso Dewar, che è fasciato esteriormente da carta nera, ove son praticati due fori rotondi pel passaggio della luce. Le molte superfici rifrangenti, colle loro aberrazioni, costituiscono una piccola difficoltà per illuminare convenientemente la fenditura dello spettrografo, tanto più che occorre lavorare con una certa rapidità; ma, con un pò di pazienza, tal difficoltà si può superare.

La rapidità è resa necessaria dal fatto che, dopo un pò di tempo che è nell'aria liquida, anche l'alcool puro, dopo solidificatosi, si riempie di screpolature che lo rendono opaco. Per questa ragione io usavo di immergere bruscamente la provetta nell'aria liquida (sebbene di vetro, reggono assai bene al trattamento), e cominciare la fotografia non appena cessa lo svolgimento violento di gas, e l'aria liquida è ritornata in calma. Poichè l'alcool è un cattivo conduttore, è probabile che a questo punto la temperatura non si sia ancora pareggiata nell'interno della provetta; e se ne ha anzi una prova diretta, nel fatto che, dopo estratto dal bagno, l'alcool non si mostra sempre indurito allo stesso modo: può anzi darsi che la screpolatura abbia luogo quando, a raffreddamento completo, tutto l'alcool ha perduto lo stato pastoso ed è divenuto un vetro fragile.

Per questa ragione non è detto che gli spettri da me osservati si riferiscano proprio a —180°, ma, verosimilmente, a temperature un pò superiori. Quando potrò adoperare, come già hanno fatto altri, bagni di pentano raffreddati con aria liquida alla temperatura voluta, spero di ottenerne migliore definizione sotto questo riguardo.

Tutte le soluzioni da me esaminate in queste condizioni si trasformano in vetro omogeneo e trasparente, senza alcun accenno a separazione della sostanza disciolta. È un fenomeno che mi contento di constatare, senza volerne dare una spiegazione categorica; verosimilmente si tratta di uno stato metastabile; ma non si può escludere che, avendo io usato soluzioni abbastanza diluite (non oltre l'1 %), il limite di solubilità non fosse ancora raggiunto, almeno per alcune. Anche qui, esperienze a temperatura meno bassa potranno portare luce.

Come sorgente luminosa ho adoperato sempre una lampada Nernst; come apparecchio, uno spettrografo di Hilger già usato in precedenti ricerche (Rend. Acc. Lincei, XXII, sem. 2°, 1913, pagg. 445-451); come lastre, sia le *special plates* di Wratten e Wainwright, sia le *extrarapides* di Lumière (per alcuni sali uranilici). La posizione delle bande fu determinata, al solito, dal confronto con lo spettro dell'elio.

Ecco ora la preparazione delle varie soluzioni, e i loro spettri.

Solfato uranilico. Una soluzione all'1 % circa di questo sale, ottenuto per azione dell'anidride solforosa a caldo sul perossido di uranio sospeso nell'acqua [1], alla quale si aggiunse l'1 % di acido solforico puro. Il sol-

[1] È un metodo di preparazione che adopero fino dai miei primi studî sul perossido di uranio, e che è stato adottato anche da altri. Questo composto si presta bene alla depurazione dell'uranio, e per azione del SO_2 se ne ha quantitativamente il solfato senza eccesso di acido libero, soprattutto se, a dissoluzione compiuta, si scaccia l'SO_2 mediante una corrente di aria. L'attacco del perossido è dapprima un pò stentato; ma dopo che se ne è disciolto un poco, l'azione si accelera assai, evidentemente perchè il solfato scioglie in piccola quantità il perossido formando qualcuno di quei composti misti di

fato uranilico, ottenuto evaporando a b. m. la sua soluzione (secondo i dati della letteratura, si forma così l'idrato $UO_2 . SO_4 + H_2O$), è solo assai lentamente, ma completamente, solubile nell'alcool; mentre se si concentra solo a siroppo la sua soluzione, si ha dissoluzione immediata. Sembra, perciò, che il solfato non si sciolga nell'alcool allo stato anidro, ma come idrato, come fanno molti sali inorganici di fronte ai solventi organici [1]: e il ritardo nella dissoluzione del monoidrato sarebbe appunto richiesto dall'assorbimento dell'acqua a spese dell'alcool non del tutto anidro. Altri sali uranilici si comportano allo stesso modo.

Lo spettro di questa soluzione a temperatura ordinaria ha i caratteri soliti dei sali uranilici; ma le hande ne sono sfumate e maldefinite. Se ne ha una prima fra 509 e 491 circa (ove è molto sfumata) [2] che corrisponde alla *a* secondo la denominazione di Jones (*Absorption spectra of solutions*, Washington, 1910), che seguiremo in questo lavoro; una seconda, a orli assai sfumati, fra 478 e 473, che sarebbe la *b*; e una terza, *c*, tra 458 e 454. A 445 comincia un'altra bauda che si confonde nell'assorbimento generale.

Nello spettro a bassa temperatura ho osservato due bande a orli netti, una fra 635 e 626, e una fra 582 e 576. Per la loro posizione non han riscontro nei sali uranilici, e non è quindi escluso che sian dovute a un pò di sale uranoso formatosi durante la dissoluzione a caldo. Deve in ogni caso trattarsi di piccole quantità, perchè, avendo esposto questa stessa soluzione al sole in tubo chiuso alla lampada per operarne la riduzione, si ebbe formazione di precipitato fioccoso, verde chiaro, con completo scoloramento del liquido: il solfato uranoso, cioè, è quasi insolubile in alcool, sebbene forse la presenza di sale uranilico, come si osserva in casi analoghi, ne possa facilitare la dissoluzione. In ogni caso, è degno di nota che queste bande non compaiono a temperatura ordinaria. Nella parte più rifrangibile dello spettro parrebbe, dalla fotografia, che si avesse assorbimento completo; ma la cosa richiede ulteriori prove, potendo trattarsi solo di insufficiente esposizione, non essendo sempre agevole ottenere la illuminazione conveniente.

---

cui mi sono occupato altrevolte (Rend. Acc. Lincei, XVI, fasc. 2°, 1907, pagg. 578-582), e facilitandone così la riduzione. Dal solfato poi è facile di preparare gli altri sali per doppia decomposizione coi sali di bario.

[1] G. Bruni ne ha dato la diretta dimostrazione con misure crioscopiche (Gazz. chim., *35*, 1, 1905, pagg. 448-460).

[2] Qui, dove per necessità di cose si opera a spessore costante, non posso, come nei lavori precedenti, ove si lavorava a spessore variabile, indicare i centri delle bande, ma devo limitarmi a indicarne la posizione dei bordi nelle condizioni da me sperimentate. Ciò è sufficiente, trattandosi soprattutto di far rilevare le differenze fra la temperatura ordinaria e quella dell'aria liquida.

Cloruro uranilico. Soluzione all' 1 °/₀ del prodotto Kahlbaum, col 5 °/₀ di acido cloridrico fumante. A temperatura ordinaria si osservano le bande: a_1, sfumata, fra 537 e 510; *a*, debole, fra 504 e 491; *b*, fra 479 e 472; *c*, fra 462 e 454. A 444 comincia una banda che si fonde nell'assorbimento generale. A temperatura bassa si osservano due bande strette, che non compaiono a temperatura ordinaria, una fra 635 e 626, e una fra 581 e 576: nel resto dello spettro comincia presto l'assorbimento generale, che potrebbe anche essere dovuto a esposizione insufficiente. Qui pure è da ripetere la osservazione, fatta sopra, circa la possibile esistenza di sale uranoso, e la necessità di nuove determinazioni.

Questa stessa soluzione, esposta al sole in tubo chiuso, e filtrata per separarla da un pò di precipitato formatosi, diede una soluzione di *cloruro uranoso*, il cui spettro a temperatura ordinaria presentò le seguenti bande: fra 681 e 669; debole e sfumata, col centro a 650; fra 634 e 617, debole, e sfumata verso il violetto. Due ultime si intravvedono verso 474 e 458.

Il raffreddamento con aria liquida fa variare alquanto la posizione e il numero delle bande, le quali acquistano sopra tutto una grande nettezza. Si osserva così: una banda, assai netta, fra 684 e 671; una netta ed estesa fra 666 e 628; poi fra 579 e 576, fra 560 e 547, fra 502 e 475, sfumata verso il violetto. A 431 lo spettro cessa bruscamente, forse per l'inizio di una nuova banda.

Bromuro uranilico. Soluzione circa all' 1 °/₀ di questo sale, la cui soluzione si era ottenuta da solfato uranilico e bromuro di bario, e tirata a secco in corrente di CO_2 (il bromuro, come il cloruro, è facilmente solubile in alcool anche a secco). A temperatura ordinaria, in varie fotografie, non ho ottenuto che uno spettro continuo, con tutt'al più indizî di disuguale trasparenza. L'esperienza mi ha mostrato che da simili risultati si può solo concludere per una grande debolezza delle bande di assorbimento, senza tuttavia poterne escludere la esistenza. Invece nell'aria liquida compaiono due bande sfumate, cioè fra 481 e 475, e fra 465 e 455.

Joduro di uranile. La preparazione di questo sale ha dato per ora risultati meno soddisfacenti. Per doppia decomposizione fra solfato uranilico e ioduro di bario, un pò acido per HJ libero, poi tirando a secco in corrente di CO_2, si ebbe soprattutto un residuo insolubile in alcool, verde nero, (forse UO_2 o U_3O_8), e la dissoluzione alcoolica era fortemente colorata in bruno per iodio. Per assorbirlo si sbattè con Hg in tubo chiuso alla lampada, arrestando l'assorbimento, che ha luogo solo a caldo e per forte agitazione, quando la soluzione era solo debolmente bruna. Concentrando invece la soluzione acquosa di ioduro solo a piccolo volume, non si ebbe liberazione di iodio: e quel poco, che tornò a formarsi durante la successiva diluizione con alcool e filtrazione, fu assai più facile a eliminare con Hg; ma il liquido, il cui titolo alcoolico poteva essere fra il 95 e il 90 °/₀, divenne

opalescente, e infine opaco per immersione nell'aria liquida. Riprendendo la temperatura ambiente, ritornò gradualmente limpido. Pel momento non si è avuto tempo di fare ulteriori preparazioni, e si è esaminata la prima soluzione, che a temperatura ordinaria ha dato due bande, una abbastanza netta fra 564 e 562,5, e una fra 557 e 549, ove l'orlo è sfumato. Data la colorazione bruna, che accenna a presenza di iodio, non parrebbe che si potessero attribuire a sale uranoso. A bassa temperatura, nella mia fotografia si osserva solo una banda, debole ma abbastaza netta, fra 471 e 467. Le esperienze saranno ripetute.

Come già si è reso noto (Rend. Acc. Lincei, XXII, sem. 2°, 1913, pag. 448), i sali uranilici dei tre acidi paraossibenzoici si distinguono per i loro caratteri otticamente anormali. Poichè sono anche solubili in alcool, se ne presentava tanto più interessante lo studio.

Meglio solubile è il salicilato uranilico (da cloruro uranilico e salicilato di potassio in quantità equivalenti, tirando poi a secco e riprendendo con alcool). Si ha un bel liquido rosso, che deve essere fortemente diluito perchè lasci impressionare la lastra, e che mi ha dato uno spettro continuo. Lo stesso osservammo nel lavoro sopracitato, ove, tra varie fotografie, solo una ci diede accenni di bande. Ed è appunto su questi risultati che si basa la osservazione della pagina precedente. Raffreddando con aria liquida, il rosso passa al solito giallo dei sali uranici, già a temperatura assai superiore a quella di addensamento dell'alcool, e si ottiene uno spettro con tre bande abbastanza nette, e cioè fra 480 e 477, fra 463 e 462, fra 447 e 443. Come si vede, la influenza della temperatura sulle proprietà ottiche risulta qui in modo particolarmente chiaro.

Allo stesso modo fu preparato il paraossibenzoato uranilico, che è assai meno solubile del salicilato. La sua soluzione è gialla anche a temp. ordinaria, e presenta le due bande: fra 466 e 461, un pò sfumata, e fra 451 e 444; a 433 lo spettro termina bruscamente, forse per la presenza di un'altra banda, che però non è identificabile. Alla temperatura dell'aria liquida si osservano le bande: fra 478 e 477; fra 465 e 458 (queste due abbastanza nette); fra 448 e 441, più sfumata. Lo spettro termina bruscamente a 431. Anche qui, come si vede, l'abbassamento di temperatura ha fatto comparire una nuova banda: esso ha reso poi assai meglio definite le preesistenti.

Infine, per riconoscere se questa variazione delle bande di assorbimento è un fenomeno generale di tutte le sostanze colorate, ho esaminato in soluzione alcoolica diluitissima (come è necessario per avere sufficiente trasparenza) i tre coloranti del catrame: eosina A (Badische Sodafabrik), verde brillante cristallizzato (Meister Lucius), bleu di metilene. L'eosina a temperatura ordinaria, mostra una larga banda fra 550 e 470, mentre nell'aria liquida i limiti erano 547 e 474. Pel verde brillante si ebbe: banda fra 666 e 559

a temp. ordinaria; fra 674 e 563 nell'aria liquida. Pel bleu di metilene, a temp. ordinaria, banda fra 691 e 566, con zona di assorbimento debole e indefinita fra 513 e 492. Nell'aria liquida, la zona di assorbimento restò ugualmente maldefinita, e la banda era fra 686 e 563. A occhio nudo il colore o la fluorescenza delle soluzioni non variarono sensibilmente pel raffreddamento.

Si tratta, in complesso, di variazioni ben piccole: e l'influenza delle basse temperature pare perciò essenzialmente limitata a quei corpi, come i sali di uranio, ove l'assorbimento selettivo è proprietà di uno degli elementi.

Intendo esaminare sotto questo punto di vista anche i sali di qualche terra rara.

Con questa Nota preliminare ho inteso soprattutto di prendere data per potere compiere gli studî su questo argomento, che richiedono una tecnica speciale, la quale deve essere pazientemente elaborata.

Chimica. — *Sugli ossialogenuri di piombo* (1). Nota di G. SANDONNINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Sono noti parecchi ossicloruri, ossibromuri ed ossijoduri di piombo, ma non si ha nessun dato certo concludente per la esistenza di ossifluoruri.

Berzelius (2) ne suppose la formazione per trattamento di una sospensione acquosa di fluoruro con ammoniaca, ma non potè isolare nessun composto definito; esistono pure esperienze di Fremy (3); questi facendo agire vapor d'acqua sul fluoruro ad alta temperatura credette di giungere alla formazione di un ossifluoruro.

Dei molti ossicloruri di cui venne data come certa l'esistenza a bassa temperatura, Ruer (4) per fusione dei componenti ne constatò la formazione solamente di due della composizione $PbCl_2 . PbO$ e $PbCl_2 . 2PbO$, i quali si trovano anche in natura, e sono noti rispettivamente come la matlockite e la mendipite. Oltre a questi due composti dal Ruer venne constatata l'esistenza di un nuovo composto corrispondente alla formula $PbCl_2 . 4PbO$.

Era quindi non privo di interesse studiare ad alta temperatura il comportamento degli altri alogenuri di piombo coll'ossido, e specialmente quello del fluoruro dato lo speciale comportamento dei fluoruri. Infatti è ben noto come mentre tra cloruri, bromuri, joduri di metalli mono e bivalenti, la for-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova diretto dal prof. G. Bruni.

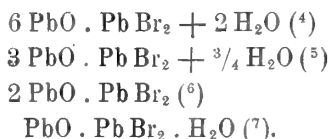
(2) Moissan, *Traité de Chimie gen.*, IV, pag. 997.

(3) Gmelin, *Handb.*, I, 2, pag. 27.

(4) Zeit. f. an. Chem., *49*, 365 (1906).

mazione di soluzioni solide avviene in rapporti molto larghi, questa è molto più limitata tra fluoruri e gli altri alogenuri, ed anzi pei metalli bivalenti si ha formazione di composti ben definiti, come venne dimostrato da Plato (¹) per i sali dei metalli alcalino-terrosi, e da me (²) per gli stessi sali di piombo. D'altra parte è ancor noto che in molti fluoruri complessi una parte del fluoro può essere sostituita da ossigeno.

Degli ossibromuri di piombo Pick ed Ahrens nel loro articolo sul piombo nell' Handbuch d. anorg. Chemie dell'Abegg (³) pongono come più probabili di esistenza i seguenti:

$$6\,PbO\,.\,PbBr_2 + 2\,H_2O\ (^4)$$
$$3\,PbO\,.\,PbBr_2 + {}^3/_4\,H_2O\ (^5)$$
$$2\,PbO\,.\,PbBr_2\ (^6)$$
$$PbO\,.\,PbBr_2\,.\,H_2O\ (^7).$$

Tanto l'ossido quanto il bromuro di piombo usati provenivano da Kahlbaum. Il punto di fusione del bromuro di piombo giace a 368°; quello dell'ossido a 892° secondo le mie esperienze, ed è in buon accordo con quello dato da Cooper, Shaw e Loomis (⁸) (888°), da Schenck e Rassbach (⁹) (882°), da Doeltz e Mostowitsch (¹⁰) (902°). Il punto di fusione dell'ossido di piombo estrapolato da Ruer è certamente troppo basso (830°).

Le miscele vennero fuse in crogiolo di platino ed in forno elettrico; venne usata una massa costante di trenta grammi.

Nella fusione delle miscele più ricche in ossido di piombo e dell'ossido di piombo stesso non venne osservata nessuna profonda alterazione del crogiuolo di platino, che venne segnalata da Ruer e che certamente era dovuta al fatto che l'ossido usato da questo sperimentatore conteneva piccole tracce di piombo libero.

La perdita in peso delle miscele non è forte per riscaldamento a 900° e venne attribuita a sublimazione del bromuro; di essa venne tenuto conto nella composizione finale della miscela.

Il sistema bromuro-ossido di piombo. — I dati relativi a questo sistema sono riuniti nella tabella I e nel diagramma a fig. 1.

(1) Zeit. f. phys. Chem., *58*, 350 (1907).
(2) Questi Rendiconti, *20*, 1° sem., 172, 233 (1911).
(3) Abegg's Handb. d. an. Chem., III, 2, pag. 663.
(4) Strömholm, Zeit. f. an. Chem., *38*, 429 (1904).
(5) Id. id.
(6) André, Comptes Rendus de l'Ac. de Sc., *96*, 435, 1502 (1884).
(7) » » » » » *97*, 1032 (1885).
(8) Ber. Chem. Ges., *42*, 3991 (1909).
(9) » » » *41*, 2918 (1907).
(10) Metallurgie, *4* (1907).

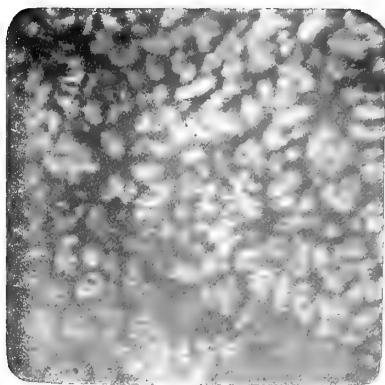



FIG. 1. — 95.81 mol. °/₀ $PbBr_2$

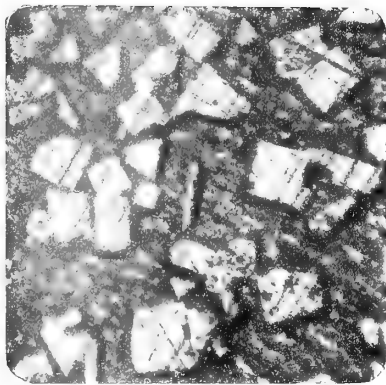



FIG. 2. — 77.57 mol. °/₀ $PbBr_2$

FIG. 3. — 37 mol. °/₀ $PbBr_2$

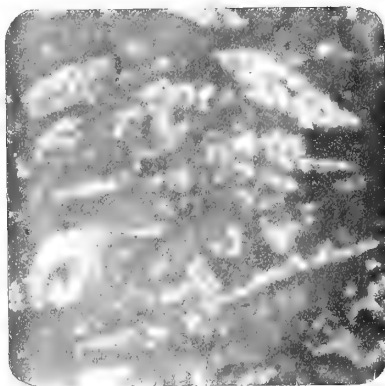



FIG. 4 — 21.96 mol. °/₀ $PbBr_2$

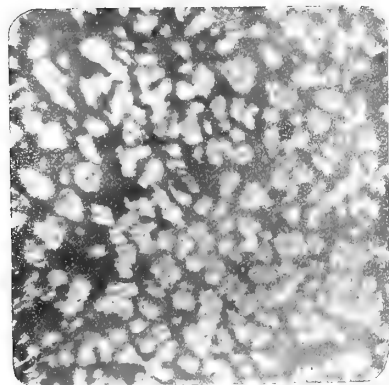



FIG. 5. — 68.47 mol. °/₀ PbF_2

FIG. 6. — 27.98 mol. °/₀ PbF_2

Ingrandimento 75 diam.

La curva di deposizione primaria del bromuro di piombo discende dal punto di solidificazione di quest' ultimo ad un punto eutettico a 13 mol. °/₀ ca. di PbO e a 349°. Indi la curva di cristallizzazione primaria sale sino a 35 mol. °/₀ a 475°, ove si nota un evidentissimo gomito, per risalire poi sino ad un massimo a 712° e a 66,81 mol. °/₀ ca. di PbO e ridiscendere poi ad un punto eutettico a 700° e a 75 mol. °/₀ di ossido di piombo. Le miscele dall'ossido di piombo puro a 80 mol. °/₀ mostrano all' inizio di cristallizzazione un nuovo punto di arresto a 740° che pare abbia la sua massima durata nella miscela a 80 mol. Poscia la curva di deposizione primaria discende rapidamente al punto eutettico a 700°; questo arresto eutettico appare ancora alla miscela di 79,98 ; 83,91 ; 87,02 di ossido di piombo.

Dall'esame del diagramma completo risulta senza dubbio l'esistenza di due composti: uno decomponibile alla fusione ed uno che può fondere inalterato, che ha il massimo che gli spetta a 66,4 mol. °/₀ di ossido di piombo. Infatti tutte le miscele comprese da 35 a 66.4 mol. hanno nelle loro curve di raffreddamento oltre all'inizio di cristallizzazione un arresto alla temperatura costante di 475°. Alla miscela di 50 mol. °/₀ l'arresto eutettico a 349° scompare, e l'arresto a 475° ha la sua massima durata: ad essa certamente corrisponde un composto della composizione di una molecola di ossido per una di bromuro $PbBr_2 . PbO$.

La miscela a 66,81 cristallizza a temperatura praticamente costante. La sua composizione si scosta da quella di un composto di due molecole di ossido ed una di bromuro (ciò è dovuto al fatto che dopo fusione non si giunge mai esattamente alla composizione desiderata in causa della sublimazione del bromuro anche per aggiunte preventive di questo), tuttavia si può considerare assai prossima e praticamente corrispondente ad un composto $PbBr_2 . 2\,PbO$.

Le miscele più ricche in ossido solidificano frequentemente con forti sopraraffreddamenti, dimodochè il diagramma non risulta con sicurezza come per la parte precedente. Le durate di arresto a 741° non sono molto regolari: si ha inoltre l'anomalia del presentarsi della cristallizzazione eutettica alla concentrazione del supposto composto ed oltre, tuttavia dai fenomeni osservati pare potersi concludere che esso fonda con decomposizione, ed abbia la composizione $PbBr_2 . 4\,PbO$.

Di alcune miscele vennero eseguite alcune micrografie a luce riflessa. I masselli si prestano nomale ad essere levigati sia per la loro porosità, sia per la loro fragilità; tuttavia alcune micrografie risultarono ben caratteristiche. Il miglior mezzo d'attacco fu trovato essere l'acqua bollente. L'ingrandimento fu costantemente di 75 diametri. Nella tavola finale nella fig. 1 si vede chiaramente il deposito primario di $PbBr_2$ in massa eutettica, nella fig. 2 il deposito primario di $PbBr_2 . PbO$, nella fig. 3 quello di $PbBr_2 . 2\,PbO$ e nella fig. 4 il deposito primario di $PbBr_2 . 4\,PbO$.

TABELLA 1ª.

mol. % di PbO	Temperature di cristallizzaz. primaria	Temperature di cristallizzaz. eutettiche	Durate in secondi	Temperature di formazione di $PbBr_2 . PbO$ e di $PbBr_2 . 4PbO$	Durate in secondi
0.00	368°	—	—	—	—
4.19	359	348°	90″	—	—
8.91	?	351	180	—	—
15.45	381	349	190	—	—
22 63	429	349	160	—	—
29.92	478	349	100	—	—
34.96	473	348	60	—	—
41.65	530	347	20	476°	120″
50 06	630	—	—	475	160
42.80	655	—	—	482	110
63.80	689	—	—	470	50
66.81	712	—	—	—	—
71.80	707	700	50	—	—
75.72	eut.	700	130	—	—
78.04	721	700	80	—	—
79.98	742	700	—		
83.91	?	700	—	742	
87.02	782	700	—	746	
91.05	799	—	—	740	
95 32	842	—	—	740	
100 00	892	—	—	—	—

Per miscele più ricche in PbO non potè essere preparato nessun campione dimostrativo.

Dei composti già noti e precedentemente citati viene quindi confermata l'esistenza di $PbBr_2 . PbO$ ad alta temperatura ed allo stato anidro, e di $PbBr_2 . 2PbO$. Inoltre si hanno pure dati per l'esistenza di un composto $PbBr_2 . 4PbO$ che non era noto precedentemente. Confrontando i risultati ottenuti con quelli già ottenuti da Ruer pel sistema $PbCl_2 . PbO$, si trova un'analogia quasi perfetta di comportamento del bromuro e del cloruro verso l'ossido: esistono cioè lo stesso numero di composti e dei medesimi tipi; tuttavia il composto $PbBr_2 . 4PbO$ fonde con decomposizione, a differenza del composto $PbCl_2 . 4PbO$, che fonde inalterato. Inoltre non venne notata formazione di soluzioni solide tra i varî ossibromuri.

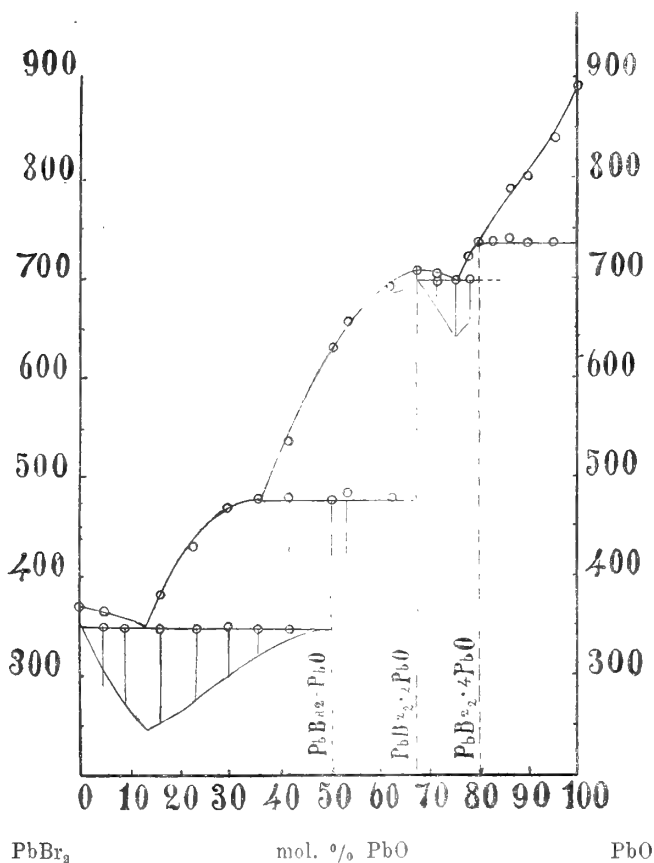



FIG. 1.

Il sistema fluoruro-ossido di piombo. — Il fluoruro di piombo fonde a 824°, come anche da mie esperienze precedenti (loc. cit.). La perdita in peso delle miscele riscaldate a 900° è quasi nulla, dimodochè non ne venne tenuto conto nella composizione delle miscele. I due componenti sono completamente solubili allo stato liquido, e non dànno luogo ad alcun composto tra di loro. La miscela eutettica giace a 494° e a 54 mol. °/₀ ca. di PbO. La deposizione primaria dell'ossido di piombo avviene con forti sopraraffreddamenti e la cristallizzazione eutettica non avvirne regolarmente, tuttavia dalle curve delle durate di quest' ultima, pare sia da escludersi la formazione di soluzioni solide.

Tabella 2ª.

mol. °/₀ di PbO	Temperature di cristallizzaz. primaria	Temperature di cristallizzaz. eutettica	Durate in secondi
0.00	824°	—	—
5.00	800	483°	
11.00	755	485	60″
21.53	701	490	90
31.57	632	492	130
42.21	565	494	160
45.00	545	494	220
52.34	?	494	250
56.00	?	494	280
62.20	658	494	230
65 00	588	493	210
72.02	658	493	180
81.44	718	492	130
91.35	797	490	80
95.00	848	490	40
100.00	892	—	—

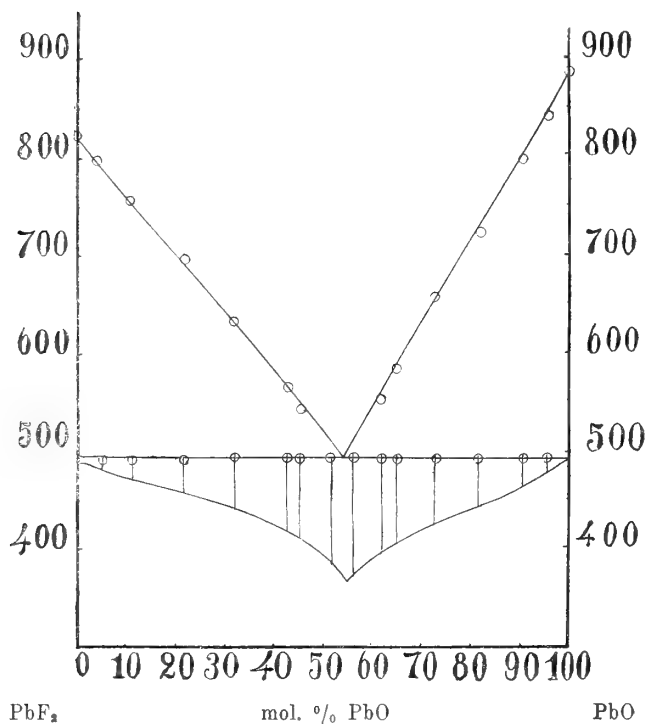



Fig. 2.

Anche di queste miscele vennero eseguite due micrografie una nel campo di deposizione del fluoruro ed una nel campo di deposizione dell'ossido. La fig. 5 mostra infatti il deposito primario bianco di fluoruro in massa eutettica grigia, e la fig. 6 il deposito primario bruno di fluoruro in massa eutettica biancastra.

L'ingrandimento fu costantemente di 75 diametri.

Il comportamento del bromuro verso l'ossido di piombo è il medesimo di quello del cloruro; i composti che si originano per fusione assai verosimilmente hanno la medesima composizione; tuttavia il composto col bromuro a maggior tenore di ossido fonde con decomposizione mentrechè il composto dello stesso tipo col cloruro fonde inalterato; inoltre la tendenza degli ossicloruri a dare cristalli misti tra loro non venne notata per gli ossibromuri.

Nel sistema fluoruro-ossido di piombo non si hanno dati per la esistenza di alcun composto, ma la formazione di un semplice eutettico. Questo comportamento può essere messo in accordo col fatto che il fluoruro stesso (vedi sopra) si combina col cloruro e col bromuro di piombo per dare composti di due tipi che si ripetono in quelli tra cloruri e bromuri coll'ossido, e precisamente quelli della composizione di una molecola di alogenuro per una molecola di ossido e di una molecola di alogenuro per quattro di ossido come risulta dal seguente raffranto:

$PbCl_2 . PbO$	$PbCl_2 . 2\,PbO$	$PbCl_2 . 4\,PbO$
$PbBr_2 . PbO$	$PbBr_2 . 2\,PbO$	$PbBr_2 . 4\,PbO$
$PbCl_2 . PbF_2$	—	$PbBr_2 . 4\,PbF_2$
$PbBr_2 . PbF_2$	—	$PbBr_2 . 4\,PbF_2$

e cioè nei composti dei tipi citati le molecole di fluoruro possono essere sostituite da molecole di ossido, fatto questo in accordo con quello già noto che in alcuni fluoruri doppi il fluoro può essere in parte sostituito da ossigeno.

Resta però da notare come, dato questo comportamento degli ossidi e dei fluoruri, non si abbia formazione di soluzioni solide.

Fisiologia vegetale. — *Sui rapporti tra l'azione di un' illuminazione istantanea a diversa distanza, e la reazione nei germogli di Vicia sativa.* Nota di GIULIA CAMPANILE, presentata dal Socio R. PIROTTA [1].

Le ricerche compiute in questi ultimi anni intorno ai fenomeni eliotropici, furono spesso vòlte alla determinazione dei rapporti esistenti tra l'intensità luminosa provocante l'eccitazione, la durata della eccitazione medesima, e la conseguente reazione. Fu, ad esempio, enunciata la legge cosidetta della *quantità della eccitazione*. Secondo questa legge, la quantità della eccitazione sarebbe determinata dalla intensità e dalla durata di essa; questi due fattori poi, durata ed intensità, potrebbero variare senza produrre una differenza della reazione, purchè resti costante il loro prodotto, determinante la quantità medesima. L'esattezza di questa legge è stata discussa; ad ogni modo, questi studî stanno a dimostrare l'importanza del nuovo indirizzo dato a questo genere di ricerche.

Avendo io già sperimentato come ottimo materiale di studio i germogli della *Vicia sativa* [2], volli intraprendere, su questa pianta, ricerche intese a stabilire i rapporti esistenti tra intensità e durata di eccitazione da un lato, reazione dall'altro; in quest'ultima studiai particolarmente il tempo di latenza ed il movimento, più o meno accentuato, di curvatura. Prima di ogni altra cosa mi sembrò opportuno di ricercare il comportamento di questa pianta di fronte ad una illuminazione istantanea, agente a diverse distanze. Si comprende facilmente che per la medesima intensità luminosa, aumentando la distanza, la reazione deve gradatamente diminuire; ma, poichè la reazione stessa è un fenomeno complesso, nel quale può esser compresa non soltanto l'energia del curvamento ma ben anco il tempo che intercede tra l'eccitazione e l'inizio della reazione (tempo di latenza), credei opportuno di ricercare come si comportino questi due fattori per distanze sempre crescenti delle piantine dalla sorgente di luce istantanea. Per sorgente luminosa, analogamente a quanto è stato praticato da altri sperimentatori, fu adoperata una lampada a filamento metallico, della energia di 50 candele. Essa era posta alla estremità di un tavolino lungo quattro metri, la cui super-

[1] R. Istituto botanico di Roma.

[2] La *Vicia sativa*, come dirò in un lavoro di prossima pubblicazione, pure avendo nella lamina fogliare le cellule epidermiche foggiate a lente, e quindi atte alla recezione dello stimolo luminoso, presenta la sensibilità eliotropica limitata al solo fusticino; la reazione avviene nelle sole zone colpite; non v'è trasmissione di stimolo.

ficie era annerita; del pari annerite erano le pareti circostanti, perchè non si avessero a verificare riflessioni luminose che potessero turbare l'andamento dell'esperienza. Su detto tavolo si collocavano a distanze di metri 1, 2, 3, 4, taluni piccoli vasi contenenti piantine fatte germinare in modo che risultassero in una linea, disposta nelle mie esperienze, perpendicolarmente ai raggi luminosi. I vasi poi, alle singole distanze, erano posti alternati in modo da non ombreggiarsi a vicenda. La luce si faceva agire per circa un secondo di minuto; si poteva quindi considerare istantanea.

La reazione che ne seguiva avveniva in tempi diversi per le diverse distanze; l'osservazione però di detta reazione, e la determinazione esatta del suo inizio alle varie distanze, presentavano enormi difficoltà, data la grandissima sensibilità della *Vicia*.

Dovetti subito escludere il metodo delle osservazioni compiute, ad intervalli stabiliti, usufruendo di una debole sorgente luminosa, tanto debole da doversi abituare al buio prima di poter distinguere nettamente le piantine: anche una simile sorgente era sufficiente a turbare la reazione.

Ricorsi al metodo di toglier via, a regolari intervalli, due vasetti dalle singole distanze, osservarli fuori della camera buia, e quindi eliminarli. Oltre all'enorme sciupìo di materiale, questo secondo metodo presentava grandissimi inconvenienti, tra i quali non ultimo quello di qualche inevitabile urto alle piantine, data la perfetta oscurità; non potevo poi tener conto della grande differenza individuale pesentata dalla Veccia.

Dopo altri tentativi, mi decisi per una via un pò lunga ma molto esatta: quella cioè di rinnovare tutto il materiale ad ogni singola osservazione.

Cominciavo col lasciare al buio perfetto, per un $^1/_4$ d'ora dopo l'eccitazione luminosa, le piantine disposte alle varie distanze, ed osservavo quindi se aveva avuto luogo alcun movimento di reazione; successivamente, cambiato materiale, ripetevo l'esperienza nelle stesse condizioni ma lasciavo le piantine al buio per un tempo maggiore [$^1/_2$ ora]; infine in altre esperienze portavo questo tempo a $^3/_4$ d'ora, ad una ora; il tempo medesimo era poi prolungato di $^1/_2$ ora in $^1/_2$ ora, fino a 2 ore e $^1/_2$.

Ho potuto stabilire che la reazione non comincia, per nessuna distanza, ad un tempo di latenza inferiore ai $^3/_4$ d'ora.

Come si può osservare dal prospetto, con un tempo di latenza di tale durata, abbiamo il curvamento del 6 %, 5 % alle distanze rispettive di 1 metro, 2 metri; a 3 metri, 4 metri, nulla. Compiendo le osservazioni dopo 1 ora, aumenta per le distanze di 1 metro, 2 metri, la percentuale delle piantine curvate; si ha un inizio di reazione a tre metri (2 %); a 4 metri, ancora nulla. Le piantine poste a questa distanza, cominciano a reagire (2 %) soltanto dopo un'intervallo di 1 ora e $^1/_2$ dalla eccitazione luminosa. Come quella ad un'ora e $^1/_2$, l'osservazione a 2 ore, 2 ore e $^1/_2$ ci dà sempre lo stesso risultato: *aumento di percentuale;* si mantiene sempre evidentissima

la differenza tra il numero delle piantine curvate alle varie distanze: ad es., ad 1 metro, per il tempo di 2 ore $^1/_2$, abbiamo il curvamento del 58 %; a 4 metri, per lo stesso tempo, abbiamo invece il 14 %. L'energia del movimento di curvatura è sensibilmente identica, per tutte le distanze.

Il fenomeno procede con regolarità e permette di concludere, per la *Vicia sativa* almeno, che, aumentando la distanza dalla sorgente luminosa istantanea, *non varia sensibilmente l'intensità del curvamento; varia invece notevolmente la durata del tempo di latenza.*

Lasciando infine, dopo l'eccitazione luminosa, le piantine al buio per un tempo indeterminato (10 ore circa), come si vede dal prospetto, si è avuto il 100 % del curvamento solo ad un metro e a 2 metri (93 %). A tre metri e a 4 metri si è avuto rispettivamente l'82 e il 70 per cento.

Si avverta che le piantine di *Vicia* eran lasciate crescere in una cassa buia, e venivano usate per l'esperienza, appena raggiunta l'altezza di 3 cm., al massimo 3 cm. e $^1/_2$. La cassa era collocata nella stessa stanza, e le piantine venivano disposte sul tavolino usufruendo di una debolissima luce diffusa, tale da non provocare reazione apprezzabile, come fu sempre dimostrato dal risultato di tutte le esperienze. La luce doveva bastare semplicemente a far scorgere i vasetti sui quali un segnaccio bianco stava ad indicare la direzione della linea delle piantine.

SPECCHIO DELLE ESPERIENZE A LUCE ISTANTANEA, COMPIUTE NELLA *VICIA SATIVA*.

Risultati ottenuti dopo:	1/2 ora		3/4 d'ora		1 ora		1 ora e 1/2		2 ore		2 ore e 1/2		10 ore	
	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate	Piante esposte	Piante curvate
Distanza m. 1 . . .	30	—	30	2	30	4	29	9	21	6	29	20	30	30
	20	—	25	1	20	2	10	9	26	19	17	6	20	20
	20	—	20	1	25	2	34	16	27	13	30	17	25	25
	30	—	25	2	25	2	27	11	26	14	24	15	25	25
	100	—	100	6	100	10	100	45	100	52	100	58	100	100
Distanza m. 2 . . .	20	—	30	2	20	1	21	2	31	4	18	11	28	28
	20	—	20	1	48	2	27	4	25	4	24	2	30	29
	20	—	25	0	32	1	30	6	26	8	25	5	20	19
	20	—	25	2			22	3	18	2	33	7	22	22
	20	—												
	100	—	100	5	100	4	100	15	100	18	100	25	100	98
Distanza m. 3 . . .	50	—	30	—	20	–	22	3	32	6	9	2	24	20
	20	—	30	—	48	1	33	5	32	7	31	7	29	22
	30	—	20	—	32	1	17	3	18	2	25	6	47	40
			20	—			28	5	18	2	35	7		
	100	—	100	—	100	2	100	16	100	17	100	22	100	82
Distanza m. 4 . . .	40	—	25	—	20	—	42	1	43	1	36	6	30	13
	40	—	20	—	25	—	6	0	42	1	20	3	35	28
	20	—	25	—	35	—	52	1	15	4	22	3	35	29
			30	—	20	—					22	2		
	100	—	100	—	100	—	100	2	100	6	100	14	100	70

Botanica. — *Sulla funzione delle radici contrattili.* Nota preventiva del dott. G. Catalano, presentata dal Socio A. Borzì.

La proprietà, che hanno molte radici, di contrarsi, è stata originariamente studiata da H. De Vries [1], e consiste, secondo le sue ricerche, in una particolare manifestazione dei fenomeni di tensione nei tessuti radicali, rivelandosi principalmente con la formazione di rughe alla superficie della radice, cioè in seno ai tessuti esterni della corteccia. Sotto l'influenza di un aumento di turgore, le cellule del parenchima corticale di queste radici, invece di dilatarsi in tutte le direzioni, si accorciano in direzione longitudinale e si allargano trasversalmente. Tutto ciò non è che un caso particolare, ma sostanzialmente non diverso dall'ordinario, dell'effetto della tensione cellulare, determinato da una grande differenza nella estensibilità della membrana cellulare secondo le diverse direzioni.

Nel 1897 il Rimbach [2] verificava sperimentalmente siffatta proprietà delle radici in ben 70 specie di piante appartenenti a 6 famiglie Monocotiledoni ed a 14 Dicotiledoni. Esempio massimo di contrattilità radicale, secondo l'A., offrono alcune Amarillidee, nelle quali l'accorciamento della radice, per un tratto di 5 mm., ammonta a ben il 70 %.

Dal punto di vista biologico, il Rimbach ritiene che la contrazione delle radici abbia lo scopo di portare le parti adulte del corpo vegetale dal punto ove si trovano, in altro punto, mediante l'attività di organi differenti dalle parti stesse soggette a spostarsi.

Il Massart [3], confermando siffatte osservazioni, dice che la produzione di radici contrattili avviene solo quando i fusti si trovano situati troppo vicini alla superficie del suolo. Perciò non può mettersi in dubbio che il fenomeno sia una reazione che la pianta esegue quando *se sent trop superficielle.* Rispetto alle cause determinanti, l'A. ritiene, in base ad esperienze appositamente istituite, che è il contrasto tra l'oscurità e la luce, e non la differenza di pressione e di umidità, *qui indique aux plantes, en voie de crois-*

(1) *Ueber die Contraction der Wurzeln,* Landwirtschaft. Jahrb., 9, 1880, pp. 37-80; *Over de contractie van wortels,* Versl. en Meded der Koninkl. Akad. van Wetenschapen, Afd. Nat., 2 reeks, 14 Dl., 1 Stuk, 1880, pp. 12-17.

(2) *Die kontraktilen Wurzeln und ihre Thätigkeit,* Beitr. z. wissenschaft. Botanik, Bd. II, Abth. I, 1897 (Ref. in Bot. Centralblatt, 1898, n. 20); *Ueber die Lebensweise des Arum maculatum,* Ber. der deutschen bot. Gesellschaft, Jahrg. XV, 1897, Heft 3, pag. 178 (Ref. in Bot. Centr., 1897, n. 27).

(3) *Comment les plants vivaces maintiennent leur niveau souterrain,* Bull. du Jardin Botanique de l'État à Bruxelles, vol I, fasc. IV, 1903.

sance, à quel moment elles sont encore dans le sol et à quel autre moment elles arrivent dans l'air », e che quindi determina la formazione delle radici contrattili.

Secondo il Daniel (¹), invece, le radici contrattili del *Crocus* non sarebbero che un sistema compensatore transitorio di riserva alimentare che si sviluppa allorchè per una ragione qualunque, interna od esterna, la nutrizione generale della pianta si trova ostacolata. Siffatti apparecchi transitorii di compenso sono stati osservati anche dal Cavara (²) nella *Scilla bifolia*, che è una delle specie alle quali sono state attribuite radici contrattili. Alcuni esemplari di questa pianta, coltivati in vasetti ed abbandonati a sè stessi senza inaffiamento, o quasi, durante l'estate, sviluppavano radici tuberizzate, le quali, fungendo come serbatoi di acqua, rappresentavano uno speciale adattamento xerofilo, dovuto alle condizioni eccezionalmente avverse nelle quali le piante erano costrette a vivere.

Certamente, come osserva il Terracciano (³), in molte altre monocotiledoni la tuberificazione delle radici è del tutto normale, ed avviene quali che siano le condizioni climatiche e l'esaurimento del terreno; tuttavia, come si vede, è opportuno distinguere diversi casi nello studio delle radici contrattili quando si voglia riconoscere qual'è precisamente la loro funzione. Infatti, non sempre la contrazione ha l'effetto supposto, di far discendere i fusti nel terreno. Perchè ciò avvenga occorre il concorso di molti fattori, alcuni inerenti alle qualità delle radici stesse, altri a quelle dell'ambiente esterno. Infatti le radici, oltre che contrattili, debbono essere dritte e verticali, altrimenti l'accorciamento si disperderebbe lungo un decorso tortuoso; debbono essere fornite di peli radicali o, meglio, di numerose e sottili ramificazioni verso l'estremità inferiore, in modo che questa possa solidamente fissarsi nel terreno. Occorre, infine, che il cilindro assile, che rappresenta la regione più solida della radice, prenda parte anch'esso alla contrazione o, per lo meno possa seguire passivamente l'accorciamento del parenchima. Ora, siccome non sempre si trovano riuniti tutti questi caratteri in uno stesso caso, come non sempre le condizioni di mobilità dei fusti e la compattezza del suolo permettono la discesa dei fusti stessi, il Rimbach ha sentito la necessità di distinguere diverse forme di radici contrattili, a seconda che l'abbassamento dei fusti ha luogo realmente, o no. Così pure, non sempre la formazione di radici contrattili è un riflesso dipendente dallo stato di posizione

(¹) *Sur les racines napiformes transitoires des Monocotilédones*, Revue de Botanique, III, 1891, pag. 455.

(²) *Un adattamento dei bulbi di « Scilla bifolia » alla xerofilia*, Boll. Soc. bot. it., 1911, pag. 96; id. *Tuberizzazione di radici secondarie in « Scilla bifolia »*, Boll. R. Orto Botanico di Napoli, III, pag. 453.

(³) *Sulle radici transitorie delle Monocotiledoni*, nei Rendiconti del Congresso botanico di Palermo, maggio 1902.

del corpo vegetale nel substrato. È stato inoltre dimostrato, come si rileva da quanto si è detto sopra, che formazioni analoghe, se non proprio le stesse radici contrattili, nella *Scilla bifolia* hanno ufficio ben diverso, cioè quello di servire da magazzini di riserva di acqua. Infine non appare ben dimostrato che i fenomeni esteriori (ossia, principalmente, la formazione di rughe alla superficie della corteccia, i quali servono a contrassegnare la caratteristica proprietà di siffatte radici) dipendano effettivamente da un processo di accorciamento delle radici od abbiano eventualmente tutt'altra origine. Io stesso ho avuto occasione di osservare da vicino la formazione delle dette caratteristiche rughe corticali nelle radici di una *Richardia africana*, cioè in una delle specie tipicamente descritte come dotate di radici contrattili, e tuttavia senza poter riscontrare in pari tempo nè un abbassamento del tubero, nè almeno un aumento dello stato di tensione delle radici stesse.

Nell'intendimento, quindi, di verificare quale parte spetti realmente al fenomeno della contrazione radicale nell'economia delle piante, e se si tratti di una funzione piuttosto complicata, come è sembrato fin'ora, ho voluto studiare dal punto di vista istologico alcuni tipici casi di radici contrattili. Mi limito qui ad esporre quanto ho potuto rilevare sulla detta specie di *Richardia*, la cui considerazione ha una particolare importanza, appartenendo essa ad una famiglia, nella quale il fenomeno in parola è largamente diffuso e caratteristico.

La struttura della corteccia radicale in questa pianta è contraddistinta dalla grande regolarità della disposizione delle cellule, in serie radiali e strati concentrici, ciascuno dei quali ne contiene presso a poco un egual numero. La stessa regolarità si riscontra nelle radici delle *Alocasie*, secondo van Tieghem [1]. Tuttavia, come in queste ultime piante, anche nella *Richardia* gli ultimi 5-6 strati sono costituiti da cellule più piccole, di forma poliedrica, e non regolarmente seriate con le altre più interne, ma digradanti insensibilmente verso di esse. Cosicchè tutta la corteccia può dividersi in due regioni: l'una esterna, di 5-6 strati, coi caratteri detti, oltre l'epidermide e uno strato ipodermico; e l'altra interna, fatta di cellule rotonde in sezione trasversale e regolarmente succedentisi in serie radiali.

Queste ultime cellule, le quali costituiscono la principale massa del corpo corticale della radice, hanno la proprietà di contrarsi non appena assorbono acqua dall'esterno, come si può agevolmente verificare in sezioni longitudinali non molto sottili, messe in acqua distillata. Ora, perchè questa facoltà, che hanno le cellule di contrarsi sotto l'influenza di un aumento di turgore, abbia il supposto effetto di far accorciare la radice (e quindi di produrre l'abbassamento dei fusti), occorre naturalmente che la contrazione stessa

[1] *Recherches sur la structure des Aroidées,* Annal. des sciences naturelles, V série, Botanique, VI, 1866, pp. 72-210.

possa divenire permanente, che cioè le cellule possano fissarsi nella forma che assumono quando aumentano di turgore. Ciò non può aver luogo se non per mezzo dell'accrescimento. Questo, cioè l'ingrandimento delle cellule, dovrebbe procedere in modo che esse possano raggiungere forma e dimensioni definitive, imposte dalle particolari qualità fisiche delle loro membrane, ossia seguendo la tendenza, che hanno queste ultime a dilatarsi trasversalmente ed accorciarsi longitudinalmente.

Senonchè, l'osservazione della lunghezza definitiva che assumono queste cellule in confronto a quella che hanno mentre sono in via di accrescimento, porta a concludere che tutto ciò non si verifica, e che l'accrescimento stesso mette invece capo, come nei casi normali, ad un allungamento ed allargamento uniformi delle singole cellule. Infatti, in una lunga radice di *Richardia africana*, provvista già, nella sua porzione superiore, delle caratteristiche rughe, la lunghezza delle cellule corticali va gradatamente crescendo a partire dall'estremità inferiore apicale, fino a raggiungere, nella zona provvista di rughe (nella quale cioè, secondo gli autori, sarebbe avvenuta la contrazione), una lunghezza doppia o tripla di quella delle cellule corrispondenti nelle porzioni inferiori. Ciò specialmente si osserva nelle cellule più esterne della regione interna, vale a dire in quelle che occupano una posizione intermedia rispetto a tutta la massa del parenchina corticale, e che, secondo gli autori, sarebbero precipuamente impegnate nel fenomeno della contrazione. Al tempo stesso, esse acquistano grande ampiezza trasversale; ma ciò in nessun modo potrebbe portare ad una contrazione dell'intero tessuto, se in pari tempo non si verificasse una diminuzione della lunghezza, rispetto a quella che esse hanno quando sono ancora giovani ed in via di crescita. Questo accrescimento radiale, che maggiormente si verifica nelle cellule immediatamente in contatto col cilindro assile, per via della mutua compressione alla quale sono soggette in tal punto della corteccia, è invece causa, per quanto indiretta, della formazione delle rughe, in seno al tessuto che costituisce la regione esterna della corteccia. Le cellule di quest'ultima (ad eccezione di quelle dell'epidermide e dell'ipoderma), a differenza delle altre, possono segmentarsi ed aumentare di numero, seguendo in tal modo, di pari passo, l'aumento dello spessore della radice, che si compie, come si è detto, per incremento di volume delle singole cellule interne. Di queste ultime, quelle situate immediatamente al di sotto della detta regione esterna capace di segmentarsi sono naturalmente sollecitate a stirarsi lateralmente secondo la direzione del perimetro; e quando quest'ultimo comincia ad essere troppo grande, rispetto alla possibilità, che dette cellule hanno di ricoprirlo, esse, non potendosi segmentare, nè seguire in altro modo un ulteriore aumento della periferia, sono costrette a staccarsi l'una dall'altra. Allora perdono il turgore; le pareti vengono in contatto fra loro, ed in ultimo avvizziscono completamente, così che nei tratti corrispondenti delle serie radiali di cellule si ori-

gina un vuoto, in cui rimangono i residui delle pareti cellulari avvicinate tra loro ed in parte disciolte. Questi vuoti, dapprima si alternano con tratti di serie cellulari ancora intatti; ma infine anche questi si dissolvono, ed il vuoto diventa continuo. La zona esterna (con l'epidermide e l'ipoderma), la quale intanto si è accresciuta per segmentazione, perde, così, ogni appoggio al dì sotto di sè e diventa una sorta di involucro indipendente, troppo ampio rispetto al perimetro che l'accrescimento subito l'avrebbe fatta capace di rivestire. Così si originano le rughe o crespe trasversali, caratteristiche della porzione superiore di queste radici, e che sono state attribuite a contrattilità; ma, come si vede, la loro formazione è un effetto indiretto, puramente materiale, dell'accrescimento, combinato con le particolari condizioni di struttura delle varie regioni della radice, e non già della contrazione del tessuto parenchimatico.

Per tal modo il fenomeno della contrattilità cellulare, dovuto alle variazioni di turgore, non può che produrre una semplice *fluttuazione* dello stato di tensione delle radici giovani, a seconda delle condizioni di maggiore o minore turgore in cui vengono a trovarsi volta a volta le cellule per effetto delle condizioni di umidità o di secchezza esterne. Ora questo processo, come si comprende di leggieri, non può produrre alcun notevole abbassamento dei fusti. Queste variazioni di tensione hanno anzi luogo in tutte le radici della stessa pianta, cioè anche in quelle le quali, per non avere le caratteristiche rughe, non sono considerate come contrattili. Tuttavia resta da chiarire il fatto che la formazione delle radici contrattili (rugose) ha luogo quando i fusti sono troppo superficiali, e cessa quando essi si trovano alla profondità giusta; in altri termini, si tratta di studiare l'influenza che gli agenti esterni esercitano sull'accrescimento delle radici, quando esse si trovano direttamente esposte alla loro azione.

A questo riguardo, maggior fondamento acquista l'opinione espressa dal Daniel e confermata dal Cavara in un caso tipico di piante a radici tiranti: che cioè a queste ultime spetti invece una funzione acquifera, sia pure di carattere transitorio, o come risultato di un adattamento.

Infatti, la stessa proprietà di contrarsi che hanno le cellule sotto l'influenza di un aumento di turgore, non esclude siffatta funzione, ma anzi ricorda le proprietà di alcune cellule tipicamente acquifere, quali, ad es., quelle dei così detti « veli radicali » delle radici aeree delle stesse Aroidee. La grande facilità con la quale le cellule contrattili assorbono l'acqua e s'inturgidiscono; la presenza di areole nelle membrane, le quali permettono rapidi e facili scambî di quest'acqua tra cellula e cellula, e la notevole capacità che acquistano allo stato adulto le cellule stesse per effetto dell'accrescimento, le fanno particolarmente adatte a compiere la funzione acquifera, per cui l'intero tratto della radice che si ingrossa assume il carattere di un vero serbatoio d'acqua, cui la regione corticale esterna, per i particolari carat-

teri istologici dell'epidermide e dell'ipoderma, fa da mantello protettivo molto efficace.

Ma oltre a ciò numerose osservazioni sul comportamento di queste radici, sull'epoca in cui si producono, e sul loro destino finale, provano indubbiamente che la funzione loro spettante è quella accennata. Il fatto che esse acquistano uno sviluppo considerevole quando le piante sono situate troppo superficialmente, è in evidente rispondenza con le condizioni di maggior secchezza in cui si trovano esposti in tal caso i fusti e, quindi, le piante stesse. Nella *Richardia africana*, che prospera coi tuberi sommersi completamente nell'acqua, le radici raggiungono il massimo sviluppo solo quando il livello ordinario dell'acqua si abbassa fino a scoprire le parti da cui sorgono. Epperò la formazione delle rughe (che dipende, come abbiamo visto, dalla cessazione dello stato di turgore delle cellule per effetto dell'accrescimento, e quindi, dal costituirsi di ampie lacune alla periferia della regione interna della radice) corrisponde esattamente allo stato di esaurimento delle riserve idriche delle radici. Il che ha luogo naturalmente quando esse hanno raggiunto il massimo dell'accrescimento in volume, e perduri il loro stato di scoprimento dal terreno o dall'acqua. L'apparizione delle rughe è quindi connessa con la durata della esposizione alla secchezza delle parti inferiori della pianta, giacchè in tali condizioni avviene precisamente l'impiego e l'esaurimento delle riserve liquide delle radici. Se invece le radici scoperte della *Richardia africana*, dopo divenute flosce e rugose, si fanno coprire novamente da uno strato d'acqua, non tardano ad imputridire.

Tutto ciò spiega perchè le radici si *contraggono* quando si trovano allo scoperto, e rimangono lisce e sottili quando i fusti, da cui sorgono, sono convenientemente approfonditi.

Le suddette considerazioni acquistano poi maggior valore dal fatto che le radici, cui è stato attribuito l'ufficio di tirar giù i fusti, si ritrovano per eccellenza in piante terrestri a fusti sotterranei. Queste piante cominciano a vegetare nella stagione umida, ed ingrossano gradatamente le loro radici durante il periodo vegetativo, immagazzinando nei loro tessuti una certa quantità di acqua; e soltanto sul finire del periodo vegetativo, quando cioè si è già nella stagione secca, appaiono in queste radici le caratteristiche rughe nella corteccia. Così avviene, per es., nei *Crocus* [1], nell'*Arum maculatum*, ed anche in qualche Dicotiledone, come nella *Ficaria ranunculoides*, secondo osservazioni del prof. Borzì.

A questo riguardo daremo maggiori dettagli in un prossimo lavoro *in extenso*; intanto, dall'esempio descritto si può concludere che ai fenomeni di contrazione radicale non spetta se non il significato derivante dalla loro natura

[1] Goebel, *Organographie der Pflanzen*, pag. 473.

prettamente fisica, già stabilita dalle chiare ricerche del De Vries. Essi, da soli, non bastano alla funzione del mantenimento del livello sotterraneo dei fusti, la quale assai più efficacemente si compie per attività incrementale dei fusti stessi, ossia con veri e proprî tropismi, come è stato illustrato nello stesso lavoro del Massart, di cui ci siamo in parte occupati.

Fisiologia. — *L'azione del radio nello sviluppo primaverile delle uova del baco da seta.* Nota di C. Acqua, presentata dal Socio R. Pirotta.

Lo studio dell'azione del radio sullo sviluppo delle uova in diverse forme di animali è stato oggetto di parecchie ricerche, le quali hanno dato in genere risultato positivo, nel senso di accertare un'azione del radio stesso, quantunque possa esplicarsi nei singolari casi in diversa maniera. Come fatto generale si ha la constatazione di un arresto o di un ritardo provocato dal radio nelle uova già fecondate, e di una alterazione indotta nella costituzione dei nuclei. Particolarmente interessanti sono le ricerche della scuola di O. Hertwig, che mettono in evidenza l'azione del radio stesso, facendolo anche agire negli elementi sessuali prima della fecondazione. Naturalmente in questa Nota non m'è possibile entrare nella estesa letteratura. Accennerò soltanto al fatto, più volte constatato, che l'azione del radio si manifesta differentemente secondo che agisce in diversi stadi di sviluppo, che detta azione non è uguale su tutti i tessuti, e che si esplica anche dopo un periodo di latenza. Fu accennato anche alla possibilità di un'azione acceleratrice, la quale però non sembra confermata. Chi volesse con qualche dettaglio conoscere l'argomento può consultare i lavori recenti di Hertwig G. e P. (1) e il lavoro, anch'esso recente, del Vernoni G., (2) nei quali è anche estesamente citata la letteratura.

Nel campo della bacologia citerò il lavoro di P. Tomaselli (3), nel quale l'Autrice, dopo avere sperimentato su larve del B. Mori, su crisalidi, su farfalle e su seme-bachi, giunge a concludere che il radio, limitatamente alle esperienze eseguite, si mostrò inattivo affatto nel campo della bacologia. Tuttavia l'argomento, come opportunamente è osservato in detto lavoro, non può ritenersi esaurito, ed è perciò che io ho creduto ripren-

(1) Hertwig G., *Parthenogenesis bei Wirbeltieren hervorgerufen durch artfremden radiumbestrahlten Samen*; Hertwig P. *Das Verhalten des mit Radium bestrahlten Spermacromatins im Froschei*. Archivi für mikroskopische Anatomie, 1913.

(2) Vernoni G., *Studi di embriologia sperimentale. (L'azione del radio sull'uovo di pollo)*. Archiv für Entwicklungsmecanik der Orgonismen, 1911.

(3) Tomaselli P., *Esercita il radio nessuna influenza sulle manifestazioni della Sericaria Mori?* Annuario della R. stazione bacologica di Padova, vol. XXXVI, 1909.

derne lo studio, limitandolo in queste prime ricerche all'azione sullo sviluppo delle uova durante il periodo primaverile. Usai all'uopo due campioni di radio; l'uno, che già a me servì per esperienze nel campo della fisiologia vegetale, è del tipo così detto a sali incollati; cioè a dire il sale di radio, finissimamente suddiviso, è trattenuto da un mastice speciale, il quale permette di fare agire il radio stesso direttamente, senza il bisogno di schermi atti a trattenerlo.

Il dischetto con il preparato di radio è calcolato dall'attività di 100.000 unità. L'altro campione, costituito da una quantità considerevole di bromuro di radio (5 milligrammi), è contenuto in una scatolina ricoperta di una sottile laminetta di mica. Detto campione mi fu prestato cortesemente per queste esperienze dal Sen. Prof. B. Grassi, al quale mi è doveroso esprimere i miei ringraziamenti. Designerò il primo campione con la lettera A, il secondo con la lettera B.

La prima esperienza fu compiuta con il radio A.

Due piccoli lotti di seme bachi, di qualità gialla indigena, del peso ciascuno di gr. 0,2 furono posti entro due cellette scavate in due dischi di sughero ed aventi al fondo uno strato di garza. Un lotto era a contatto direttamente col disco radioattivo, dal quale era separato soltanto dalla garza; l'altro lotto era posto alla distanza di circa mezzo metro nella stessa stanza, ed era isolato dal disco radioattivo da un blocco di piombo di tre centimetri di spessore; questo lotto costituiva il controllo. L'esperienza ebbe principio il giorno 7 aprile; la temperatura dell'ambiente si mantenne di circa 18° C.

Dopo 5 giorni, cioè il 12 aprile, furono tolte dal lotto sottoposte a radiazione 20 uova, ed altrettante ne furono parimenti tolte il 19 aprile, cioè dopo 12 giorni. Il 24 e il 25 aprile nel lotto di controllo cominciò ad aversi qualche nascita isolata; nel 26-27-28 le nascite proseguirono e furono complete. Nei lotti radiati non si verificò nessuna nascita, nè si ebbe traccia dello sbianchimento del seme, il quale suole precedere le nascite stesse. Si conservarono questi lotti per oltre 20 giorni, rimasti sempre completamente inattivi, e in seguito si gettarono. Da questa prima esperienza risulta: 1° che il preparato di radio dell'attività di 100.000 unità è sufficiente ad arrestare ogni sviluppo; 2° che un'esposizione di 5 giorni è bastante per ottenere effetti completi.

In una seconda esperienza, iniziata il 28 aprile, fu del pari adoperato il radio A. Furono impiegati parimenti due lotti c. s. e nelle condizioni già descritte. La temperatura media fu di circa 20° C. Dopo 10 giorni, cioè a dire l'8 maggio, cominciarono le nascite; ciò dipese dal fatto che il seme adoperato per le esperienze era stato già tolto da parecchi giorni dalla frigorifera e si trovava quindi in stato già avanzato di incubazione. Nei giorni 9-10-11 le nascite nel controllo furono complete, ma si constatò con sor-

presa che anche nel lotto radiato si avevano nascite, e cioè: 1 nel 9 maggio, nessuna nel 10, 11 nel giorno 11, 8 nel giorno 12, 12 nel giorno 13, altre 3 nei giorni successivi, in totale 35 nascite su circa 270 ovuli che costituivano il lotto. In questo caso adunque l'arresto dello sviluppo non era stato completo dopo 10 giorni, e ciò in opposizione a quanto si era verificato nella prima esperienza, nella quale erano bastati 5 e 7 giorni per provocare l'azione completa. Sorgeva dunque il dubbio in accordo a quanto, come si è detto, era stato descritto in altri casi, che il periodo evolutivo nel quale agisce il radio (poichè nella seconda esperienza le uova erano più prossime al loro schiudimento) non fosse senza influenza. Occorrevano quindi ulteriori ricerche.

Le nuove esperienze furono fatte con il radio A, e con il radio B, e si iniziarono il 21 maggio con seme giallo indigeno, il quale era stato tolto dalla frigorifera da alcuni giorni. Furono fatti sette lotti da gr. 0,2 l'uno, contenenti circa 270 ovuli per ciascuno.

Uno di tali lotti serviva da controllo; gli altri erano utilizzati come appresso. Due lotti *a*, *b* furono sottoposti all'azione del radio A, per quattro giorni e mezzo ciascuno, ma in periodi diversi, e cioè *a* nel periodo dal 21 al 26, *b* dal 26 al 31. Mentre l'uno di tali lotti era sottoposto all'azione del radio, l'altro era mantenuto alla stessa temperatura, ma in condizioni ordinarie; così ciascun lotto era radiato per uno stesso tempo (giorni 4 $^1/_2$), ma in periodi differenti. Altri due lotti *c*, *d*, erano sottoposti all'azione del radio B nelle stesse condizioni come sopra.

Gli ultimi due lotti *e*, *f*, erano sottoposti all'azione del medesimo radio B, ma alla distanza di un centimetro, entro una scatolina di sughero, col fondo di garza ed erano parimenti radiati per quattro giorni e mezzo, ma in periodi differenti come fu detto. La temperatura si mantenne ad una media di 21° C. Le nascite cominciarono il 3 giugno e si ebbero i risultati trascritti nel seguente prospetto:

DATA Giugno	Radio A a diretto contatto *a* giorni 4 ½ dal 21 al 26 — Nascite	 *b* giorni 4 ½ dal 26 al 31 — Nascite	Radio B a diretto contatto *c* giorni 4 ½ dal 21 al 26 — Nascite	 *d* giorni 4 ½ dal 26 al 31 — Nascite	Radio B a 1 cent. di distanza *e* giorni 4 ½ dal 21 al 26 — Nascite	 *f* giorni 4 ½ dal 26 al 31 — Nascite	Controllo — — Nascite
3	2	1	1	1	1	1	5
4	9	26	10	7	14	50	87
5	5	44	5	27	32	114	128
6	3	36	3	17	3	63	35
7	8	36	3	14	15	29	6
8	2	18	1	3	4	8	4
9	1	9	1	3	2	2	—
10	3	9	—	1	1	—	—
11	—	4	1	—	1	1	—
12	—	—	—	—	—	—	—
13			1	1	1		
Totale	33	183	26	74	74	268	265

I risultati di tali esperienze sono visibili a colpo d'occhio. In *a* abbiamo 33 nascite, in *b* 183; eppure ambedue i lotti risentirono l'azione del radio nelle stesse condizioni, fatta soltanto eccezione per il tempo, che per *b* fu in un periodo posteriore all'altro.

Ciò ha bastato a dare una differenza notevolissima. Lo stesso dicasi per i lotti *c* e *d*, sottoposti all'azione del radio B, a contatto diretto, che ci presentano rispettivamente le nascite espresse dai numeri 26, 74. Gli ultimi due lotti *e*, *f* sono sottoposti all'azione dello stesso radio B, ma non più a contatto diretto, bensì alla distanza di un centimetro. Orbene mentre *f* dà nascite complete e si distingue dal controllo soltanto per presentarle un po' prolungate, come accade sempre quando il seme non ha subìto un'incubazione regolare, *e* invece non dà che nascite parziali. Analogamente tutti i lotti radiati danno nascite alquanto irregolari e prolungate.

La conclusione di tali esperienze è adunque evidente. *L'azione del radio è diversa secondo che agisce in periodi differenti di evoluzione delle uova; nelle mie esperienze fu maggiore quando il seme era più lontano dal suo*

schiudimento e minore quando il seme stesso era più vicino a detto periodo.

Ora prendiamo in esame un'altra quistione. Facendo agire il radio ad una distanza determinata, per modo che non ne risultino conseguenze nocive, si potrà pure avere una qualche differenza, rispetto al controllo, per ciò che riguarda l'epoca e la durata del periodo di schiudimento? A questa domanda già in parte si risponde con un esame di quanto accadde nella precedente esperienza con il lotto *f*, il quale non mostrò comportamento differente dal controllo, fatta eccezione per un lieve prolungamento del periodo di schiudimento. Ma altre prove furono condotte durante la seconda esperienza, sopra descritta. Mentre il primo disco di sughero conteneva nella sua celletta col fondo di garza il piccolo lotto che si trovava a contatto diretto con il preparato radifero, altri tre dischi parimenti di sughero contenenti seme-bachi, nelle stesse condizioni e quantità, erano sovrapposti al preparato stesso alle distanze di cm. 3, 6, 9. In questi lotti la radiazione giungeva molto affievolita per la distanza maggiore ad ogni lotto, ed anche per il fatto che essa doveva attraversare gli strati di seme-bachi dei lotti sottostanti. Poteva dunque sembrare interessante il ricercare l'azione di una debole radiazione. Ma questa non produsse allora effetto apprezzabile; lo schiudimento delle uova avvenne in modo del tutto uguale a quello presentato dal lotto di controllo.

Concludendo adunque, l'azione diretta del radio, se debole, non produce — nelle condizioni delle mie esperienze — alcun effetto apprezzabile, se forte arresta l'evoluzione delle uova, ma quest'arresto è in rapporto con il periodo di tempo, durante il quale il radio ha agito, e cioè nei lotti radiati in un periodo più lontano dall'epoca dello schiudimento, l'azione è di molto maggiore di quella esercitata in un periodo posteriore, cioè a dire più vicino al momento dello schiudimento stesso. Questi primi risultati debbono dare origine a nuovi studî intesi a stabilire con maggiore esattezza i rapporti che passano tra l'azione del radio e il periodo evolutivo, e cioè lo stadio di sviluppo organico e delle differenziazioni corrispondenti ad esso sviluppo. Intanto m'è sembrato non privo d'interesse il rendere noti questi primi risultati ottenuti.

Parassitologia. — *Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite.* Nota del dott. M. Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

I.

Sono riunite in questa Nota osservazioni e ricerche sull'incrisalidamento invernale delle larve delle tignuole della vite [*Conchylis ambiguella*, *Polychrosis* (*Eudemis*) *botrana*], che, saltuariamente, ho avuto occasione di fare nell'alto Monferrato, e precisamente nel territorio di Alice Bel Colle; in alcune, come sarà espressamente indicato, ho avuto la collaborazione di F. Monticelli.

*
* *

La determinazione dei rifugî invernali dove, in aperta campagna, le larve delle ultime generazioni di *Conchylis* e di *Eudemis* vanno ad incrisalidarsi, ha molta importanza nel campo pratico per la lotta contro le due tignuole; nè, a questo proposito, possiamo usufruire delle numerose osservazioni ed esperienze francesi, perchè nei nostri sistemi di palatura della vite entra un elemento nuovo, la canna, la quale, al contrario di ciò che avviene coi pali, offre, con l'internodio superiore aperto, un ricercato rifugio alle larve che s'incrisàlidano.

Salvo poche vigne condotte su fil di ferro, in cui le canne entrano in minor quantità, il modo qui più usato di impalatura della vite è di mettere un fascio di canne lungo il ceppo ed a cui questo è legato; ad altri due fascetti di canne, poi, situati a monte o a valle, si affida il tralcio a frutto; cosicchè per ogni vite occorrono da 6 a 12 canne, a seconda delle loro dimensioni. Naturalmente, nè tutte le canne sono tagliate superiormente nè lo sono in guisa da lasciare un pezzo d'internodio; quindi non tutte le canne possono ivi dar ricetto a larve, e, d'altra parte, la canna non offre altro rifugio. Le viti sono tenute alte e ciascuna pianta ha dai 60 cm. ad 1 m. di legno vecchio, fra le cui corteccie si incrisalidano pure le larve di *Conchylis* e di *Eudemis*.

Per la lotta invernale contro questi parassiti si possono quindi consigliare e si consigliano: lo scortecciamento dei ceppi e lo spuntamento delle canne, con relativa distruzione delle parti asportate (l'aspersione dei ceppi con acqua bollente o caldissima è specialmente efficace contro la sola *pirale*).

Lo scortecciamento dei ceppi, data la loro lunghezza, che rende laboriosa e non agevole l'operazione, ed i pericoli a cui, per la rigidità degli

inverni nelle regioni settentrionali, si deve andare incontro, riteniamo non possa praticamente adottarsi. Ci è sembrato quindi interessante il determinare quale sarebbe la presumibile efficacia dello spuntamento delle canne, che è operazione facile, economica, che non troverebbe, in pratica, altra difficoltà che la cattiva volontà e il misoneismo di increduli vignaiuoli [1].

Per accertarsi dunque dell'efficacia dello spuntamento delle canne, era necessario vedere in quale misura le larve di *Eudemis* e di *Conchylis* si dirigessero, per incrisalidarsi, alle punte delle canne ed in quale alle cortecce. Se, infatti, la maggior parte delle larve incrisalidasse nelle canne, l'efficacia dello spuntamento sarebbe massima; minima, invece, se vi si trovasse soltanto una piccola percentuale di crisalidi.

In una vigna, molto danneggiata dalle tignuole, vennero adunque, d'inverno, scortecciate 25 viti, ricercandovi le crisalidi, ed al tempo stesso vennero esaminate, col medesimo scopo, tutte le canne che ne costituivano l'impalatura. I risultati furono i seguenti:

VITE	Crisalidi rinvenute		VITE	Crisalidi rinvenute		VITE	Crisalidi rinvenute	
	nelle canne	sotto la corteccia		nelle canne	sotto la corteccia		nelle canne	sotto la corteccia
I	0	0	X	3	2	XIX	0	0
II	1	0	XI	2	0	XX	0	1
III	0	1	XII	0	0	XXI	0	0
IV	0	1	XIII	0	2	XXII	0	1
V	0	0	XIV	0	1	XXIII	1	0
VI	6	5	XV	1	0	XXIV	0	0
VII	3	2	XVI	1	0	XXV	1	1
VIII	0	1	XVII	0	0			
IX	0	0	XVIII	0	0	Totali	19	18

Il numero rilevante, almeno per le località prese in esame e per le annate cui si riferiscono queste ricerche, delle crisalidi rinvenute [2], testi-

[1] In vista, anzi, di queste difficoltà, si è anche consigliata l'adozione, per la palatura delle vigne, di sostegni lisci, non offrenti cioè rifugi alle larve per incrisalidarsi. Ma è evidente che, quando anche la cosa fosse possibile e pratica, le larve si dirigerebbero totalmente verso i ceppi, dove più difficile ne è la distruzione; di più, siccome le canne occorre siano frequentemente rinnovate, almeno per quella parte che viene distrutta avanti la primavera, si ha una, diremo così, automatica distruzione dei parassiti.

[2] Il dott. Maisonneuve, nel 1910, avendo proceduto allo scortecciamento di un certo numero di ceppi nell'Anjou (dove le viti sono, come nella nostra località, circa 4000 per ettaro) ottenne, come media, 2 crisalidi ogni 10 ceppi. L'anno successivo, l'invasione delle tignuole vi fu formidabile. Il numero delle crisalidi che si rinvengono è in rapporto con la gravità dell'infezione dell'annata; ma la loro scarsità od abbondanza non sono affatto indizio di debole o forte invasione di tignuole nell'annata successiva.

monia della gravità dell'infezione nella vigna in esperimento. Infatti, ricerche contemporanee e successive, eseguite in altre località del medesimo territorio, separatamente sui ceppi e nelle canne, ci hanno fatto riscontrare un grande numero di ceppi e di canne privi di crisalidi.

È notevole il fatto che, osservando superficialmente, si tenderebbe ad ammettere che nelle punte delle canne si trovasse la quasi totalità delle crisalidi. Ciò dipende, riteniamo, dalla maggiore facilità con cui si possono esaminare le canne, dove si notano, talvolta, riuniti in un solo internodio, fino a 10 bozzoletti con crisalidi (Monticelli); mentre la ricerca sotto le corteccie riesce lunga e penosa. Ma le ricerche sopra esposte ed altre, che citeremo in appresso, dimostrano che vi ha per lo meno un egual numero di crisalidi nelle canne e sotto le corteccie. Si deve anche notare che sulle viti dove le crisalidi abbondano, si trovano numerose tanto nelle canne quanto nelle corteccie (viti VI, VII e X).

Da quanto abbiamo riferito devesi adunque concludere che con lo spuntamento annuale delle canne verrebbesi a distruggere circa la metà delle farfalle che si schiuderebbero la primavera successiva. Vale a dire — tenendo anche conto della necessità che la pratica debba esser generale e della difficoltà di ottenerlo — che il *solo* spuntamento delle canne, non associato cioè ad altri mezzi di lotta, difficilmente potrebbe dare risultati ben apprezzabili ed evidenti.

Si otterrebbero invece risultati più completi con un altro metodo di lotta invernale: quello dei rifugî artificiali, fra cui, molto consigliabili, quelli descritti ed applicati da G. Catoni nel Trentino. Si tratta di applicare, alla base del tralcio e sul legno di due anni, delle fasce di stoffa, ove le larve incrisalidano e dove quindi le crisalidi possono facilmente distruggersi. Nel caso nostro, all'applicazione delle fasce dovrebbe associarsi lo spuntamento delle canne, oppure le fasce dovrebbero applicarsi così ai ceppi come alle canne. È quanto ha fatto, in via sperimentale, F. Monticelli, ottenendo una conferma dei risultati esposti nella tabella precedente:

Sulle canne		Sui ceppi	
Fasce applicate	n. 26	Fasce applicate	n. 32
» senza bozzoletti . .	» 14	» senza bozzoletti . .	» 11
Bozzoletti con crisalidi . .	» 23	Bozzoletti con crisalidi . .	» 36
Bozzoletti vuoti	» 6	» vuoti	» 8
Crisalidi vuote	» 4	Crisalidi vuote	» 4

Come si vede, il ceppo è altrettanto, se non più, ricercato dalle larve per l'incrisalidamento, quanto le punte delle canne.

Tanto nel caso dell'applicazione delle fasce quanto in quello dello spuntamento delle canne, la lotta può completarsi col mettere in libertà gli imenotteri

parassiti, che escono dalle crisalidi, tenendo le fascie e le punte delle canne in apposite cassette, donde possano uscire gli imenotteri e non le farfalle. Le seguenti cifre dànno un'idea della importanza degli imenotteri parassiti, e di altre cause parassitarie, nella lotta contro le tignuole. Da 100 bozzoletti si sono ottenuti (Monticelli) 57 farfalle e 22 imenotteri parassiti; le altre crisalidi erano parassitizzate da funghi ed alcuni bozzoletti eran vuoti. All'aperto, prima della schiusura, sicuramente ancora un certo numero di crisalidi sarebbe stato distrutto da predatori, da funghi e da altre cause nemiche.

Nelle punte di canna si trovano frequentissimamente: un tenebrionide, del genere *Helops*, e le larve di un malachide, il *Malachius bipustulatus*, che sono considerati come predatori delle crisalidi. Ma sulla loro utilità e voracità è lecito di aver forti dubbî. Abbiamo infatti trovato spesse volte gli *Helops* e le larve di *Malachius* in compagnia di crisalidi sane ed intatte; e, tenuti gli uni e le altre in capsula di vetro insieme con crisalidi, sono morti senza danneggiarne alcuna.

* * *

Anche nella località presa in esame si nota una grande predominanza di *Eudemis* sulla *Conchylis*. Delle 57 farfalline ottenute (Monticelli) da 100 bozzoletti, di cui abbiamo già detto, ben 54 erano di *Eudemis* e solo 3 di *Conchylis*.

Nelle catture con l'acqua melassata, di cui si parlerà in un'altra Nota, abbiamo ottenuto una percentuale di *Conchylis* sensibilmente superiore, e cioè 10 *Conchylis* e 73 *Eudemis*. Può darsi che la *Conchylis* si trovi in abbondanza in certi punti ristretti del territorio: ricordiamo di aver veduto, in alcune sere di estate, svolazzare, in certe località, esclusivamente delle *Conchylis* in numero considerevole.

Batteriologia. — *L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici* [1]. Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi.

In una serie di lavori pubblicati nell'*Annuario dell' Istituzione Agraria Ponti* [2], edito dalla R. Scuola superiore di agricoltura di Milano, io ho comunicato le ricerche batteriologiche sui foraggi infossati, che perseguo dal 1904. In esse ho preso a studiare, da un punto di vista nuovo, i pro-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di batteriologia della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano. Pervenuto all'Accademia il 6 giugno 1914.

[2] Gorini, *Ricerche batteriologiche sui foraggi conservati nei silò*. Annuario dell'Istit. agraria dott. Andrea Ponti, volumi V, VI, VII, VIII, IX, X e XI, anni 1904-1914. Milano, Tipografia Agraria.

cessi fermentativi che si svolgono nei silò in base al comportamento della loro microflora nel latte; per cui sono arrivato a distinguere due tipi principali di silò, a seconda della direzione fermentativa in essi predominante: i silò lattici e i silò butirrici, distinzione che andrebbe a sostituire la vieta classificazione in silò dolci e silò acidi. Ho messo in luce l'influenza che la temperatura esercita su detti processi fermentativi e, quindi, sulla riuscita dei silò: i silò lattici, nei quali cioè prevale una microflora lattica, si ottengono quando la temperatura non supera i 50° C.; i silò butirrici, nei quali predomina una microflora butirrica, si hanno a temperature attorno ai 60° C.

Ho dimostrato che il massimo numero dei comuni silò è di natura piuttosto butirrica; ho posto in chiaro i pericoli che i silò butirrici presentano sia per le funzioni intestinali degli animali, sia per la sanità del latte, sia per la fabbricazione dei prodotti caseari e segnatamente dei formaggi. In forza di ciò, e considerando i vantaggi zootecnici e caseari che offrono per contro i silò lattici, ho per il primo (1907) proposto e studiato la preparazione di silò lattici mediante l'aggiunta di fermenti selezionati e la limitazione della temperatura di caricamento. Le prove, fatte con metodo rigorosamente comparativo, hanno dato risultati conformi alla aspettativa; essi parlano decisamente in favore del nuovo metodo di insilamento, il quale si è rivelato altresì in grado di spiegare una benefica influenza sulla conservazione dei foraggi infossati, diminuendo la perdita di sostanze nutritive azotate e zuccherine che sempre si verifica durante il processo fermentativo.

La temperatura di caricamento dei silò può e deve variare a seconda dei tipi di fermenti selezionati che si adoperano; vi sono fermenti lattici che funzionano ad alta temperatura (persino attorno ai 50° C.) come ve ne sono di quelli che funzionano a temperatura bassa (persino attorno ai 20° C.); allo scopo di eliminare una buona parte della microflora antagonista, parmi preferibile di usare fermenti lattici che permettono di raggiungere temperature un po' elevate capaci di uccidere i germi meno termoresistenti; naturalmente però la necessità di raggiungere alti gradi di calore è tanto meno sentita quanto più abbondante è la presenza dei fermenti lattici, perchè questi col loro rapido sviluppo finiscono col creare presto un ambiente sfavorevole ai fermenti antagonisti; io ho ottenuto buoni risultati anche contenendo la temperatura a 30-35° C. (Vedi la mia Relazione settima per l'anno 1912-913, nell'*Annuario Ponti*, vol. XI, 1914). Ciò deve però dipendere anche dalla natura dei foraggi infossati e dalla rispettiva microflora naturale.

***

In un altro lavoro più recente [1], avendo esteso le mie indagini alla microflora dei foraggi non insilati (erbe, fieni, surrogati, ecc.), ho dimostrato

[1] Gorini, *L'alimentazione delle vaccine e la produzione igienica del latte.* (Per

in linea generale la influenza perniciosa che essa può esercitare sia sulla salute del bestiame, sia sul latte e sui prodotti caseari, qualora detti foraggi abbiano subìto macerazioni o fermentazioni anormali; ed ho avanzato la proposta di sottomettere i foraggi, almeno nei casi dubbî o sospetti, ad un controllo batteriologico-zimoscopico sul genere di quello da me escogitato per i silò; imperocchè, a mia veduta e per mia esperienza, non basta l'esame microscopico semplice, come oggi si suole eseguire, per giudicare della salubrità di un foraggio: ci sono erbe, fieni, crusche, panelli dichiarati sani all'esame microscopico, che mi risultarono invece pericolosi al controllo batterioscopico ([1]).

***

Ultimamente poi ho condotto a termine, sempre col medesimo indirizzo, alcune ricerche particolari sulla fienagione, circa le quali reputo opportuno di riferire brevemente in questa Nota preliminare. In base a queste ricerche, parmi convenga stabilire anche qui, come nei silò, una prima distinzione dei fieni in fieni normali e fieni anormali; chiamando normali quei fieni che non abbiano subìto macerazioni o fermentazioni anormali, che non siano ammuffiti, guasti o abbruciati (cosidetti *fieni scaldati*), ho trovato che essi sono alla lor volta suscettibili di una suddistinzione, a seconda della batterioflora predominante, in fieni a prevalente fermentazione lattica e fieni a prevalente fermentazione butirrica; onde si può parlare anche qui di fieni normali lattici e di fieni normali butirrici.

Ho trovato inoltre anche qui, come nei silò, che nella maggior parte dei fieni comuni predomina la flora butirrica; e che su ciò ha una notevole importanza la temperatura di fermentazione. I fieni che hanno raggiunto temperature non troppo elevate (attorno ai 50° C.) mi sono risultati più ricchi di fermenti lattici che non quelli che hanno raggiunto temperature più alte (attorno ai 60°); siccome, peraltro, ciò deve variare anche a seconda della qualità delle erbe affienate e della rispettiva microflora naturale, ho pensato di eliminare queste cause di divario istituendo il seguente esperimento:

Ho preso una stessa e medesima bica di fieno, e l'ho sottoposta al controllo zimoscopico-batteriologico nelle sue diverse fasi di fermentazione; orbene

un controllo batteriologico dei foraggi). Rend. R. Ist. Lomb. sc. e lett, 26 marzo 1914, vol. XLVII, 1914, pag. 288.

([1]) Dopo la pubblicazione del suddetto mio lavoro è apparso nel « Centralblatt für Bakteriologie » ecc. (Abteilung II°, 41° vol., 27 maggio 1914, pag. 1) un accurato studio di A. Wigger del Laboratorio di Batteriologia Agraria del Politecnico di Zurigo (diretto dal Prof. Düggeli) sulla microflora di alcuni foraggi allo stato fresco e fermentato con speciale riguardo alla sua influenza sul latte. Esso viene a corroborare non solamente le mie ricerche, ma anche la mia proposta di un controllo batteriologico dei foraggi, data l'insufficienza del controllo chimico e microscopico semplice.

ho constatato che entro i primi tre, quattro giorni di fermentazione, con una temperatura attorno ai 50-55° C., essa poteva dirsi costituita da fieno prevalentemente lattico; in seguito, invece, tendeva a diventare sempre più butirrica, man mano che la temperatura saliva a 60-65° C. ed oltre, qual'è purtroppo frequente ad essere raggiunta nella fienagione ordinaria.

Pur riservandomi di ritornare diffusamente sull'argomento, i risultati di queste mie ricerche sui fieni si accordano siffattamente con quelli delle mie precedenti sui silò, che non esito fin da ora a consigliare anche qui una conveniente limitazione della temperatura di fermentazione, a fine di promuovere una salutare produzione di fieni a microflora prevalentemente lattica.

A tale intento gioverà aver cura di accumulare il fieno a dovere, stendendolo per strati, rassettandolo e comprimendolo in guisa da espellerne la maggior quantità di aria; verranno così ostacolate le fermentazioni che provocano l'eccessivo riscaldamento con conseguente perdita di sostanze nutritive e distruzione della microflora benefica, mentre rimane in vita la microflora pericolosa.

Importa poi che gli agricoltori interroghino un po' più di frequente il termometro, il cui uso emerge dal sopradetto assolutamente necessario per regolare i processi fermentativi così nella fienagione come nell'infossamento dei foraggi.

Con esso noi possiamo non solamente prevenire il cosidetto surriscaldamento che conduce a fieni come a silò anormali (*fieni scaldati* o abbruciati), ma possiamo altresì contenere la temperatura dei fieni come dei silò *normali* entro limiti tali da favorire il predominio della flora più benefica e delle fermentazioni più conservative.

Si avranno così fieni igienici e più nutritivi, con vantaggio evidente per il bestiame, per il latte e per i prodotti caseari.

Riassunto. — Le mie ricerche batteriologiche sui fieni si possono riepilogare come segue:

1°. — Esse confermano le mie precedenti ricerche sui silò. Risulta infatti da esse:

a) che prescindendo dai fieni mal riusciti o anormali (ammuffiti, guasti, surriscaldati ecc.), i fieni ben riusciti o normali possono essere suddistinti come i silò normali in due gruppi: fieni lattici e butirrici, a seconda della microflora in essi dominante;

b) che questa microflora sta anche qui in stretto rapporto colla temperatura di fermentazione; attorno ai 50° C. prevalgono i fermenti lattici, attorno ai 60° C. prevalgono i fermenti butirrici;

c) che la maggior parte dei fieni comuni, come dei silò comuni, è di natura butirrica; e quindi poco propizia sia per le funzioni intestinali del bestiame sia per la sanità del latte e dei derivati;

d) che per ottenere fieni lattici è raccomandabile innanzitutto un ac-

curato caricamento dei fieni in guisa di espellerne la maggior quantità di aria e di poterne moderare la temperatura di fermentazione attorno ai 50° C.

2°. — Esse vengono a rinsaldare l'importanza della mia proposta di sottoporre i foraggi ad un controllo zimoscopico-batteriologico per giudicarne la salubrità e l'attitudine casearia. Risulta infatti dalle mie ricerche che si danno fieni normali, cioè nè ammuffiti, nè guasti, nè surriscaldati, i quali sia all'esame organo-lettico sia all'analisi chimica e microscopica semplice possono essere dichiarati sani, mentre contengono una microflora pericolosa tanto per le funzioni intestinali e le conseguenti malattie del bestiame quanto per le qualità del latte e per la riuscita dei prodotti caseari.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte dei Soci stranieri: LUDIMAR HERMANN, mancato ai vivi il 5 giugno 1914; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Fisiologia*, sino dal 31 agosto 1910. — ADOLFO LIEBEN, morto il 6 giugno 1914; faceva parte il defunto dell'Accademia. sino dal 21 agosto 1905, per la *Chimica*. — UGO KRONECKER, mancato ai vivi il 6 giugno 1914; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, per la *Fisiologia*, sin dal 23 agosto 1897.

INDICE DEL VOLUME XXIII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1914 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Acqua. Invia per esame la sua Memoria: « Osservazioni ed esperienze sul baco da seta ». 629. — Sua approvazione. 747.

— « L'azione del radio nello sviluppo primaverile delle uova del baco da seta ». 976.

Almansi. « Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica ». 287.

— « Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento ». 473; 570.

— « Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti ». 651.

Amadori. « Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio ». 608; 707.

— « Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di potassio ». 800.

— e Viterbi. Inviano per esame la loro Memoria: « Sulla composizione della piromorfite ». 254.— Sua approvazione. 375.

Amantea. « Ricerche sulla secrezione spermatica. La raccolta dello sperma del cane ». 164; 369.

Amantea. « Prime osservazioni sulla secrezione spermatica del cane ». 164; 457.

— « La raccolta del secreto prostatico del cane ». 746.

Amoroso. « Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media ». 232; 299.

Angeli. « Sopra gli azossifenoli ». 473; 557.

Armellini. « Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete ». 138; 304.

— « Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta ». 686; 770.

— « Sul problema di due corpi nel caso di masse variabili ». 913.

Artini. « Sulla diffusione delle rocce a nefelina nella Libia ». 25.

B

Balbiano. « Sulla tribenzoina ». 654.

— « Sull'anidrificazione della Glicocolla ». 893.

Barbieri. « Ricerche di chimica sistematica. Rutenio, sodio, palladio ». 243; 384.

Barbieri. « Sul posto del cerio nel sistema periodico e sui molibdati complessi del cerio tetravalente ». 805.

— « Palladosalicilati ». 880.

Bargagli-Petrucci. Invia per esame la sua Memoria: « Sull'origine biologica della Terra di Siena (Terre gialle e bolari del Monte Amiata) ». 60. — Sua approvazione. 177.

Basile « La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo ». 539; 625.

Betti e Poccianti. « Sulle ossime dello anaftil-fenil-chetone ». 237; 340.

Bianchi A. — « Ilmenite di Val Devero (Ossola) ». 722.

Bianchi L. « Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili ». 3.

— « Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica ». 119; 195.

— « Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali ». 269.

— « Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche ». 383.

Bianchini. « Sull'incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo ». 353; 608.

Blaserna (Presidente). Comunica gl'inviti pervenuti all'Accademia per prender parte alle feste commemorative che saranno celebrate dalla R. Accademia di Scienze ed Arti di Barcellona e dalla Biblioteca imperiale di Pietroburgo, e all'Esposizione internazionale del Panama del 1915. 61.

— Annuncia che alla seduta assistono: il prof. *De Bodola*. 61; S. E. il Ministro della Marina *Millo*, il Socio *Eriksson* e il Socio *Marconi*. 376; il Socio straniero Sir *Archibald Geikie* e il prof. *Pionchon*. 549.

— Presenta un piego suggellato inviato dal sig. *A. Trinca*. 461; dal dott. *Mei-Gentilucci*. 891.

— Comunica i nomi dei concorrenti al premio Reale per la Matematica e a quello di Fisiologia normale e patologica, del 1913. 61.

Blaserna. Fa omaggio delle pubblicazioni: del principe *von Bülow*. 549; del Socio straniero *Walcott*. 630.

— Comunica i ringraziamenti per la loro nomina, inviati dai Soci stranieri *Fredholm*. 60; *Hill*. 178.

— Annuncia la morte dei Soci stranieri *Gill, Rosenbusch*. 178; *Suess*. 747; *Van Tieghem, Hill*. 890; *Hermann, Lieben, Kronecker*. 988.

— Riferisce sulla Memoria *Gianfranceschi*. 747.

Bodareu. « La compressibilità del cloruro di metile ». 491.

Boggio. « Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica ». 873; 920.

Bompiani. « Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie ». 72; 126.

Bonazzi. « L'effetto Hall longitudinale nelle leghe ferromagnetiche di rame, manganese, alluminio ». 427.

Bottasso. « Sull'operatore differenziale binario S di M. Pieri ». 588; 659.

Bottazzi. « Ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. P. I. Dei fenomeni tonici e clinici e della loro genesi nei muscoli striati e lisci ». 299.

Brunacci. « Sull'adattamento degli Anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria ». 138; 512; 622; 746.

Burgatti. « Potenziali newtoniani dell'elasticità ». 686; 776.

— « Applicazione dei potenziali newtoniani dell'elasticità ». 926.

C

Cambi. « Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati ». 144; 244.

— « Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni ». 722; 812.

Campanile. « Sui rapporti tra l'azione di una illuminazione istantanea a diversa distanza, e la reazione nei germogli di *Vicia sativa* ». 966.

CATALANO. « Sulla funzione delle radici contrattili ». 970.

CERLETTI. È approvata per la stampa la sua Memoria: « Sulla struttura della Nevroglia ». 890.

CHIARAVIGLIO e CORBINO. — « La distillazione della nitroglicerina a bassa temperatura ». 37.

CIAMICIAN. Riferisce sulla Memoria *Amadori* e *Viterbi*. 375.

— e SILBER. « Azioni chimiche della luce ». 113; 859.

CISOTTI. « Efflusso da un recipiente forato lateralmente ». 27; 73.

— « Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi ». 588.

— « Sopra le forme quasi-circolari dell'anello di Saturno ». 867.

CIUSA e PIERGALLINI. « Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce ». 615; 821.

COCCHI. Sua Commemorazione. 60; 178.

COLONNETTI. « Esperienze sulla elasticità a trazione del rame ». 79; 165; 225; 421.

CONTARDI. V. *Körner*.

COPPOLA. V. *Pellini*.

CORBINO. « Se ha luogo una birifrangenza anormale nella prossimità di una riga spettrale di un vapore metallico in un campo elettrico ». 238.

— V. *Chiaraviglio*.

COTTON. « Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles ». 592.

COTRONEI. Invia per esame la sua Memoria: « Sul tubo digerente del Limulus ». 60.

— « Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri. 375; 453; 519.

— « Risultati di ricerche sul tubo digerente del Limulus ». 885.

CRUDELI. « Nuovi criterii di stabilità per moti stazionarii di prima specie ». 400.

CUSMANO e POCCIANTI. « Bibrometetraidrocarvone e sua trasformazione in buccocanfora ». 347.

D

D'AGOSTINO. V. *Quagliariello*.

DE FILIPPI. « Relazioni sulla spedizione scientifica nel Karakoram orientale ». 34; 874.

DE STEFANI. Commemorazione del Corrisp. *Igino Cocchi*. 60; 178.

— « Su una nota di Steinmann intorno ai Diaspri di Prato in Toscana ». 280; 635.

— Fossili paleozoici dell'isola d'Elba ». 906.

DINI. Presenta il 1° volume delle Opere di *L. Cremona* e ne parla. 185.

DORIA. Sua Commemorazione. 747.

E

ENRIQUES. « Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ ». 119; 206; 291.

EREDIA. « La distribuzione stagionale e annuale della nebulosità in Italia ». 500.

— « L'influenza della orografia sulla distribuzione mensile della nebulosità ». 795.

F

FANO. Riferisce sulla Memoria *Galeotti*. 375.

FORESTI. V. *Padoa*.

FULCI. « I così detti ascessi di Dubois, secondo gli studî sulla rigenerazione del timo dei mammiferi ». 735.

G

GALEOTTI, GIULIANI, HIGGINS, SIGNORELLI e VIALE. Inviano per esame la loro Memoria: « Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna ». 177. — Sua approvazione. 375.

GATEAUX. « Sur la représentation des fonctionnelles continues ». 138; 310.

— « Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation ». 315; 405.

— « Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé ». 481.

GIANFRANCESCHI. Invia per esame la sua Memoria: « Per lo studio del corista campione dell'Ufficio centrale italiano ». 629. — Sua approvazione. 746.
— « La durata minima di un suono sufficiente per individuarlo ». 704.
GILL. Annunzio della sua morte. 178. — Sua Commemorazione. 376.
GODEAUX. « Sur les involutions données d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique ». 315; 408.
— « Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un ». 607; 682.
GONNELLI. V. *Marino.*
GORINI. « L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno - Fieni lattici e fieni butirrici ». 890; 984.
GRANATA. « Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili ». 59; 109.
GRASSI. (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Socio *Nasini*, del Corrisp. *Issel*, dei proff. *Agamennone* e *Longo* ecc. 184.
— Comunica l'elenco dei lavori presentati al concorso ai premî di S. M. il Re per la Matematica e per la Fisiologia normale e patologica, e a quelli del Ministero della P. I. per le Scienze naturali, del 1913. 185.
— Riferisce sulle Memorie: *Bargagli-Petrucci*. 177; *Sanzo, Acqua*. 747; *Cerletti*. 890.
— Commemorazione del Corrisp. *Doria*. 747.
GRILL. È approvata per la stampa la sua Memoria: « I minerali dell'isola di Nisiro (Mar Egeo). 60.
— « Bournonite della miniera di Brosso (Piemonte) ». 98.
— « Epidoto e Granato della miniera di Brosso (Piemonte) ». 535.
GUGLIELMO. « Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli ». 105; 138.
— « Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione con lo spettrometro ». 232; 322.
GUGLIELMO. « Intorno ad un condensatore sferico o conico per l'illuminazione laterale nei microscopi ». 432.
— « Sulla misura assoluta dell'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti ». 493.
— « Sull'esperienza di Clément e Desormes e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria ». 698.

H

HERMANN. Annuncio della sua morte. 987.
HILL. Annuncio della sua morte. 890.

I

ISSEL. « Lembi fossiliferi quaternarii e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato ». 659; 759.

K

KLEBS. Sua Commemorazione. 544.
KOERNER e CONTARDI. « Benzine nitrosostituite, ottenute dai corrispondenti aminoderivati ». 281.
— — « La trinitrobenzina asimmetrica 1. 2. 4. ». 633.
KRONECKER. Annuncio della sua morte. 987.

L

LAURA. « Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica ». 873; 931.
LEVI-CIVITA. « Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante ». 12.
LINCIO. Invia per esame la sua Memoria: « Rocce e minerali del Monte Colmine ed adiacenze ». 60. — Sua approvazione. 375.
LIEBEN. Annuncio della sua morte. 987.
LO SURDO. « Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale ». 41; 82.
— « Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe di Balmer

presentano diverse forme di scomposizione ». 84; 143.

Lo Surdo. « Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile ». 252.

— « La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer, e probabili regolarità ». 326.

— « Sulla formazione della rugiada e della brina ». 607; 950.

Lumia. « Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno ». 622; 738.

M

Maggi. Fa omaggio di un suo volume e ne discorre. 549.

Marchiafava. Commemorazione del Socio straniero prof. *Edwin Klebs*. 544.

Marconi. « Nuovi metodi per la produzione delle oscillazioni elettriche continue e per la loro utilizzazione nella radiotelegrafia ». 255.

Marino e Gonnelli. « Sopra una nuova modificazione del metodo di Kjeldahl ». 523.

Mattirolo. Riferisce sulla Memoria *Perotti*. 747.

Mayer. « Sul cloral-β-aminoazobenzene ». 253; 353.

— « Sui polimeri dell'isosafrolo ». 253; 358.

— « Sullo spettro di assorbimento ultravioletto della Buccocanfora ». 439.

— « Sullo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcooliche di santonina e di suoi derivati in presenza di alcali ». 442.

Mazzucchelli. « Spettri di assorbimento a bassissime temperature ». 953.

Mei-Gentilucci. Invia un piego suggellato. 891.

Migliorini. « Sulla geologia dei dintorni di Tobruk ». 734; 833.

Millosevich E. (Segretario). Presenta le pubblicazioni dei Soci: *Berlese*. 375; *De Stefani*. 891; *Lacroix*. 760, 756; *Liapounoff*. 375; *Loria G*. 549; *Noether*. 375; *Orth*. 549; *Parona*. 375; *Pascal, Picard, Silvestri*. 60; *Taramelli*. 60, 549; *Valenti*. 756; *Wagner*. 549; — e quelle dei signori: *Agamennone*. 549; *Angeletti*. 60; *Béguinot*. 891; *Eredia*. 549; *Omodeo, Peglion*. 891.

Millosevich E. (Segretario). Fa particolare menzione del vol. XII delle *Opere di Eulero*. 375; di un volume pubblicato in onore del Socio *Dalla Vedova*. 549.

— Commemorazione del Socio straniero *Sir David Gill*. 376.

Millosevich F. Riferisce sulla Memoria *Rosati*. 60.

— « Sulla presenza di una breccia ossifera quaternaria nelle Formiche di Grosseto ». 297.

Monti R. « L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei ». 59; 172.

Monti V. « Sulla distribuzione mensile della frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali ». 151.

Munari. « Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività ». 596; 781.

N

Naccari. Riferisce sulla Memoria *Negro*. 890.

Negro. Invia per esame la sua Memoria: « Ricerche sperimentali di elettrofisiologia circa l'azione che sui nervi motori della rana esercitano le scariche elettriche a basso potenziale, ottenuto a circuito aperto dai singoli poli di coppie voltaiche ». 177. — Sua approvazione. 890.

O

Olivari. « Sulle proprietà dello iodio come solvente crioscopico ». 41.

P

Padoa e Foresti. « Calori di combustione di sostanze fototrope ». 95.

PADOA e TABELLINI. « La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione ». 46; 88.
PELLINI e COPPOLA. « Solubilità e attività ». 94; 144.
PÉRÈS. « Sur les fonctions permutables analytiques ». 315; 870.
PEROTTI. Invia per esame la sua Memoria: « Studî di biologia sopra l'Agro romano in rapporto al suo bonificamento agrario ». 112. — Sua approvazione. 747.
PETRI. « Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite ». 109; 154.
— « Sulle condizioni anatomo-fisiologiche dei rametti dei castagni affètti dalla malattia dell'inchiostro ». 363.
PICONE. « Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche ». 315; 413.
— « Sopra una questione di geometria cinematica ». 666.
PIERAGNOLI. « Di alcune nummoliti dell'Isola di Rodi ». 728.
PIERGALLINI. Ved. *Ciusa*.
PIROTTA. Fa omaggio di varie pubblicazioni del prof. *Longo*, e ne parla. 61.
PIZZETTI. « Della probabilità nelle prove ripetute ». 21.
PLATE. « Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa ». 161; 453; 506.
— « Alcune ricerche quantitative sull'assunzione di ioni nelle piante ». 839.
POCCIANTI. Ved. *Betti*, *Cusmano*.
PONTE. « Sulla origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna ». 730.
PRATOLONGO. « I sistemi binarî cianamide-acqua, cianamide-urea e cianamide-diciandiamide ». 46.
PUCCIANTI. « Sull'interferografo girante del sig. Sagnac ». 177; 240.
— « La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico ». 243; 329.
— « Confronto fra la scomposizione catodica della prima e della seconda riga della serie di Balmer ». 331.

Q

QUAGLIARIELLO e D'AGOSTINO. « Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico ». 734; 844.
QUERCIGH. « Sulla vera natura della miersite e della cuproiodargirite ». 446; 711; 825.

R

RIGHI. « Sulla teoria delle rotazioni ionomagnetiche ». 897.
ROLLA. « Sul calore specifico delle leghe metalliche costituite da soluzioni solide ». 616.
— « Sul punto di fusione dell'arsenico ». 693.
ROSATI. È approvata per la stampa la sua Memoria: « Studio cristallografico della Mancherite e della Placodina ». 60.
ROSENBUSCH. Annunzio della sua morte. 178.
ROVERETO. « La penisola Valdéz, e le forme costiere della Patagonia settentrionale ». 103.

S

SANDONNINI. « Sugli ossialogenuri di piombo ». 959.
SANNIA. « Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche ». 486.
— « Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare ». 937.
SANZO. Invia per esame la sua Memoria: « Studî larvali di Bothophilus nigerrimus Gigl. ». 544. — Sua approvazione. 747.
SBORGI. « Sui borati: sistema BaO-B^2O^3-H^2O a 30° ». 530; 717; 854.
SCIOLETTE. « Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale ». 214.
SERRA. Invia per esame la sua Memoria: « Rocce vulcaniche della Sardegna centro-occidentale ». 746.

SEVERI. « Sugli integrali abeliani riducibili ». 581; 641.

SEVERINI. « Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm ». 131; 219; 315.

SIGNORINI. « Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica ». 596; 672.

— « Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico ». 874; 943.

SILBER. Ved. *Ciamician.*

SILLA. « Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali ». 600.

SILVA. « Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduali fatte col microscopio micrometrico ». 693; 787.

SOMIGLIANA. « Sulla teoria delle distorsioni elastiche ». 280; 463.

SOULA. « Sur certaines équations intégrales ». 79; 132.

STRUEVER. « Riferisce sulla Memoria *Grill.* 60.

SUESS. Annuncio della sua morte. 747.

T

TABELLINI. Ved. *Padoa.*

TEDONE. « Sulla espressione analitica dell' integrale generale dell' equazione delle onde smorzate ». 24; 63.

— « Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni ». 120.

— « Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche ». 473.

TONELLI. « Sulle funzioni di linee ». 28.

— « Su una proposizione dell'Almansi ». 607; 676.

TOPI. « Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite ». 890; 981.

TOSI. « Dispositivo hertziano per osservazioni meteorologiche e previsioni di temporali ». 84.

TRINCA. Invia un piego suggellato. 461.

V

VACCA. « Sulla equivalenza per traslazione ». 80.

— « Sull'"Ἔφοδος di Archimede ». 850.

VAN TIEGHEM. Annuncio della sua morte. 890.

VIALE. « La perspirazione cutanea in alta montagna ». 53.

VIARO. « Sulla costruzione delle tavole per la correzione del passo dei microscopii micrometrici ». 607; 687.

VIOLA. « Riferisce sulla Memoria *Lincio.* 375.

VOLTERRA. Fa omaggio di un volume del prof. *Le Bon,* e ne discorre. 112.

— Offre una sua pubblicazione. 549.

— Presenta un'opera del prof. Pionchon, e ne parla. 857.

— « Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali ». 266.

— « Sulle equazioni alle derivate funzionali ». 269; 393.

— « Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali ». 473; 551.

INDICE PER MATERIE

A

Astronomia. « Sulla correzione di run alle letture dei cerchi graduati fatte col microscopio micrometrico ». *G. Silva.* 693; 787.

Astronomia pratica. « Sulla costruzione delle tavole per la correzione del passo dei microscopî micrometrici ». *B. Viaro.* 607; 687.

B

Batteriologia. « L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici ». *C. Gorini.* 890; 984.

— « Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno ». *C. Lumia.* 622; 738.

Biologia. « La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo ». *C. Basile.* 539; 625.

— « Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibii Anuri ». *G. Cotronei.* 375; 453; 519.

— « Risultati di ricerche sul tubo digerente del Limulus ». *Id.* 885.

Botanica. « Sulla funzione delle radici contrattili ». *G. Catalano.* 970.

Bollettino bibliografico. 62; 254; 381; 630; 757.

Chimica. « Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di sodio ». *M. Amadori.* 608; 707.

— « Sui fenomeni di trasformazione nei molibdati e wolframati di potassio ». *Id.* 800.

Chimica. « Sopra gli azossifenoli ». *A. Angeli.* 473; 557.

— « Sulla tribenzoina ». *L. Balbiano.* 654.

— « Sull'anidrificazione della glicocolla ». *Id.* 893.

— « Ricerche di chimica sistematica. Rutenio, sodio, palladio ». *G. A. Barbieri.* 243; 384.

— « Sul posto del cerio nel sistema periodico, e sui molibdati complessi del cerio tetravalente ». *Id.* 805.

— « Palladosalicilati ». *Id.* 880.

— « Sulle ossime dell'anaftil-fenil-chetone ». *M. Betti* e *P. Poccianti.* 237; 340.

— « Sull'incompatibilità fra salolo, sulfonal e β-naftolo ». *G. Bianchini.* 353; 608.

— « Sul comportamento degli eteri borici con gli alcoolati ». *L. Cambi.* 144; 244.

— « Sulla reazione del nitroprussiato con alcuni chetoni ». *Id.* 722; 812.

— « Azioni chimiche della luce ». *G. Ciamician* e *P. Silber.* 113; 859.

— « Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce ». *R. Ciusa* e *A. Piergallini.* 615; 821.

— « La distillazione della nitroglicerina a bassa temperatura ». *D. Chiaraviglio* e *O. M. Corbino.* 37.

— « Bibromotetraidrocarvone e sua trasformazione in buccocanfora ». *G. Cusmano* e *P. Poccianti.* 347.

— « Benzine nitrosostituite, ottenute dai corrispondenti aminoderivati ». *G. Körner* e *A. Contardi.* 281.

— « La trinitrobenzina asimmetrica 1.2.4 ». *Id. Id.* 633.

— « Sopra una nuova modificazione del

metodo di Kjeldahl ». *L. Marino* e *F. Gonnelli*. 523.

CHIMICA. « Sul cloral-β-aminoazobenzene ». *M. Mayer*. 253; 353.

— « Sui polimeri dell'isosafrolo. *Id.* 253; 358.

— « Sulle proprietà dell'iodio come solvente crioscopico ». *F. Olivari* 41.

— « I sistemi binarî cianamide-acqua, cianamide-urea e cianamide-diciandiamide ». *M. Pratolongo*. 46.

— « Sugli ossialogenuri di piombo ». *G. Sandonnini*. 959.

— « Sui borati: sistema $BaO \cdot B^2O^3 \cdot H^2O$ a 30° ». *U. Sborgi*. 530; 717; 854.

CHIMICA FISICA. « Sullo spettro d'assorbimento ultravioletto della buccocanfora ». *M. Mayer*. 439.

— « Sullo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcooliche di santonina e di suoi derivati in presenza di alcali » *Id.* 442.

— « Spettri di assorbimento a bassissime temperature ». *A. Mazzucchelli*. 953.

— « Calori di combustione di sostanze fototrope ». *M. Padoa* e *B. Foresti*. 95.

— « La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione ». *M. Padoa* e *G. Tabellini*. 46; 88.

— « Solubilità e attività ». *G. Pellini* e *A. Coppola*. 94; 144.

— « Sul calore specifico delle leghe metalliche costituite da soluzioni solide ». *L. Rolla*. 616.

CLIMATOLOGIA. « La distribuzione stagionale e annuale della nebulosità in Italia ». *F. Eredia*. 500.

CRISTALLOGRAFIA. « Bournonite della miniera di Brosso (Piemonte) ». *E. Grill*. 98.

Concorsi a premî. Elenco dei lavori presentati al concorso ai premî Reali per la Matematica e per la Fisiologia normale e patologica e a quelli del Ministero della P. I. per le Scienze naturali. 185.

F

FISICA. « La compressibilità del cloruro di metile ». *E. Bodareu*. 491.

FISICA. « L'effetto Hall longitudinale nelle leghe ferromagnetiche di rame, manganese, alluminio ». *O. Bonazzi*. 427.

— « Se ha luogo una birifrangenza anormale nelle prossimità di una riga spettrale di un vapore metallico in un campo elettrico ». *O. M. Corbino*. 238.

— « La durata minima di un suono sufficiente per individuarlo ». *G. Gianfranceschi*. 704.

— « Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli ». *G. Guglielmo*. 105; 138.

— « Sull'uso dei reticoli concavi di diffrazione con lo spettrometro ». *Id.* 232; 322.

— « Intorno ad un condensatore sferico o conico per l'illuminazione laterale nei microscopii ». *Id.* 432.

— « Sulla misura assoluta dell'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti ». *Id.* 493.

— « Sull'esperienza di Clément e Desormes e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria ». *Id.* 698.

— « Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale ». *A. Lo Surdo*. 41; 82.

— « Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe di Balmer presentano diverse forme di scomposizione ». *Id.* 84; 143.

— « Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile ». *Id.* 252.

— « La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer e probabili regolarità ». *Id.* 326.

— « Sulla formazione della rugiada e della brina ». *Id.* 607; 950.

— « Nuovi metodi per la produzione delle oscillazioni elettriche continue e per la loro utilizzazione nella radiotelegrafia ». *G. Marconi*. 255.

— « Sull'interferografo girante del signor Sagnac ». *L. Puccianti*. 177; 240.

FISICA. « La decomposizione della riga rossa dell'idrogeno nel primo strato catodico. *Id.* 243; 329.

— « Confronto tra la scomposizione catodica della prima e della seconda riga della serie di Balmer ». *Id.* 331.

— « Sulla teoria delle rotazioni ionomagnetiche ». *A. Righi.* 897.

FISICA-CHIMICA. « Sul punto di fusione dell'arsenico ». *L. Rolla.* 693.

FISICA MATEMATICA. « Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale del calore raggiante ». *T. Levi-Civita.* 12.

— « Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico ». *A. Signorini.* 874; 943.

FISIOLOGIA. « L'azione del radio nello sviluppo primaverile delle uova del baco da seta ». *C. Acqua.* 976.

— « Ricerche sulla secrezione spermatica. — La raccolta dello sperma del cane ». *G. Amantea.* 164; 369.

— « Prime osservazioni sulla secrezione spermatica normale del cane ». *Id.* 164; 457.

— « La raccolta del secreto prostatico del cane ». *Id.* 746.

— « Ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi. Parte I - Dei fenomeni tonici e clonici e della loro genesi nei muscoli striati e lisci ». *F. Bottazzi.* 299.

— « Sull'adattamento degli anfibii all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria ». *Brunacci.* 138; 512; 622; 746.

— « Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico ». *G. Quagliariello* ed *E. D' Agostino.* 734; 844.

— « La perspirazione cutanea in alta montagna ». *G. Viale.* 53.

FISIOLOGIA VEGETALE. « Sui rapporti tra l'azione di un'illuminazione istantanea a diversa distanza, e la reazione nei germogli di Vicia sativa ». *G. Campanile.* 966.

FISIOLOGIA VEGETALE. « Ricerche sull'azione di nitrati isolati nel periodo germinativo dell'Avena sativa ». *F. Plate.* 161; 453; 506.

— « Alcune ricerche quantitative sull'assunzione di ioni nelle piante ». *Id.* 839.

G

GEOGRAFIA. « Dispositivo herziano per osservazioni meteorologiche e previsioni di temporali ». *A. Tosi.* 84.

GEOGRAFIA FISICA. « Relazioni sulla spedizione scientifica nel Karakoram orientale ». *De Filippi.* 34; 874.

GEOLOGIA. « Su una Nota di Steinmann intorno ai diaspri di Prato in Toscana ». *C. De Stefani.* 280; 635.

— « Fossili paleozoici dell'isola d'Elba. *Id.* 906.

— « Lembi fossiliferi quaternarii e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato ». *A. Issel.* 659; 759.

— « Sulla geologia dei dintorni di Tobruk». *C. I. Migliorini.* 734; 833.

— « Sulla presenza di una breccia ossifera quaternaria nelle Formiche di Grosseto ». *F. Millosevich.* 297.

— Di alcune mummuliti dell'Isola di Rodi ». *L. Pieragnoli.* 728.

— « Sulla origine delle acque sotterranee del versante orientale dell'Etna ». *G. Ponte.* 730.

— « La penisola Valdiz, e le forme costiere della Patagonia settentrionale ». *G. Rovereto.* 103.

GEOMETRIA. « Sopra una questione di geometria cinematica ». *M. Picone.* 666.

— « Sulla equivalenza per traslazione ». *G. Vacca.* 80.

M

MATEMATICA. « Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammettono un teorema nella media ». *L. Amoroso.* 232; 299.

— « Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili ». *L. Bianchi.* 3.

— « Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica ». *Id.* 119; 195.

Matematica. « Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali ». *Id.* 269.

— « Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche ». *Id.* 383.

— « Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie ». *C. Bompiani.* 72; 126.

— « Sull'operatore differenziale binario S. di M. Pieri ». *M. Bottasso.* 588; 659.

— « Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles ». *C. Cotton.* 592.

— « Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ ». *F. Enriques.* 119; 206; 291.

— « Sur la représentation des fonctionnelles continues ». *R. Gateaux.* 138; 310.

— « Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation ». *Id.* 315; 405.

— Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé ». *Id.* 481.

— « Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique ». *L. Godeaux.* 315; 408.

— « Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un ». *Id.* 607; 682.

— « Sur les fonctions permutables analytiques ». *J. Pérès.* 315; 870.

— « Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche ». *M. Picone.* 315; 413.

— « Della probabilità nelle prove ripetute ». *P. Pizzetti.* 21.

— « Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche ». *G. Sannia.* 486.

— « Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare ». *Id.* 937.

— « Sulle condizioni che definiscono assiomaticamente l'integrale ». *E. Sciolette.* 214.

Matematica. « Sugli integrali abeliani riducibili ». *F. Severi.* 581; 641.

— « Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm ». *C. Severini.* 131; 219; 315.

— « Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali. *L. Silla.* 600.

— « Sur certaines équations intégrales ». *J. Soula.* 79; 132.

— « Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni ». *O. Tedone.* 120.

— « Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche ». *Id.* 473.

— « Sulle funzioni di linee ». *L. Tonelli.* 28.

— « Su una proposizione dell'Almansi ». *Id.* 607; 676.

— « Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali ». *V. Volterra.* 266.

— « Sulle equazioni alle derivate funzionali ». *Id.* 269; 393.

— « Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali ». 473; 551.

Meccanica. « Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica ». *E. Almansi.* 287.

— « Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento ». *Id.* 473; 570.

— « Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti ». *Id.* 651.

— « Sopra la soluzione delle equazioni differenziali del moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta ». *G. Armellini.* 686; 770.

— « Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili ». *Id.* 913.

— « Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica ». *T. Boggio.* 873; 920.

— « Potenziali newtoniani dell'elasticità ». *P. Burgatti.* 686; 776.

— « Applicazione dei potenziali newtoniani dell'elasticità ». 926.

Meccanica. « Efflusso da un recipiente forato lateralmente ». *U. Cisotti*. 27; 73.
— « Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi ». *Id.* 588.
— « Sopra le forme quasi-circolari dell'anello di Saturno ». *Id.* 867.
— « Esperienze sulla elasticità di trazione del rame ». *G. Colonnetti*. 79; 165; 225; 421.
— « Nuovi criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie ». *U. Crudeli*. 400.
— « Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica ». *C. Laura*. 873; 931.
— « Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività ». *C. Munari*. 596; 781.
— « Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica ». *A. Signorini*. 596; 672.
— « Sulla teoria delle distorsioni elastiche ». *C. Somigliana*. 280; 463.
— « Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate ». *O. Tedone*. 24; 63.
Meccanica celeste. « Esame analitico della teoria del Fabry e del Crommelin sull'origine delle comete ». *G. Armellini*. 138; 304.
Meteorologia. « L'influenza della orografia sulla distribuzione mensile della nebulosità ». *F. Eredia*. 795.
— « Sulla distribuzione mensile della frequenza relativa della neve nelle Alpi settentrionali ». *V. Monti*. 151.
Mineralogia. « Ilmenite di Val Devero (Ossola) ». *A. Bianchi*. 722.
— « Epidoto e granato della miniera di Brosso (Piemonte) ». *E. Grill*. 535.
— « Sulla vera natura della miersite e della cuproiodargirite ». *E. Quercigh*. 446; 711; 825.

N

Necrologie e Commemorazioni. Annuncio della morte dei Socî stranieri: *Gill, Rosenbusch*. 178; *Suess*. 747; *Van Tieghem, Hill*. 890; *Hermann, Lieben, Kronecker*. 987. Commemorazione del Corrisp. *Cocchi*. 60; 178; *Doria*. 747; dei Soci stranieri: *Gill*. 376; *Klebs*. 544.

P

Parassitologia. « Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite ». *M. Topi*. 890; 981.
Patologia. « I così detti ascessi di Dubois, secondo gli studî sulla rigenerazione del timo dei mammiferi ». *F. Fulci*. 735.
Patologia vegetale. « Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite ». *L. Petri*. 109; 154.
— « Sulle condizioni anatomo-psicologiche dei rametti dei castagni affètti dalla malattia dell'inchiostro ». *Id.* 363.
Petrografia. « Sulla diffusione delle rocce a nefelina nella Libia ». *E. Artini*. 25.
Pieghi suggellati. Inviati da *A. Trinca*. 461; *Mei-Gentilucci*. 891.

S

Storia della matematica. « Sull' Ἔφοδος di Archimede ». *G. Vacca*. 850.

Z

Zoologia. « Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili » *L. Granata*. 59; 109.
— « L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei ». *R. Monti*. 59; 172.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 451, linea 34 invece, di *esagonale*, legg. *birifrangente*.
A pag. 652, linea 6, invece di $p = \varrho(u - u_0)$, legg. $p = \varrho(U - U_0)$.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 12°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-X. Fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1914.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Balbiano. Sull'anidrificazione della Glicocolla . . . . . . Pag. 893
Righi. Sulla teoria delle rotazioni ionomagnetiche . . . . . . » 897
De Stefani. Fossili paleozoici dell'isola d'Elba . . . . . . » 906
Armellini. Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili (presentata dal Socio *Levi-Civita*) . . . . . . » 913
Boggio. Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica (pres. dal Corrisp. *Almansi*) . . . . . . » 920
Burgatti. Applicazione dei potenziali newtoniani della elasticità (presentata dal Corrisp. *Marcolongo*) . . . . . . » 926
Laura. Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica (pres. dal Socio *Somigliana*) . . . . . . » 931
Sannia. Proprietà metriche intrinseche caratteristiche delle curve di un complesso lineare e delle superficie rigate di una congruenza lineare (pres. dal Socio *Bianchi*) . . . . » 937
Signorini. Sulla propagazione di onde elettro-magnetiche in un conduttore cilindrico (pres. dal Socio *Levi-Civita*) . . . . . . » 943
Lo Surdo. Sulla formazione della rugiada e della brina (pres. dal Corrisp. *Garbasso*) . . » 950
Mazzucchelli. Spettri di assorbimento a bassissime temperature (pres. dal Socio *Paternò*) » 953
Sandonnini. Sugli ossialogenuri di piombo (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . » 959
Campanile. Sui rapporti tra l'azione di una illuminazione istantanea a diversa distanza, e la reazione nei germorgli di *Vicia sativa* (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . . . . » 966
Catalano. Sulla funzione delle radici contrattili (pres. dal Socio *Borzì*) . . . . » 970
Acqua. L'azione del radio nello sviluppo primaverile delle uova del baco da seta (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . . » 976
Topi. Osservazioni e ricerche sulle tignuole della vite (pres. dal Socio *Grassi*) . . . . » 981
Gorini. L'influenza della temperatura sulla microflora del fieno. Fieni lattici e fieni butirrici (pres. dal Socio *Briosi*) . . . . . . » 984

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Dà annuncio della morte dei Soci stranieri: *Ludimar Hermann, Adolfo Lieben* e *Ugo Kronecker* . . . . . . » 988
Indice del vol. XXIII, 1° semestre 1914 . . . . » 989

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

526 Abbonamento postale.